

УДК 539.3

## ВАРИАНТ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

А. А. Маркин, М. Ю. Соколова

Тульский государственный университет, 300600 Тула

С использованием термомеханического подхода получены квазилинейные соотношения обратимого конечного деформирования анизотропных материалов. Свободная энергия представлена функцией температуры и совместных инвариантов логарифмической меры деформаций и базисных тензоров. Учитываются нелинейные термомеханические эффекты, в том числе различное поведение материалов при растяжении-сжатии и зависимость тензора упругости от температуры.

**Ключевые слова:** нелинейная термоупругость, анизотропия, определяющие соотношения, конечное деформирование макрообъема.

Основные принципы анизотропной термоупругости при бесконечно малых деформациях разработаны в [1]. Проблемы нелинейной упругости анизотропных материалов рассмотрены в монографии [2]. В настоящей работе на основе общего термодинамического подхода к исследованию процессов деформирования, разработанного А. А. Ильюшиным [3] и Л. И. Седовым [4], получен вариант определяющих соотношений, связывающих напряжения, конечные деформации и температуру в анизотропном упругом материале.

В анизотропном материале в начальном состоянии выделим представительный макрообъем  $dV_0$  с плотностью  $\rho_0$  при температуре  $T_0$ . Вследствие перемещений стенок этого макрообъема, определяемых аффинором деформаций  $\Phi(t)$ , и притока тепла  $d'Q$  внутри него возникают поля напряжений  $S(t)$  и температур  $T(t)$ . Поля деформаций, напряжений и температур внутри макрообъема будем считать однородными.

Рассмотрим процесс однородного конечного деформирования макрообъема. Процесс перехода упругого материала из начального состояния при  $t = t_0$  в произвольное конечное состояние при  $t = t_k$  определяется законом изменения во времени левой меры искажения  $U(t)$  [5]. Будем рассматривать только такие процессы деформирования, в которых  $U(t) = U_i(t) \mathbf{a}_i^{(k)} \mathbf{a}_i^{(k)}$ , где  $\mathbf{a}_i^{(k)}$  — единичные векторы главных осей деформаций в момент  $t = t_k$ ;  $U_i(t)$  — главные удлинения. В таких процессах главные оси деформаций совпадают с одними и теми же материальными волокнами. В этом случае в качестве меры деформаций удобно использовать тензор Генки  $H = \ln U$  [5], так как при этом удается разделить процессы изменения объема и формоизменения. Изменение объема характеризуется первым инвариантом меры Генки  $\ln(dV/dV_0) = \theta = H : E$ , а формоизменение описывается девиатором этой меры  $\tilde{H} = H - (1/3)\theta E$  ( $E$  — единичный тензор). В качестве меры напряжений будем использовать энергетически сопряженный с мерой Генки обобщенный тензор истинных напряжений  $\Sigma = (dV/dV_0)S$ . Первый инвариант этого тензора определяет гидростатическое напряжение в макрообъеме  $-p = \Sigma : E$ .

Процессу деформирования анизотропного материала поставим в соответствие его образ в шестимерном пространстве Ильюшина [3]. Тензору  $H$  в этом пространстве соответствует шестимерный вектор  $\mathbf{h}$ , а тензору  $\Sigma$  — вектор  $\boldsymbol{\sigma}$ . Векторы  $\mathbf{h}$  и  $\boldsymbol{\sigma}$  определяются известными соотношениями [3] по компонентам тензоров  $H$  и  $\Sigma$  относительно системы координат, оси которой сонаправлены с главными осями начальной анизотропии материала

с единичными векторами  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Базисные векторы  $\mathbf{i}_0, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{i}_5$  пространства Ильюшина являются при этом образами тензоров канонического базиса

$$\begin{aligned} I_0 &= (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3)/\sqrt{3}, & I_1 &= (2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2)/\sqrt{6}, \\ I_2 &= (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2)/\sqrt{2}, & I_3 &= (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)/\sqrt{2}, \\ I_4 &= (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2)/\sqrt{2}, & I_5 &= (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1)/\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

В системе координат, связанной с главными осями анизотропии материала, тензор четвертого ранга  $N^{IV}$ , определяющий свойства анизотропной среды, имеет канонический вид. Образом тензора  $N^{IV}$  является тензор второго ранга  $n$ , причем компоненты этих тензоров связаны прямым и обратным соотношениями [6]  $(3/2)N_{ijkl} = \beta_{ij}^\alpha n_{\alpha\beta} \beta_{kl}^\beta$ ,  $(3/2)n_{\alpha\beta} = \beta_\alpha^{ij} N_{ijkl} \beta_{kl}^\beta$  ( $\beta_\alpha^{ij}, \beta_{ij}^\alpha$  — известные матрицы перехода [3]).

Для анизотропных материалов с различными типами симметрии свойств могут быть определены инвариантные подпространства, базисные векторы которых не изменяются при ортогональных преобразованиях. Базисы таких инвариантных подпространств образуют следующие совокупности векторов:

- 1) триклинный материал:  $\mathbf{i}_0, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{i}_5$ ;
- 2) моноклинный материал:  $\mathbf{i}_0, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ ;
- 3) ромбический (ортотропный) материал:  $\mathbf{i}_0, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ ;
- 4) тетрагональный, тригональный, гексагональный (трансверсально-изотропный) материалы:  $\mathbf{i}_0, \mathbf{i}_1$ ;
- 5) кубический и изотропный материалы:  $\mathbf{i}_0$ .

Совокупности инвариантных базисных векторов 1–5 являются следствием инвариантности тензоров канонического базиса (1) при ортогональных преобразованиях физического пространства.

Для обратимых процессов основное термомеханическое соотношение [3] имеет вид

$$\dot{\psi} + \eta \dot{T} = (1/\rho_0) \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{h}}, \quad (2)$$

где  $\psi, \eta$  — отнесенные к единице массы свободная энергия и энтропия;  $T$  — абсолютная температура;  $(1/\rho_0) \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{h}}$  — удельная мощность напряжений.

Пусть удельная свободная энергия является функцией деформаций и температуры:  $\psi = \psi(\mathbf{h}, T)$ . Тогда

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{h}} \cdot \dot{\mathbf{h}} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T}. \quad (3)$$

Сравнивая соотношения (2) и (3), получим выражения для напряжений и энтропии

$$\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{h}}, \quad \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial T}, \quad (4)$$

которые являются следствием термомеханического подхода [3, 4].

Для свободной энергии примем представление, которое по форме совпадает с выражением, предложенным для линейной анизотропной термоупругости в [1]:

$$\psi = (1/2\rho_0) \mathbf{h} \cdot n \cdot \mathbf{h} - (1/\rho_0) \mathbf{b} \cdot \mathbf{h} (T - T_0) + C_h (T - T_0)^2 / (2T_0). \quad (5)$$

Будем считать, что тензор  $n$  зависит от деформаций:  $n = n(\mathbf{h})$ , а вектор  $\mathbf{b}$  — от температуры:  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(T)$ ,  $C_h$  — теплоемкость при постоянных деформациях.

Дифференцируя выражение (5), в соответствии с (4) получим

$$\boldsymbol{\sigma} = n(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \frac{dn}{d\mathbf{h}} \cdot \mathbf{h} - \mathbf{b}(T - T_0); \quad (6)$$

$$\eta = \frac{1}{\rho_0} \left( \mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial T} (T - T_0) \right) \cdot \mathbf{h} - \frac{C_h}{T_0} (T - T_0).$$

Для конкретизации определяющих соотношений (6) представим тензорную функцию  $n(\mathbf{h})$  следующим диадным разложением:

$$n(\mathbf{h}) = c + \sum_{\alpha=0}^{m-1} c_{\alpha} (\mathbf{i}_{\alpha} \mathbf{h} + \mathbf{h} \mathbf{i}_{\alpha}). \quad (7)$$

Здесь  $c$  — постоянный тензор свойств материала;  $c_{\alpha}$  — константы материала;  $m$  — размерность инвариантного подпространства для данного материала;  $\mathbf{i}_{\alpha}$  — базисные векторы инвариантных подпространств 1–5.

Размерность  $m$  инвариантного подпространства для анизотропных материалов различных типов определяется числом базисных векторов в совокупностях 1–5. В частности, для изотропного материала  $m = 1$ , для трансверсально-изотропного  $m = 2$ , для ортотропного  $m = 3$ . Соотношения (7) могут быть использованы не только для указанных типов материалов, но и для сред с более сложной анизотропией свойств, такой как моноклинная и триклинная.

Найдем входящую в (6) производную  $dn/d\mathbf{h}$ , считая базисные векторы  $\mathbf{i}_{\alpha}$  неизменными в процессе деформации. Тогда

$$\frac{dn}{d\mathbf{h}} = \sum_{\alpha=0}^{m-1} c_{\alpha} \left( \mathbf{i}_{\alpha} \frac{d\mathbf{h}}{d\mathbf{h}} + \frac{d\mathbf{h}}{d\mathbf{h}} \mathbf{i}_{\alpha} \right), \quad \frac{d\mathbf{h}}{d\mathbf{h}} = \sum_{\alpha=0}^5 \mathbf{i}_{\alpha} \mathbf{i}_{\alpha} = E_6,$$

где  $E_6$  — единичный тензор в шестимерном пространстве.

После преобразований соотношений (6) с учетом (7) получим выражение для вектора напряжений

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[ c + \sum_{\alpha=0}^{m-1} c_{\alpha} (\mathbf{i}_{\alpha} \mathbf{h} + \mathbf{h} \mathbf{i}_{\alpha} + h_{\alpha} E_6) \right] \cdot \mathbf{h} - \mathbf{b}(T - T_0), \quad (8)$$

где  $h_{\alpha} = \mathbf{i}_{\alpha} \cdot \mathbf{h}$ .

Если в соотношениях (8) константы  $c_{\alpha}$  положить равными нулю, а вектор  $\mathbf{b}$  считать постоянным, то получим обобщение соотношений Дюгамеля — Неймана [1] на случай конечных деформаций.

Из соотношений (6) следует, что вектор  $\mathbf{b}(T - T_0) = \boldsymbol{\sigma}|_{\mathbf{h}=\mathbf{0}}$  является вектором температурных напряжений, возникающих в макрообъеме при отсутствии его деформаций вследствие изменения температуры. Свяжем векторную функцию  $\mathbf{b}(T)$  с температурными деформациями макрообъема  $\mathbf{h}^T$ . Температурными назовем деформации, возникающие в нестесненном макрообъеме при  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  вследствие изменения температуры:

$$\mathbf{h}^T = \mathbf{h}|_{\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0}}.$$

Полагая в (8)  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ , получим

$$\mathbf{b}(T - T_0) = \left[ c + \sum_{\alpha=0}^{m-1} c_{\alpha} (\mathbf{i}_{\alpha} \mathbf{h}^T + \mathbf{h}^T \mathbf{i}_{\alpha} + h_{\alpha}^T E_6) \right] \cdot \mathbf{h}^T, \quad (9)$$

где  $h_{\alpha}^T = \mathbf{i}_{\alpha} \cdot \mathbf{h}^T$ .

Выражение (9) определяет входящую в (8) векторную функцию  $\mathbf{b}(T)$  через температурные деформации, которые могут быть измерены в соответствующих экспериментах и представлены в виде некоторой функции температуры. В частности, для вектора  $\mathbf{h}^T$  можно использовать принятое в линейной теории представление

$$\mathbf{h}^T = \mathbf{a}(T - T_0), \quad (10)$$

где  $\mathbf{a}$  — направляющий вектор температурных деформаций.

Вектор  $\mathbf{a}$  в (10) является образом тензора  $A$  коэффициентов температурного расширения в пространстве Ильюшина. Подставляя (10) в (9), получим связь между направляющими векторами температурных напряжений и температурных деформаций

$$\mathbf{b} = c \cdot \mathbf{a} + (T - T_0) \sum_{\alpha=0}^{m-1} c_{\alpha} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \left( E_6 + 2 \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \right) \cdot \mathbf{i}_{\alpha}. \quad (11)$$

Если в (11) все коэффициенты  $c_{\alpha}$  положить равными нулю, то получится известное из линейной теории соотношение между термомеханическими характеристиками материала  $\mathbf{b} = c \cdot \mathbf{a}$  [1].

Подставляя (9) в (8), определяющие соотношения запишем в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = n(\mathbf{h}, \mathbf{h}^T) \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{h}^T), \quad (12)$$

где  $n(\mathbf{h}, \mathbf{h}^T) = c + \sum_{\alpha=0}^{m-1} c_{\alpha} [\mathbf{i}_{\alpha}(\mathbf{h} + \mathbf{h}^T) + (\mathbf{h} + \mathbf{h}^T)\mathbf{i}_{\alpha} + (h_{\alpha} + h_{\alpha}^T)E_6]$ .

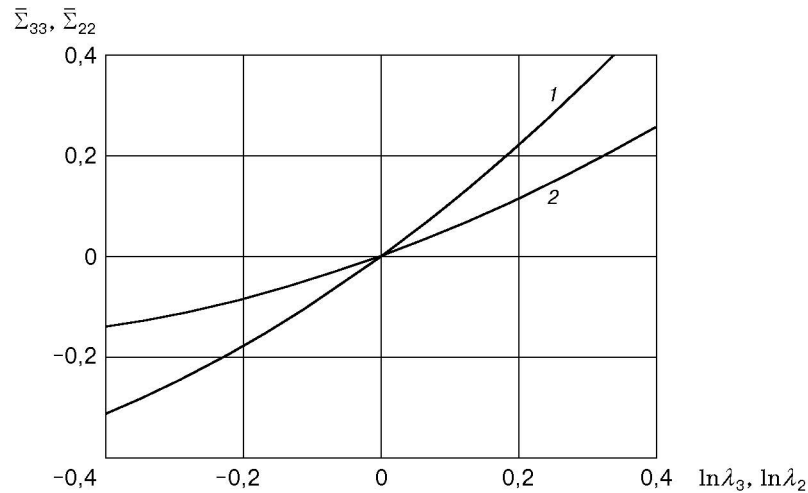
Если все константы  $c_{\alpha}$  положить равными нулю и считать деформации бесконечно малыми ( $\mathbf{h} = \boldsymbol{\varepsilon}$ ), то из (12) получим известные соотношения линейной термоупругости  $\boldsymbol{\sigma} = c(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^T)$ , которые используются при постановке и решении краевых задач. В определяющих соотношениях (12) тензор  $n$  зависит не только от достигнутых деформаций  $\mathbf{h}$ , но и от температуры. Следовательно, эти соотношения описывают зависимость упругих свойств среды от температуры.

Запишем определяющие соотношения (12) в физическом трехмерном пространстве, учитывая взаимно однозначное соответствие между шестимерными векторами и тензорами второго ранга. В результате получим связь между обобщенным тензором истинных напряжений и тензором деформаций Генки

$$\Sigma = N^{IV}(H, H^T) : (H - H^T), \quad (13)$$

где  $N^{IV} = C^{IV} + \sum_{\alpha=0}^{m-1} c_{\alpha} [I_{\alpha}(H + H^T) + (H + H^T)I_{\alpha} + (h_{\alpha} + h_{\alpha}^T)E^{IV}]$ ;  $C^{IV}$  — тензор упругости четвертого ранга;  $I_{\alpha}$  — тензоры канонического базиса (1);  $H^T$  — тензор температурных деформаций;  $E^{IV} = \sum_{\beta=0}^5 I_{\beta}I_{\beta}$  — единичный тензор четвертого ранга;  $m$  — размерность инвариантного подпространства.

При построении соотношений (12) или (13) для конкретного материала используются данные экспериментов по определению тензора упругости анизотропного материала по начальному участку диаграммы деформирования ( $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ ) [7]. Для нахождения вектора  $\mathbf{h}^T$  требуются эксперименты по определению коэффициентов теплового расширения материалов, описанные в [8]. Константы  $c_{\alpha}$  могут быть найдены из экспериментов по одноосному растяжению материалов вдоль осей анизотропии. Для изотропного материала константа  $c_0$  может быть определена из одного опыта на растяжение в произвольном направлении, в случае трансверсально-изотропного материала достаточно двух опытов на растяжение в направлении оси трансверсальной изотропии и поперечном направлении. Для ортотропного материала константы  $c_0, c_1, c_2$  можно найти из трех опытов на растяжение вдоль трех главных осей анизотропии, при этом экспериментальные диаграммы деформирования аппроксимируются параболлами, коэффициенты которых и определяют значения искомых констант.



Определяющие соотношения (13) в изотермических процессах ( $T = T_0$ ,  $H^T = 0$ ) принимают вид

$$\Sigma = \left[ C^{IV} + \sum_{\alpha=0}^{m-1} c_{\alpha} (I_{\alpha} H + H I_{\alpha} + h_{\alpha} E^{IV}) \right] : H. \quad (14)$$

В силу нелинейности соотношения (14) описывают различное поведение материалов при растяжении-сжатии.

Пусть куб из трансверсально-изотропного материала подвергается одноосному деформированию вдоль оси  $e_3$  трансверсальной изотропии. При этом деформации характеризуются удлинениями  $\lambda_3 \neq 1$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , а напряжения  $\Sigma_{33}$  определяются выражением

$$\Sigma_{33} = (C^{3333} + \sqrt{3}(c_0 + \sqrt{2}c_1) \ln \lambda_3) \ln \lambda_3,$$

где  $C^{3333}$  — модуль упругости трансверсально-изотропного материала в направлении главной оси.

При деформировании куба в направлении поперечной оси ( $\lambda_2 \neq 1$ ,  $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$ ) напряжения  $\Sigma_{22}$  определяются выражением

$$\Sigma_{22} = (C^{2222} + (\sqrt{3}/\sqrt{2})(\sqrt{2}c_0 - c_1) \ln \lambda_2) \ln \lambda_2,$$

где  $C^{2222}$  — модуль упругости трансверсально-изотропного материала в поперечном направлении.

На рисунке приведены зависимости  $\bar{\Sigma}_{33}(\ln \lambda_3)$ ,  $\bar{\Sigma}_{22}(\ln \lambda_2)$  (кривые 1, 2 соответственно) для материала, у которого  $C^{2222}/C^{3333} = 0,5$ ;  $c_0/C^{3333} = 0,25$ ;  $c_1/C^{3333} = 0,05$ . Из рисунка следует, что кривые, соответствующие деформациям растяжения и сжатия, не совпадают. В отличие от известных моделей для разномодульных материалов [9] соотношения (14) обеспечивают непрерывность касательного модуля при изменении направления деформирования в окрестности точки  $\ln \lambda_3 = 0$  и  $\ln \lambda_2 = 0$ .

Рассмотрим трехосное изотермическое деформирование куба из трансверсально-изотропного материала, в котором ориентация осей анизотропии не совпадает с направлением ребер, обозначив через  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  удлинения ребер куба. В этом случае из анализа соотношений (13) следует, что в рассматриваемом процессе “чистой” деформации структура тензора  $N^{IV}(H)$  изменяется, что приводит к изменению типа начальной анизотропии материала. При произвольном сочетании удлинений  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  материал становится триклинным, т. е. приобретает общий тип симметрии свойств.

Таким образом, полученный вариант определяющих соотношений нелинейной анизотропной упругости позволяет учесть нелинейную зависимость напряжений от температуры, зависимость упругих свойств материала от изменения температуры в процессе деформирования, различное поведение анизотропного материала при растяжении-сжатии, а также изменение типа анизотропии в процессе деформирования.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.
2. **Черных К. Ф.** Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988.
3. **Ильюшин А. А.** Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
4. **Седов Л. И.** Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962.
5. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
6. **Соколова М. Ю.** Построение образа процесса нагружения в начально-анизотропной среде // Изв. Тул. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 1995. Т. 1, вып. 2. С. 144–150.
7. **Микляев П. Г., Фридман Я. Б.** Анизотропия механических свойств материалов. М.: Металлургия, 1969.
8. **Новикова С. И.** Тепловое расширение твердых тел. М.: Наука, 1974.
9. **Матченко Н. М., Трещев А. А.** Теория деформирования разносопротивляющихся материалов. Определяющие соотношения. Тула: Тул. гос. ун-т, 2000.

*Поступила в редакцию 6/III 2002 г.,  
в окончательном варианте — 10/VI 2002 г.*

---