

УДК 537.523

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Р.М. УРУСОВ

Институт физики НАН КР, Бишкек, Кыргызстан

Рассматриваются некоторые особенности расчета характеристик электрической дуги в многосвязной области на основе метода фиктивных областей. Показано, что использование модели локального термодинамического равновесия плазмы в рамках указанного метода неправомерно, а отсутствие регуляризации при расчете течения электрического тока приводит к появлению аномальных результатов.

Применение метода фиктивных областей (МФО) для численного расчета процессов тепло-массообмена в многосвязной области позволяет значительно расширить круг исследуемых задач (см. обзор [1]). Вместе с тем, известно [2 – 4], что численное решение нелинейных дифференциальных уравнений требует соблюдения ряда условий и правил, отступление от которых может приводить к “неожиданным” результатам.

По-видимому, с этим пришлось столкнуться авторам [5, 6] при расчете характеристик стационарной электрической дуги. В [5] рассчитывается, в частности, электрическая дуга в аргоне атмосферного давления, горящая между конусным катодом и анодом, имеющим цилиндрическое углубление (каверну). Сила тока $I_0 = 200$ А, межэлектродное расстояние $L = 10$ мм. Используется стационарная система двухмерных уравнений столба дуги [7 – 9] в приближении локального термодинамического равновесия (ЛТР) в цилиндрической системе координат (r, z, θ) . Электромагнитная часть задачи решается с использованием функции электрического тока $\chi(r, z)$, автоматически удовлетворяющей условию сохранения тока $\text{div } \mathbf{j} = 0$ и определяемой соотношениями:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} = j_z, \quad - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial z} = j_r \quad (1)$$

Полагается, что протекающие процессы являются стационарными, течение ламинарным, излучение объемным. Приэлектродные процессы не рассматриваются. Применяется метод гармонически среднего коэффициента, позволяющий, по мнению автора, вести счет во всей расчетной области, включая твердое тело электродов с реальными теплофизическими свойствами. Отмечается, что расчеты проводятся без привлечения какой-либо дополнительной информации для постановки граничных условий вблизи электродов. Выявлено, что при различных начальных приближениях численное решение сходится к двум возможным режимам: в первом — большая часть линий тока замыкается на дно каверны (рис. 1, *a*), а во втором — на ее внешние края (рис. 1, *b*).

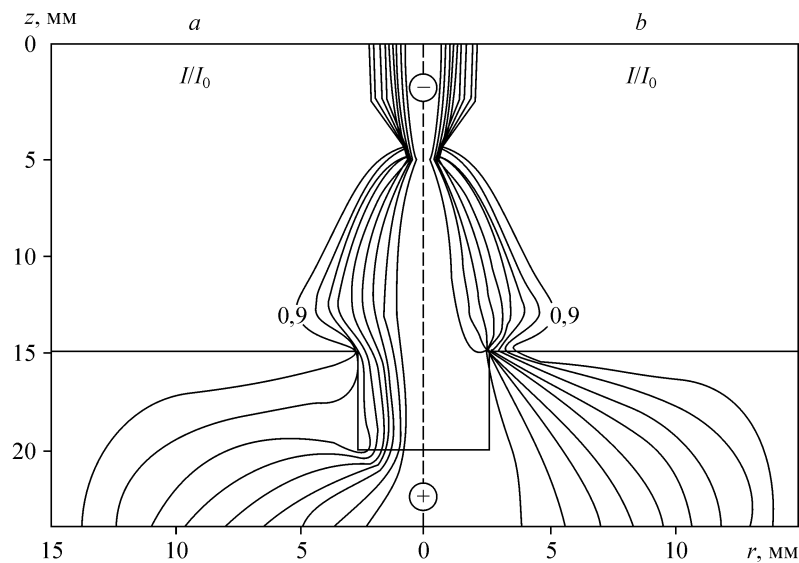


Рис. 1. Линии тока $//I_0$ (шаг 0,1) для различных начальных приближений.
 $I_0 = 200$ А, $L = 10$ мм, [5].

В [6] представлены результаты расчета дуги (аргон атмосферного давления) с конусным вольфрамовым катодом и плоским медным анодом ($I_0 = 50\text{--}400$ А, $L = 10; 20$ мм). Математическая модель столба дуги и методика численного решения полностью аналогичны [5]. Из результатов расчета следует, что при $I_0 \leq 100$ А в зависимости от начального приближения для радиуса r_a дуги на аноде формируются два устойчивых решения: при $r_a < 4$ мм с контрагированным (рис. 2, а) и при $r_a > 4$ мм расщепленным (рис. 2, б) столбами дуги у поверхности анода. В численных расчетах начальное приближение для r_a варьировалось в пределах от 1 до 10 мм.

Возможная зависимость результатов расчета нестационарных задач ($\partial/\partial t \neq 0$) от начальных условий очевидна и не вызывает сомнений. Однако в рассмотренных выше примерах речь идет о зависимости результатов расчета стационарной задачи ($\partial/\partial t = 0$) от начального приближения, что весьма настораживает, поскольку для данного класса стационарных процессов подобная зависимость является характерным признаком отсутствия устойчивости задачи [2, 3]. Это может быть обусловлено, например, некорректностью исходной задачи, и по этой причине проводится соответствующая регуляризация [4], что, вероятно, не было сделано в [5, 6].

В действительности, численный анализ показывает следующее. Расчет проводится в рамках стационарной двухмерной модели в приближении ЛТР [7–9], а наличие электродов в расчетной схеме учитывается методом фиктивных областей [10]. Дуга горит в аргоне при атмосферном давлении между торцевой поверхностью цилиндрического вольфрамового катода радиусом 1 мм и плоским неплавящимся медным анодом толщиной 1 мм. Заметим, что расчет дуги с цилиндрическим, а не конусным катодом, а также с анодом без каверны в данном случае не имеет принципиального значения; то же самое относится к внешним параметрам разряда, которые не всегда задавались точно такими, как в [5, 6], поскольку речь идет лишь о качественном сравнении результатов.

На рис. 3 представлены поля тока $//I_0$, температуры T и течения газа G при одинаковых внешних параметрах разряда ($I_0 = 100$ А, $L = 10$ мм). Различия в характеристиках обусловлены лишь различным начальным приближением для

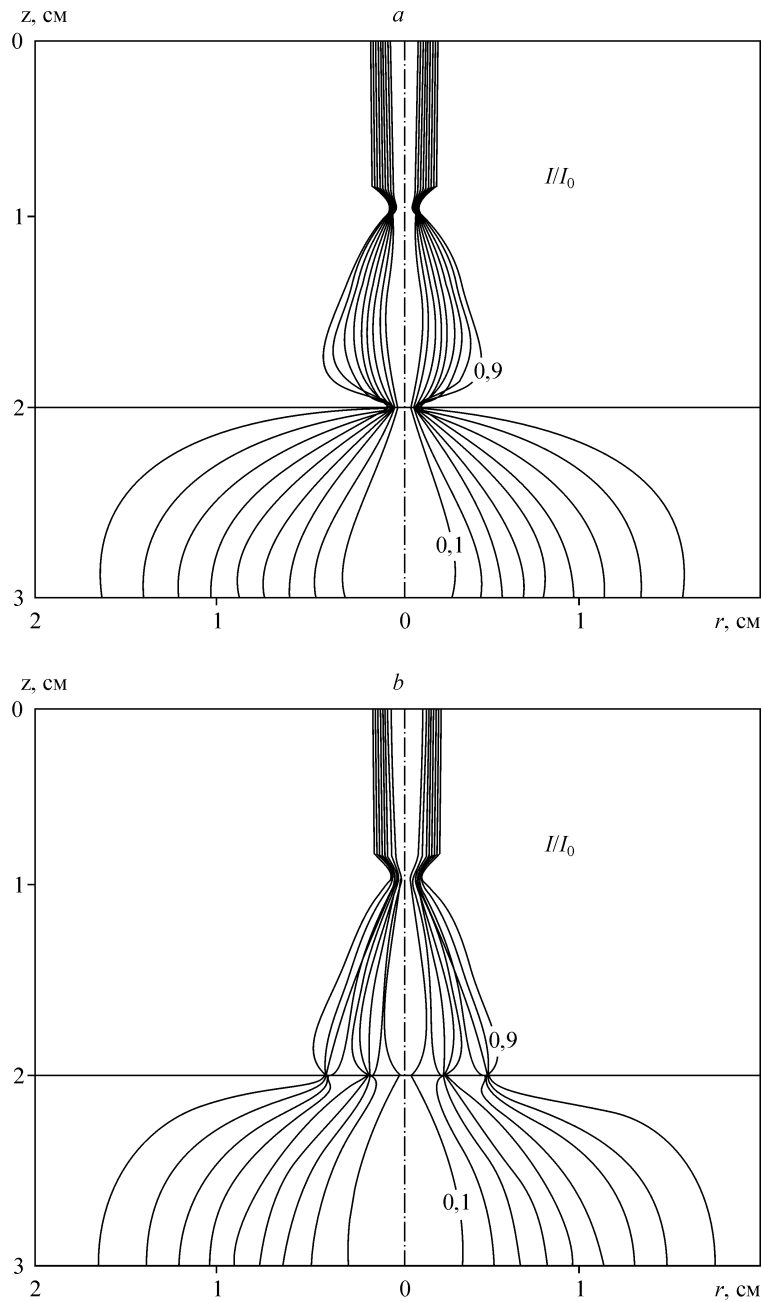


Рис. 2. Линии тока I/I_0 (шаг 0,1) для контрагированной (а) и расщепленной (б) дуг в прианодной области.

$I_0 = 100 \text{ A}, L = 10 \text{ мм}, [6].$

радиуса r_a дуги на аноде. Результаты распределения линий электрического тока I/I_0 качественно согласуются с результатами [5], когда в зависимости от начального приближения в одном случае большая часть тока замыкается на дно каверны (ср. рис. 1, а и 3, а), а во втором — на ее внешние края (ср. рис. 1, б и 3, б).

Эти же результаты для I/I_0 качественно согласуются с результатами [6]. В зависимости от начального приближения для радиуса дуги на аноде наблюдается либо контрагированный (ср. рис. 2, а, 3, а), либо расщепленный столб дуги

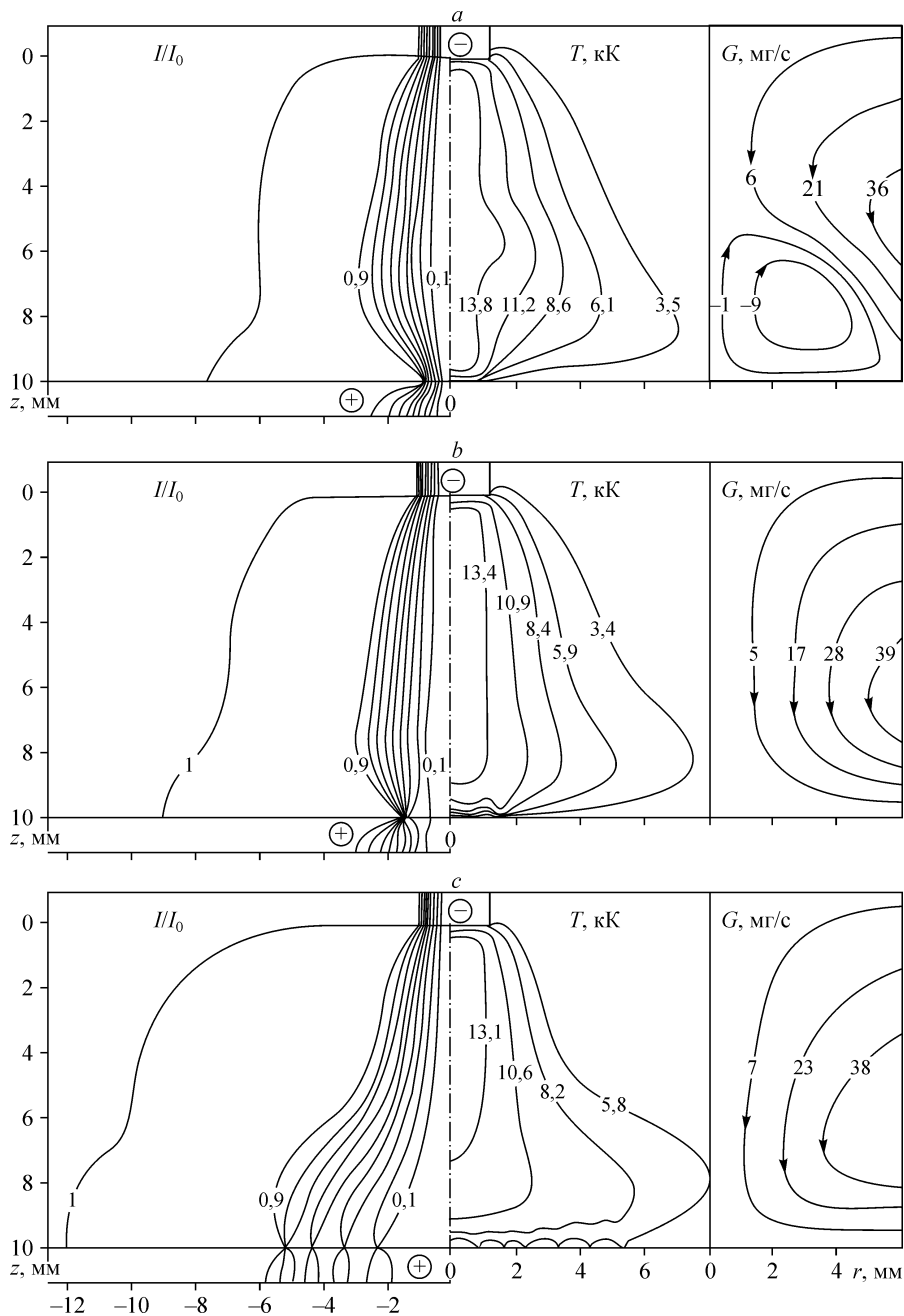


Рис. 3. Линии тока I/I_0 (шаг 0,1), поля температуры дуги T и течения газа G в зависимости от начального приближения, $r_a = 2$ (a), 2,5 (b), 6 (c) мм.

$I_0 = 100$ А, $L = 10$ мм. Задача не регуляризована.

у анода (ср. рис. 2, b, 3, b, c). Изменяя в численных расчетах начальное приближение для r_a (при неизменных внешних параметрах разряда), можно довести количество расщеплений столба дуги, например, до 9 ($r_a = 8$ мм).

Следует пояснить результаты на рис. 3, b, c. Например, из рис. 3, c видно, что температурное поле T вблизи анода расщепляется на шесть осесимметричных коаксиальных каналов, в то время как линии электрического тока I/I_0 — только на четыре, и количество каналов, на которые расщепляется столб дуги, в действительности

остаётся неопределённым. На самом деле указанное различие обусловлено лишь особенностями графического представления результатов расчёта в системе Mathcad и с физикой процессов не связано. Дело в том, что на рис. 3, с поле I/I_0 представлено девятью изолиниями. Если для изображения поля I/I_0 задать в системе Mathcad большее число изолиний, то количество расщеплений у полей I/I_0 и T будет одинаково. Но рисунок с большим количеством изолиний тока будет в этом случае чрезмерно перегружен и неудобен для визуального восприятия.

В данном случае ситуация осложняется ещё и тем фактом, что в экспериментах действительно наблюдается множественная анодная контракция (МАК). Суть явления, по-видимому, до конца не изученного, состоит в следующем (см., например, [11]). В дуговых разрядах в инертных газах при повышенном давлении ($P \geq 1$ атм) и относительно небольших токах (единицы-десятки ампер), столб свободно горящей дуги разбивается вблизи анода на ряд изолированных плазменных каналов, сужающихся к аноду и формирующих у его поверхности яркие плазменные образования. Как показали экспериментальные исследования, существенное (хотя и не определяющее) влияние на образование множественной анодной контракции оказывает состояние поверхности анода. После длительного горения дуги на аноде образуется неоднородный слой нагара с различной электро- и теплопроводностью, присутствуют также микрокапли материала катода. Эти неоднородности «притягивают» к себе плазменные каналы и фиксируют МАК. На чистой поверхности анода МАК нестабильна.

Подчеркнем, что в экспериментах не выявлено формирование регулярной осесимметричной кольцевой структуры столба дуги вблизи анода, как это следует из представленных результатов расчёта, и говорить о согласовании последних с опытом в данном случае преждевременно.

К физике электродуговых процессов, на наш взгляд, подобные результаты расчёта отношения не имеют, и причина их появления заключается в следующем.

Выше отмечалось, что электромагнитная часть задачи решается с использованием функции электрического тока $\chi(r, z)$. Дифференциальное уравнение для вычисления $\chi(r, z)$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sigma r} \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\sigma r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) = 0. \quad (2)$$

Слагаемые данного уравнения и его конечно-разностного аналога содержат в знаменателе коэффициент электропроводности плазмы σ , практически равный нулю при температуре $T < T^*$, где $T^* \approx 4,5$ кК — температура проводимости аргона при атмосферном давлении. Очевидно, что в узловых точках расчётной области с температурой $T < T^*$ и, следовательно, $\sigma \approx 0$, электрический ток отсутствует. По этой причине в данных узловых точках расчётной области уравнение (2) и его разностный аналог не решаются. В этих точках следует полагать значение $\chi(r, z)$ равным таковому на внешней границе расчётной области, т. е. $\chi(r, z) = \text{const} = I_0/2\pi$.

Этой тривиальной процедурой осуществляется регуляризация расчётной области для вычисления функции электрического тока $\chi(r, z)$.

Невыполнение указанной процедуры, т. е. попытка численного расчёта тока в области с температурой $T < T^*$ и $\sigma \approx 0$ приводит к неустойчивости стационарной задачи. При неизменных внешних параметрах разряда, но различных начальных приближениях для r_a наблюдаются качественно различные результаты расчёта: контрагированный либо расщепленный столб дуги вблизи анода.

Возможно проявление и других аномальных эффектов. Так, например, на рис. 3 обращает на себя внимание расположение изолинии электрического тока

$I/I_0 = 1$, которая является границей токопроводящего столба дуги. Заметим, однако, что это практически не влияет на характеристики разряда в центральной области и остается, как правило, “незамеченным”.

Возникают два вопроса: почему в рамках методики “ЛТР + МФО” температура газа вблизи анода столь низкая и почему в сравнительно холодной области вблизи анода все же наблюдается течение электрического тока?

Как известно, модель ЛТР не позволяет описать процесс прохождения электрического тока через холодные слои плазмы, прилегающие к электродам. Вследствие этого в рамках широко используемого традиционного подхода (см., например, [7 – 9]) радиальные распределения температуры плазмы вблизи поверхностей электродов задаются либо из эксперимента, либо из предварительного решения модельных задач. В этом случае в зависимости от внешних параметров разряда характерные значения температуры находятся в диапазоне 10 – 20 кК и остаются неизменными в процессе счета.

Иначе обстоит дело с методикой “ЛТР + МФО”, в которой распределения температуры плазмы вблизи электродов являются расчетными параметрами задачи и определяются в процессе численного решения. В результате решения разностного аналога уравнения энергии видно, что непосредственно вблизи поверхности анода формируется узкий слой сравнительно холодного ($T \approx 4,5$ кК) газа. Низкая температура обусловлена значительным отводом тепла от столба дуги на поверхность анода, температура которого по условиям задачи не превышает температуры плавления меди ($\approx 1,3$ кК). Особенно заметным охлаждение газа вблизи анода становится при сравнительно малых токах и больших значениях начального приближения для радиуса r_a дуги на аноде.

Аналогичные процессы имеют место и вблизи катода, но они более завуалированы, поскольку, во-первых, температура вольфрамового катода ($\approx 3,5$ кК) выше температуры медного анода ($\approx 1,3$ кК), во-вторых, относительно малый фиксированный радиус катодной привязки задается условием задачи. В этом случае расщепления столба не происходит, и вблизи катода всегда будет наблюдаться контрагированный столб дуги.

Для коэффициента электропроводности плазмы σ поясним смысл его практического равенства нулю при температуре $T < T^*$, т. е. использование в расчетах приближенного значения $\sigma \approx 0$, хотя более вполне естественно полагать строгое равенство — $\sigma = 0$. Коэффициент электропроводности присутствует в знаменателе слагаемых уравнения (2). Если в компьютерной программе используется строгое равенство $\sigma = 0$, то при решении конечно-разностного аналога уравнения (2) в узловых точках расчетной области с температурой $T < T^*$ происходит деление на нуль и, как следствие, аварийная остановка программы. Неудобства связаны еще с тем, что это деление может происходить в различных фрагментах и модулях программы: σ присутствует в знаменателе слагаемых не только уравнения (2), но, например, в слагаемом \mathbf{j}^2/σ (джоулев нагрев) уравнения баланса энергии, что дополнительно затрудняет диагностику компьютерной программы. Во избежание подобных неудобств иногда применяется следующий прием. В компьютерной программе вместо $\sigma = 0$ полагается значение в диапазоне, например, $10^{-10} - 10^{-5}$ (Ом·м)⁻¹. Принимая во внимание характерные значения $\sigma \approx 1 - 10^3$ (Ом·м)⁻¹ в проводящих областях электрической дуги, можно смело констатировать, что коэффициент электропроводности практически равен нулю. При разработке и эксплуатации компьютерной программы применение этого приема избавляет от необходимости дополнительного контроля за узловыми точками расчетной области с температурой $T < T^*$ и, следовательно, не усложняет логическую структуру программы.

Вычисления проводятся во всей расчетной области, включая холодные участки, где течение тока, исходя из физических соображений, отсутствует. Именно по этой причине в численных расчетах наблюдается течение тока в сравнительно холодных областях.

Иное дело — использование в компьютерной программе строгого равенства $\sigma = 0$. Такой подход сразу же потребует регуляризации задачи для $\chi(r, z)$, в противном случае уже в начале выполнения программы произойдет аварийная остановка вследствие деления на нуль. На наш взгляд, использование строгого равенства более предпочтительно, нежели приближенного. Это потребует дополнительных усилий при разработке компьютерной программы и несколько усложнит ее логическую структуру, зато избавит от лишних ошибок и дискуссий.

В случае регуляризации результаты расчета стационарной задачи уже не зависят от начального приближения для r_a . Анализ показал, что для различных значений r_a расчетные данные весьма близки между собой и качественно и количественно (рис. 4). Расщепления столба дуги вблизи анода не наблюдается, и говорить о множественной анодной контракции уже не приходится.

Однако при анализе результатов, представленных на рис. 4, снова возникает проблема. Экспериментальные исследования показывают (см., например, [12]), что дуги с металлическими анодами в инертных газах имеют контрагированный столб у анода лишь при относительно малой (менее 30 А) силе тока. Для больших значений силы тока контракция дуги не происходит, и дуга имеет характерную колоколообразную форму с относительно ровной диффузной привязкой на аноде. Но из результатов на рис. 4. видно, что вместо диффузной привязки на аноде наблюдается контрагированный дуговой столб. Подобные результаты расчета противоречат реальным свойствам дугового разряда и, на наш взгляд, не могут быть признаны правильными.

Причина появления этих результатов следующая. Как отмечалось выше, в рамках методики “ЛТР + МФО” вблизи анода формируется узкий слой сравнительно холодного газа. Однако математическая модель все же “пытается” обеспечить выполнение закона сохранения электрического тока ($\text{div } \mathbf{j} = 0$) за счет значительного уменьшения площади привязки на аноде. Действительно, отличительной чертой всех рассмотренных выше распределений является именно малая площадь привязки дуги на аноде. В этом случае температура газа вблизи анода увеличивается до ≈ 7 кК, что обеспечивает, хотя и с трудом, протекание электрического тока.

Представленные результаты лишний раз подтверждают положения [7–9], что модель ЛТР плазмы не обеспечивает условия протекания электрического тока вблизи электродов. Такую возможность предоставляет модель частичного локального термодинамического равновесия (ЧЛТР) [8, 9], учитывающая термическую и ионизационную неравновесность дуговой плазмы. В рамках модели ЧЛТР сравнительно низкая температура T газа тяжелых частиц вблизи анода не является препятствием для протекания тока, так как электропроводность обеспечивается электронным газом с температурой $T_e > 10$ кК. В этом случае методика “ЧЛТР + МФО” [10] не приводит к неожиданным результатам.

Таким образом, в рассмотренных выше случаях численная реализация контрагированного либо расщепленного столба дуги вблизи анода обусловлена, во-первых, отсутствием в рамках методики “ЛТР + МФО” регуляризации расчетной области для функции электрического тока, и, во-вторых, неправомерным объединением модели ЛТР с МФО (даже с регуляризацией задачи). В первом случае наблюдается контракция либо расщепление столба дуги (см. рис. 3), а во втором случае — контракция столба дуги (см. рис. 4).

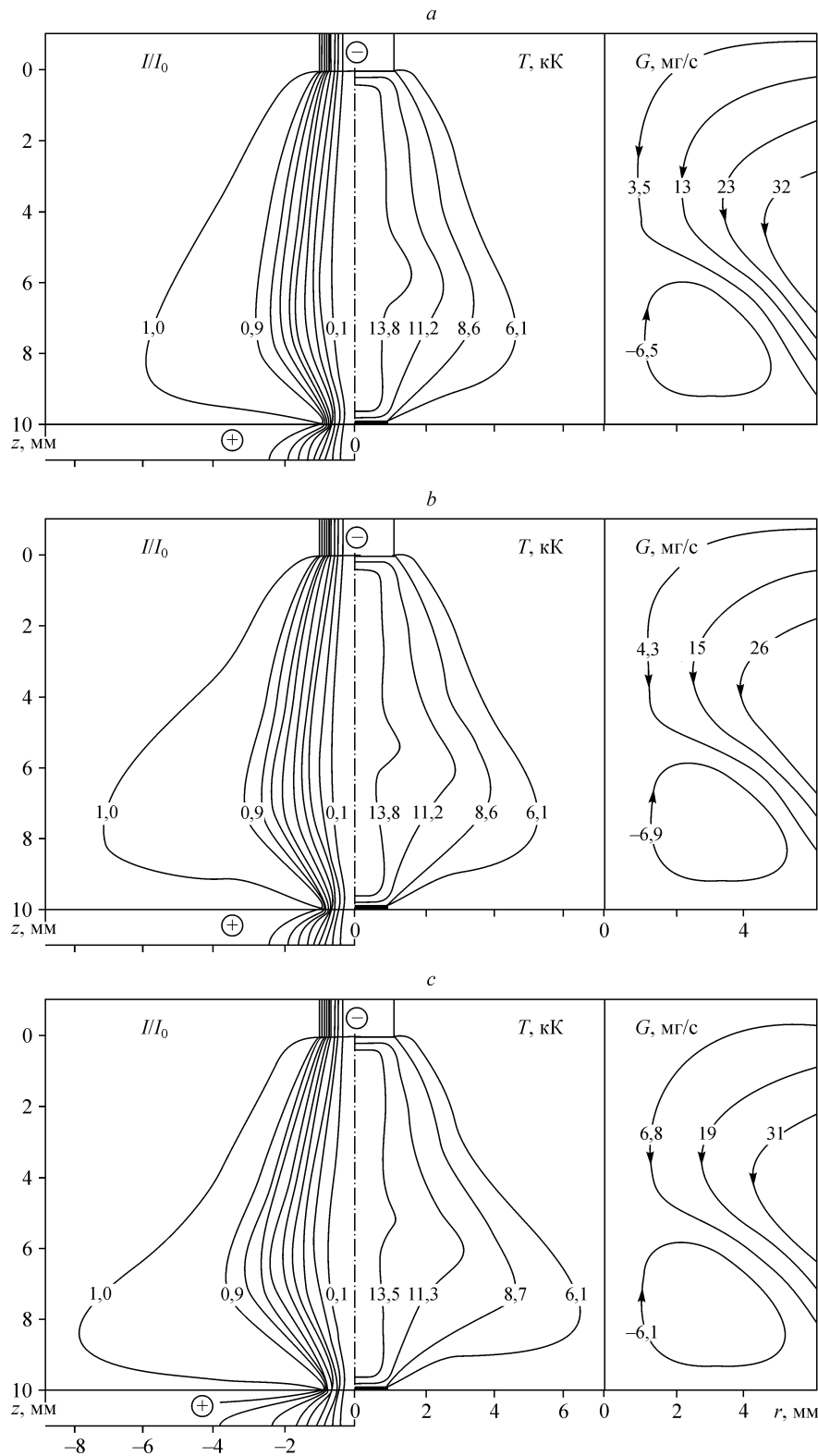


Рис. 4. Линии тока $//I_0$ (шаг 0,1), поля температуры дуги T и течения газа G в зависимости от начального приближения, $r_a = 2$ (а), 2,5 (б), 6 (с) мм.
 $I_0 = 100$ А, $L = 10$ мм. Задача регуляризована.

Также отметим, что для исследуемого класса задач использование метода гармонически среднего коэффициента недостаточно, чтобы вести расчет во всей области, включая столб дуги и электроды. Для подобного расчета необходимо выполнение более жестких условий (см. обзор [1]). Кроме этого, без привлечения дополнительной информации о дуговом разряде невозможно решить задачу в силу ее некорректности. Причины, обуславливающие некорректность подобного класса задач изложены, например, в [4]. Таким образом, для получения физически реальных результатов необходимы соответствующая регуляризация задачи и привлечение дополнительной априорной информации о характеристиках исследуемого объекта (например, экспериментальных данных).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смагулов Ш., Сироченко В.П., Орунханов М.К. Численное исследование течений жидкости в нерегулярных областях. — Алматы, 2001. — 276 с.
2. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980. — 616 с.
3. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — 146 с.
4. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1990. — 232 с.
5. Кулумбаев Э.Б. Развитие теплофизических моделей дугового, индукционного, сверхвысокочастотного и оптического разрядов: Автореф. дис. докт. физ.-мат. наук. / Кыргызско-Российский Университет, Бишкек, 1999. — 42 с.
6. Лелевкин В.М., Семенов В.Ф. Множественная контракция дуги в прианодной области // ТВТ. — 2002. — Т. 40, № 5. — С. 698–701.
7. Математическое моделирование электрической дуги / Под ред. Энгельшта В.С. — Фрунзе: Илим, 1983. — 363 с.
8. Низкотемпературная плазма. Т. 1. Теория столба электрической дуги / Под ред. Энгельшта В.С., Урюкова Б.А. — Новосибирск: Наука, 1990. — 374 с.
9. Низкотемпературная плазма. Т. 17. Электродуговые генераторы термической плазмы / Жуков М.Ф., Засыпкин И.М., Тимошевский А.Н. и др. — Новосибирск: Наука, 1999. — 711 с.
10. Урусов Р.М., Урусова Т.Э. Применение метода фиктивных областей для расчета характеристик электрической дуги // ТВТ. — 2004. — Т. 42, №3. — С. 374–382.
11. Дюжев Г.А., Митрофанов Н.К., Школьник С.М. Анодная область свободно горящей дуги атмосферного давления в благородных газах при малых и средних токах / Материалы конф. “Физика и техника плазмы”. — Минск, 1994. — Т. 1. — С. 143–146.
12. Финкельбург В., Меккер Г. Электрические дуги и термическая плазма. — М.: ИЛ, 1961. — 370 с.

Статья поступила в редакцию 10 декабря 2004 г.