

УДК 539.3

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНО-СЛОИСТОЙ КОНСОЛИ МИНИМАЛЬНОЙ МАССЫ ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА МАКСИМАЛЬНЫЙ ПРОГИБ

В. В. Алехин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: alekhin@hydro.nsc.ru

Рассматривается задача оптимального проектирования поперечно-слоистой консоли минимальной массы при заданном ограничении на ее максимальный прогиб из конечного набора упругих однородных изотропных материалов в случае, когда отсутствует полная информация о приложенных к балке нагрузках. Показано, что среди таких нагрузок существует “наихудшая” сосредоточенная нагрузка, равная по величине равнодействующей приложенных к балке сил, для которой прогиб будет максимальным при любом распределении материала вдоль консоли. Получены необходимые условия оптимальности в задаче минимизации массы балки при действии “наихудшей” нагрузки, предложен вычислительный алгоритм синтеза оптимальной консоли и приведен пример расчета.

Ключевые слова: слоистый материал, балка, оптимальное проектирование и управление, игольчатые вариации, принцип максимума.

Введение. Постановкам и алгоритмам решения задач оптимизации различных слоистых элементов конструкций при волновых, тепловых и силовых воздействиях посвящен ряд публикаций [1–4]. В настоящей работе с использованием методики, предложенной в [3], рассматривается задача оптимального проектирования поперечно-слоистой балки минимальной массы и постоянного сечения из конечного набора материалов. Ранее рассматривались задачи оптимизации формы однородной балки как простейшего конструктивного элемента [5]. При этом получались проекты с резким изменением высоты или ширины балки по ее длине, хотя известно, что одномерная математическая модель стержня справедлива только при достаточно малом градиенте изменения функции формы.

1. Постановка задачи. Пусть имеется набор W , состоящий из k упругих однородных изотропных материалов. Из данного набора требуется синтезировать поперечно-слоистую консоль минимальной массы при ограничении на ее максимальный прогиб.

Рассмотрим балку длиной l с сечением постоянной площади S , жестко защемленную на левом конце и свободную на правом. Выберем прямоугольную систему координат (x, y, z) , совместив начало координат с левым концом балки и направив ось x вдоль ее оси. Балка нагружена внешними поперечными силами $f(x)$, в точке $x = x_c$ ($0 < x_c < l$) приложена нагрузка $q(x)$, представляющая собой сосредоточенную силу \mathbf{P} , т. е. $q(x) = P\delta(x - x_c)$ (рис. 1). Здесь δ — дельта-функция Дирака. Изгиб консоли происходит в плоскости (x, z) . Приложенные к балке распределенная нагрузка $f(x)$ и сосредоточенная нагрузка $q(x)$ предполагаются всюду неотрицательными и такими, что их равнодействующая не превышает

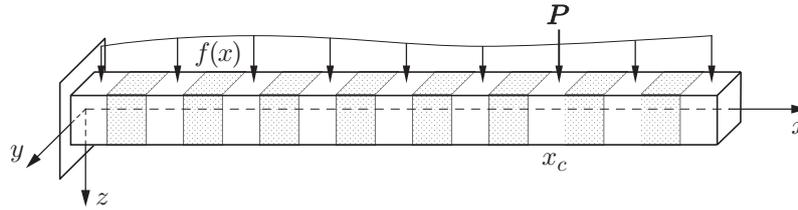


Рис. 1. Поперечно-слоистая консоль, нагруженная непрерывно распределенной нагрузкой $f(x)$ и сосредоточенной силой P

заданного значения P_0 , т. е.

$$f(x) \geq 0, \quad q(x) \geq 0, \quad \int_0^l f(x) dx + P \leq P_0. \quad (1.1)$$

Пусть σ_0, ρ_0 — характерные масштабы напряжения и плотности. Введем безразмерные переменные (в дальнейшем индекс “*” у безразмерных величин опускается):

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{l}, & w^* &= \frac{w}{l}, & E^* &= \frac{E}{\sigma_0}, & \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_0}, & f^* &= \frac{fl^3}{\sigma_0 J}, \\ P^* &= \frac{Pl^2}{\sigma_0 J}, & P_0^* &= \frac{P_0 l^2}{\sigma_0 J}, & Q^* &= \frac{Ql^2}{\sigma_0 J}, & M^* &= \frac{Ml}{\sigma_0 J}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $w(x)$ — прогиб балки; $E(x), \rho(x)$ — модули Юнга и плотности материалов слоев; J — момент инерции площади поперечного сечения S балки относительно оси y ; $M(x), Q(x)$ — изгибающий момент и перерезывающая сила.

В переменных (1.2) уравнения равновесия консоли и граничные условия имеют вид

$$M'(x) = Q(x), \quad Q'(x) = -f(x) - q(x), \quad M(x) = -E(x)w''(x); \quad (1.3)$$

$$w(0) = w'(0) = M(1) = Q(1) = 0, \quad (1.4)$$

где штрих обозначает производную по координате x . Если $x_c = 1$, то $q(x) = 0$ в уравнениях (1.3) и $Q(1) = P$ в крайних условиях (1.4).

На внутренних границах $x_i \in (0, 1)$ слоев балки, где терпят разрыв модули Юнга материалов, задаются условия сопряжения: непрерывность прогиба w , поворота w' , изгибающего момента M и перерезывающей силы Q (при отсутствии в точке x_i сосредоточенной нагрузки из множества (1.1)):

$$[w(x_i)]|_-^+ = [w'(x_i)]|_-^+ = [M(x_i)]|_-^+ = [Q(x_i)]|_-^+ = 0. \quad (1.5)$$

Введем кусочно-постоянную функцию

$$\alpha(x) = \{\alpha_j: x_{j-1} < x \leq x_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad x_0 = 0, \quad x_n = 1\}, \quad (1.6)$$

характеризующую структуру поперечно-слоистой консоли (количество, размеры и материалы составляющих ее слоев). Значения α_j принадлежат конечному дискретному множеству

$$\alpha_j \in U = \{1, \dots, k\}, \quad (1.7)$$

соответствующему исходному набору материалов W , и все характеристики материалов из заданного набора являются функциями распределения $\alpha(x)$ на отрезке $[0, 1]$. В рассматриваемой оптимизационной задаче функция $\alpha(x)$ принимается в качестве управления.

Задача оптимального проектирования консоли заключается в следующем. Среди кусочно-постоянных функций $\alpha(x)$ (1.6) с областью значений U (1.7) для любых реализаций внешних нагрузок $f(x)$ и $q(x)$ из множества (1.1) требуется найти управление $\alpha_{opt}(x)$, доставляющее минимум функционалу массы

$$F_0(\alpha) = \int_0^1 \rho(x, \alpha) dx \quad (1.8)$$

при заданном ограничении на прогиб консоли

$$F_1(\alpha) = \max_{x \in [0,1]} |w(x, \alpha)| - w_0 \leq 0, \quad (1.9)$$

где w_0 — заданная величина.

В силу неопределенности приложенной нагрузки сформулированная оптимизационная задача относится к числу так называемых задач с неполной информацией [5].

Прежде чем перейти к решению задачи (1.1)–(1.9), выясним свойства функции $w(x)$. Пусть имеется некоторое распределение $\alpha(x)$ материалов из множества W по длине консоли. Сравним выражения для прогиба $w(x)$ в случае произвольно распределенных внешних нагрузок $f(x)$ и $q(x)$ из множества (1.1) и в случае сосредоточенной силы P_0 , приложенной на конце консоли.

Проинтегрируем уравнения (1.3) с краевыми условиями (1.4). В результате получим

$$Q(x) = \begin{cases} \int_x^1 f(t) dt, & x > x_c \in (0, 1), \\ \int_x^1 f(t) dt + P, & x \leq x_c \in (0, 1]. \end{cases} \quad (1.10)$$

В случае сосредоточенной на конце консоли силы P_0 уравнения равновесия балки и граничные условия записываются в виде

$$\tilde{M}'(x) = \tilde{Q}(x), \quad \tilde{Q}'(x) = 0, \quad \tilde{M}(x) = -E(x)\tilde{w}''(x); \quad (1.11)$$

$$\tilde{w}(0) = \tilde{w}'(0) = \tilde{M}(1) = 0, \quad \tilde{Q}(1) = P_0. \quad (1.12)$$

Таким образом, $\tilde{Q}(x) = P_0$, $x \in [0, 1]$. В силу условий (1.1) и выражений (1.10), (1.11) имеем $\tilde{Q}(x) \geq Q(x) \geq 0$ и $\tilde{M}'(x) \geq M'(x) \geq 0$. Так как $M(1) = \tilde{M}(1) = 0$, то $\tilde{M}(x) \leq M(x) \leq 0$, $x \in [0, 1]$, т. е. $\tilde{w}''(x) \geq w''(x) \geq 0$. Интегрируя последнее неравенство с учетом краевых условий (1.4), (1.12), получим $\tilde{w}'(x) \geq w'(x) \geq 0$. Следовательно, функции $w(x)$ и $\tilde{w}(x)$ являются монотонно возрастающими на отрезке $[0, 1]$ и достигают максимума при $x = 1$. При этом $\tilde{w}(1) \geq w(1)$.

Таким образом, сосредоточенная сила P_0 , приложенная на конце консоли, является “наихудшей” нагрузкой из множества (1.1), для которой прогиб будет максимальным при любом распределении материала вдоль балки. Минимизация массы консоли будет проводиться при “наихудшей” нагрузке. В этом случае ограничение (1.9) на максимальный прогиб сводится к условию

$$F_1(\alpha) = w(1, \alpha) - w_0 \leq 0. \quad (1.13)$$

2. Необходимые условия оптимальности. Для вывода необходимых условий оптимальности в рассматриваемой оптимизационной задаче требуется построить выражения

для вариаций целевого функционала (1.8) и ограничения (1.13) через вариацию управления $\alpha(x)$.

Условия сопряжения (1.5) на внутренних границах слоев консоли позволяют ввести непрерывные на отрезке $[0, 1]$ фазовые переменные

$$\mathbf{y}(x) = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T = (w, w', M, Q)^T.$$

В новых переменных управляемая система (1.11), (1.12), где в качестве нагрузки взята “наихудшая” нагрузка из множества (1.1) (сосредоточенная сила P_0 в точке $x = 1$), записывается в виде

$$\mathbf{y}'(x) = A(x, \alpha)\mathbf{y}(x); \quad (2.1)$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(1) = 0, \quad y_4(1) = P_0. \quad (2.2)$$

Здесь ненулевые элементы a_{ij} матрицы $A(x, \alpha)$ имеют вид

$$a_{12} = a_{34} = 1, \quad a_{23} = -1/E(x).$$

Пусть $\alpha(x)$ — допустимое управление из множества (1.7), удовлетворяющее ограничению (1.13). Рассмотрим возмущенное управление $\alpha^*(x)$ [6]:

$$\alpha^*(x) = \begin{cases} \theta(x), & x \in M, \quad \theta(x) \in U, \\ \alpha(x), & x \notin M, \quad \text{mes } M \ll 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

($M \subset [0, 1]$ — множество малой меры). Вариацию целевого функционала $F_0(\alpha)$ (1.8) можно записать в виде

$$\delta F_0(M, \theta) = \int_M \{\rho(x, \theta) - \rho(x, \alpha)\} dx. \quad (2.4)$$

Для того чтобы получить вариацию ограничения (1.13), выразим значение максимального прогиба $w(1, \alpha)$ через фазовые переменные $y_i(x)$ и управление $\alpha(x)$. Из системы (2.1) с учетом граничных условий (2.2) получаем

$$w(1, \alpha) = y_1(1) = \frac{1}{P_0} \int_0^1 \frac{y_3^2(x)}{E(\alpha)} dx. \quad (2.5)$$

Тогда с использованием выражений (2.1), (2.2), записанных в вариациях:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{y}'(x) &= A(x, \alpha)\delta \mathbf{y}(x) + [A(x, \alpha^*) - A(x, \alpha)]\mathbf{y}(x), \\ \delta y_1(0) &= 0, \quad \delta y_2(0) = 0, \quad \delta y_3(1) = 0, \quad \delta y_4(1) = 0, \end{aligned}$$

главную часть приращения функционала $F_1(\alpha)$ (1.13) с учетом (2.5) можно представить в виде

$$\delta F_1(M, \theta) = \delta y_1(1) = \frac{1}{P_0} \int_M y_3^2(x) \left(\frac{1}{E(\theta)} - \frac{1}{E(\alpha)} \right) dx. \quad (2.6)$$

Составим расширенный функционал

$$I(\alpha) = F_0(\alpha) + \lambda(F_1(\alpha) + \xi^2), \quad (2.7)$$

где λ, ξ — множитель Лагранжа и штрафная переменная, учитывающие ограничение (1.13) [7]. С использованием выражений (2.4), (2.6) вариацию функционала $I(\alpha)$ (2.7) можно записать в виде

$$\delta I(M, \theta) = \int_M [H(x, \alpha, \mathbf{y}) - H(x, \theta, \mathbf{y})] dx + 2\lambda\xi \delta\xi; \quad (2.8)$$

$$H(x, \alpha, \mathbf{y}) = -\rho(x, \alpha) - \lambda \frac{y_3^2(x)}{P_0 E(\alpha)}. \quad (2.9)$$

Из выражения (2.9) для функции $H(x, \alpha, \mathbf{y})$ следует, что в рассматриваемой оптимизационной задаче функция Гамильтона не содержит сопряженных переменных.

Если управление $\alpha(x)$ является оптимальным (минимизирующим), то для любых допустимых управлений $\alpha^*(x)$ (2.3) должно выполняться необходимое условие оптимальности $\delta I(M, \theta) \geq 0$. Тогда в силу произвольности вариации $\delta \xi$ и того, что множество малой меры M может быть расположено всюду плотно на отрезке $[0, 1]$, из выражения (2.8) следует, что на оптимальном управлении $\alpha_{opt}(x)$ должны выполняться условия

$$\lambda [w(1, \alpha_{opt}) - w_0] = 0, \quad \lambda \geq 0; \quad (2.10)$$

$$H(x, \alpha_{opt}, \mathbf{y}) = \max_{\theta \in U} H(x, \theta, \mathbf{y}). \quad (2.11)$$

Выражение (2.10) является условием дополняющей нежесткости и согласования знаков [7].

На основе соотношений (2.10), (2.11), вытекающих из необходимого условия оптимальности $\delta I(M, \theta) \geq 0$, можно сформулировать принцип максимума для рассматриваемой задачи.

Пусть $\alpha_{opt}(x)$ — оптимальное управление в задаче (1.6)–(1.8), (1.13), (2.1), (2.2), при котором существует нетривиальное решение $\mathbf{y}(x)$ системы (2.1) с краевыми условиями (2.2). Тогда построенная с помощью этого решения функция Гамильтона $H(x, \theta, \mathbf{y})$ (2.9) достигает максимума по аргументу θ на оптимальном управлении $\alpha_{opt}(x)$ почти при всех $x \in [0, 1]$, т. е.

$$H(x, \alpha_{opt}, \mathbf{y}) = \max_{\theta \in U} H(x, \theta, \mathbf{y}).$$

При этом на оптимальной траектории $\mathbf{y}(x)$ должно выполняться соотношение (2.10).

Таким образом, оптимальное управление $\alpha_{opt}(x)$ и соответствующая ему оптимальная траектория $\mathbf{y}(x)$ должны удовлетворять краевой задаче (2.1), (2.2), ограничениям (1.13), (2.10) и почти при всех $x \in [0, 1]$ принципу максимума (2.11).

3. Вычислительный алгоритм. Так как в рассматриваемой задаче функция Гамильтона $H(x, \alpha, \mathbf{y})$ (2.9) не содержит сопряженных переменных, то вычислительный алгоритм строится следующим образом. Равномерной сеткой узлов $\{x_i\}$ отрезок $[0, 1]$ разбивается на достаточно большое количество отрезков малой длины $h = x_i - x_{i-1}$, моделирующих множества малой меры $M_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$.

Пусть известно некоторое управление $\alpha^s(x)$ из допустимой области (1.7), (1.13). Вектор фазовых переменных $\mathbf{y}(x)$ на отрезке M_i будем характеризовать его значением в точке $x = x_{i-1} + h/2$. Алгоритм нахождения $(s+1)$ -го приближения включает следующие шаги:

1. Решая систему (2.1), (2.2), находим вектор фазовых переменных $\mathbf{y}(x)$ в точках $x = x_{i-1} + h/2$, $i = 1, \dots, n$ и максимальный прогиб $w(1, \alpha^s)$.

2. Согласно выражению (2.3) на отрезке M_i задаем новое управление θ_i^* , обеспечивающее минимум вариации $\delta F_0(M_i, \theta_i^*)$ (2.4) при линеаризованном ограничении (1.13)

$$F_1(\alpha^*) \approx F_1(\alpha^s) + \delta F_1(M_i, \theta_i^*) \leq 0,$$

которое с учетом (2.6) можно записать в виде

$$\int_{M_i} \frac{y_3^2(x)}{E(\theta_i^*)} dx \leq [w_0 - w(1, \alpha^s)] P_0 + \int_{M_i} \frac{y_3^2(x)}{E(\alpha^s)} dx.$$

Если $\theta_i^* = \alpha^s(x_{i-1} + h/2)$, то выполняем п. 2 для следующего отрезка M_{i+1} . Если $\theta_i^* \neq \alpha^s(x_{i-1} + h/2)$, то переходим к п. 3.

Материал	ρ	E
Сферопластик	0,65	270
Дюралюминий	2,85	7100
Титановый сплав	4,60	12 000
Сталь	7,80	21 000
Медь	8,93	11 200

3. Следующее приближение для управления полагаем равным

$$\alpha^{s+1}(x) = \begin{cases} \theta_i^*, & x \in M_i, \quad \theta_i^* \in U, \\ \alpha^s(x), & x \notin M_i. \end{cases}$$

4. С управлением $\alpha^{s+1}(x)$ переходим к п. 1 и рассматриваем отрезок M_{i+1} .

Таким образом, управление улучшается на всем отрезке $[0, 1]$. Процесс считается окончанным на данной сетке разбиения, если управление $\alpha(x)$ не изменяется ни при каких значениях $i = 1, \dots, n$. Если в результате решения задачи управление $\alpha(x)$ принимает одно и то же значение на двух или нескольких расположенных рядом отрезках M_i , то эти отрезки объединяются в макрослой. Полученное решение представляет собой локальный минимум в рассматриваемой задаче.

ЗАМЕЧАНИЕ. В качестве множества M_i могут использоваться как сами элементарные отрезки M_i , так и объединение нескольких отрезков, взятых в различных частях области $[0, 1]$. Варьирование управления $\alpha(x)$ одновременно на нескольких элементарных отрезках может помочь избежать тупиковой ситуации [6], когда конструкция, не являясь оптимальной, тем не менее не может быть улучшена за счет локального варьирования управления только на одном из элементарных отрезков.

4. Пример расчета. Рассмотрим множество W , состоящее из пяти материалов, безразмерные характеристики которых приведены в таблице. Требуется спроектировать консольную балку минимальной массы при заданном ограничении на ее максимальный прогиб. Балка находится под действием поперечных нагрузок $f(x)$ и $q(x)$, результирующая которых $P_0 = 500$, а ее максимальный прогиб не должен превышать значения $w_0 = 0,02$. На концах консоли заданы граничные условия (2.2).

В качестве начальных приближений использовались различные распределения материалов по длине оптимизируемой балки. В результате получено три оптимальных консоли одной и той же массы $F_0 = 2,962$, но имеющих разные максимальные прогибы:

— трехслойный стержень с максимальным прогибом $w(1) = 0,0197$ и слоями $[0, x_1]$ из титанового сплава, $[x_1, x_2]$ из дюралюминия и $[x_2, 1]$ из сферопластика ($x_1 = 0,24$, $x_2 = 0,86$);

— пятислойный стержень с максимальным прогибом $w(1) = 0,0198$ и слоями $[0, x_1]$, $[x_2, x_3]$ из титанового сплава, $[x_1, x_2]$, $[x_3, x_4]$ из дюралюминия и $[x_4, 1]$ из сферопластика ($x_1 = 0,14$, $x_2 = 0,16$, $x_3 = 0,26$, $x_4 = 0,86$);

— семислойный стержень с максимальным прогибом $w(1) = 0,0199$ и слоями $[0, x_1]$, $[x_2, x_3]$, $[x_4, x_5]$ из титанового сплава, $[x_1, x_2]$, $[x_3, x_4]$, $[x_5, x_6]$ из дюралюминия и $[x_6, 1]$ из сферопластика ($x_1 = 0,16$, $x_2 = 0,2$, $x_3 = 0,24$, $x_4 = 0,26$, $x_5 = 0,3$, $x_6 = 0,86$).

На рис. 2 показаны полученные оптимальные консоли. Как и следовало ожидать, изгибная жесткость балки при приближении к заземленному концу растет, но не за счет увеличения площади сечения, а за счет увеличения модуля Юнга. При этом остаются справедливыми уравнения изгиба стержня, так как консоль имеет сечение постоянной площади.

Наиболее легкой однородной балкой, удовлетворяющей ограничению на максимальный прогиб при заданной нагрузке P_0 , является консоль из титанового сплава массой $F_0^* = 4,6$.

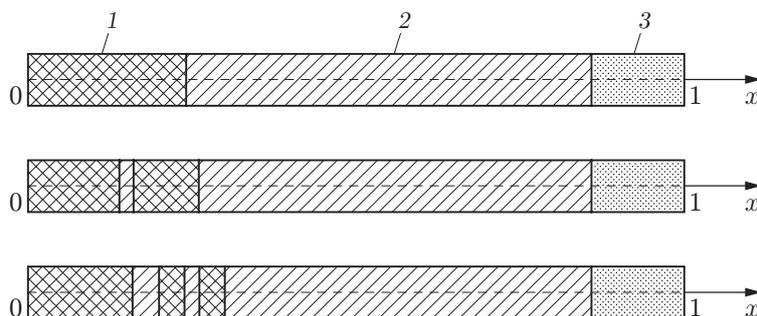


Рис. 2. Оптимальные консоли:

1 — слои из титанового сплава; 2 — слои из дюралюминия; 3 — слои из сферопластика

Выигрыш по массе для оптимальной консоли по сравнению с наиболее легкой однородной балкой составил $(1 - F_0/F_0^*) \cdot 100\% = 35,6\%$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Каниболотский М. А.** Оптимальное проектирование слоистых конструкций / М. А. Каниболотский, Ю. С. Уржумцев. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.
2. **Гусев Е. Л.** Математические методы синтеза слоистых структур. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1993.
3. **Алехин В. В.** Оптимизация слоистых систем / В. В. Алехин, Ю. С. Уржумцев. Якутск: Якут. филиал изд-ва СО РАН, 2002.
4. **Аннин Б. Д.** Механика деформирования и оптимальное проектирование слоистых тел. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 2005.
5. **Баничук Н. В.** Некоторые задачи оптимального проектирования упругих балок для классов сил // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1973. № 5. С. 102–110.
6. **Федоренко Р. П.** Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
7. **Алексеев В. М.** Оптимальное управление / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. М.: Наука, 1979.

*Поступила в редакцию 6/VI 2006 г.,
в окончательном варианте — 30/VIII 2006 г.*