

15. Богатырев Г. П., Гилев В. Г., Зимин В. Д. Пространственно-временные спектры стохастических колебаний в конвективной ячейке. — Письма в ЖЭТФ, 1980, т. 32, № 3.
16. Баранников В. А., Богатырев Г. П., Зимин В. Д., Кетов А. И., Шайдулов В. Г. Закономерности чередования пиков в спектрах стохастических колебаний гидродинамических систем. Препринт Ин-та механики сплошных сред УНЦ АН СССР, 1982.

Поступила 12/II 1985 г.

УДК 532.527 + 532.4

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА В КАНАЛЕ ТОЧЕЧНЫМИ ВИХРЯМИ

П. И. Гешев, Б. С. Ездин  
(Новосибирск)

В последнее время много внимания уделяется прямому численному моделированию турбулентности. Известны работы по изучению трехмерного турбулентного течения в канале при умеренных числах Рейнольдса  $Re$  путем численного решения полных уравнений Навье — Стокса [1]. Основная трудность таких расчетов в том, что в турбулентности для достаточно больших  $Re$  важное значение имеют движения, масштабы которых намного меньше расстояний между узловыми точками в самых мелких используемых на практике расчетных сетках. Несмотря на возросшую мощность современных ЭВМ, ограничение на  $Re$  остается в силе. Существуют и другие подходы к численному моделированию пристенной турбулентности, например метод больших вихрей [2]. Для него характерно разделение масштабов движения на вычисляемую часть (с помощью «отфильтрованных» уравнений Навье — Стокса для крупных масштабов) и замыкаемую мелкомасштабную часть (как правило, берется однопараметрическое замыкающее соотношение), т. е. используется гипотеза независимости мелкомасштабных движений от крупномасштабных.

Согласно принципу подобия турбулентных течений по числу Рейнольдса [3], крупномасштабное движение сплошной среды вдали от стенок слабо зависит от  $Re$ . Поэтому для его описания можно использовать уравнения идеальной завихренной жидкости. В предлагаемой схеме расчета поперечное движение моделируется вязким двумерным движением точечных вихрей, а в направлении среднего движения рассчитывается полное уравнение Навье — Стокса с постоянным градиентом давления.

Точечные двумерные вихри в основном применялись для изучения свободных течений — струй и следов при обтекании различных уступов и профилей. В [4] показано, что в системе точечных вихрей постоянен спектральный поток энергии и потоковый спектр близок к колмогоровскому.

Из теории подобия в случае изотропной турбулентности следует закон « $-5/3$ ». В пристенной турбулентности эта теория приводит к логарифмическим профилям скорости в области постоянства потока к стенке продольной компоненты импульса [5]. Учитывая успешное моделирование изотропной турбулентности [4], можно надеяться на получение интересных результатов в пристенной турбулентности путем моделирования переноса по схеме продольных точечных вихрей. В данной работе показано, что такие расчеты дают качественно согласующиеся с экспериментом результаты; рассчитаны логарифмический профиль скорости и температуры, получены профили рейнольдсовых напряжений и турбулентных потоков тепла, исследованы амплитуды пульсационных величин. Моделирование турбулентности на основе точечных носителей завихренности следует также относить к классу прямых численных моделей. Такой подход обладает неоспоримым преимуществом, потому что он не требует никаких замыкающих предположений.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим турбулентный поток несжимаемой жидкости, текущей в плоском канале высотой  $H$  в направлении оси  $x$ , ось  $y$  направлена по нормали к стенкам, ось  $z$  — перпендикулярно осям  $x$  и  $y$ , т. е. канал образуют две плоскости  $y = 0$  и  $y = H$ . Течение предполагается однородным вдоль канала (по оси  $x$ ) — продольная скорость зависит только от поперечных координат  $y, z$  и времени  $t$ ; средние характеристики его также не зависят от  $z$ , что весьма важно и используется для получения больших статистических выборок. Для моделирования движения в направлениях  $y$  и  $z$  применяется система из  $10^3$ – $10^4$  точечных вихрей. Скорость продольного движения  $u$  и температура  $\Theta$  определяются решением уравнений конвективного переноса импульса и тепла соответственно.

Введем безразмерные переменные (размерные переменные имеют индекс нуль):

$$x = x^0/H, \quad y = y^0/H, \quad z = z^0/H, \\ v = v^0/v^*, \quad p = p^0/(\rho v^{*2}), \quad \Theta = (T - T_w)/\Theta^*,$$

где  $v^* = \sqrt{\tau_w/\rho}$  — динамическая скорость;  $\tau_w$  — касательное напряжение трения на стенке;  $\rho$  — плотность жидкости;  $\Theta^* = q_w/(\rho c_p v^*)$  — динамическая температура;  $q_w$  — тепловой поток от стенки;  $c_p$  — теплоемкость жидкости. В новых переменных система двумерных нестационарных уравнений записывается в виде

$$(1.1) \quad \Delta \psi = -\omega;$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{dp}{dx} + \frac{1}{\text{Re}^*} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right);$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} + w \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{1}{\text{Pe}^*} \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right),$$

где  $\text{Re}^* = H v^*/\nu$ ;  $\text{Pe}^* = H v^*/a$ ;  $\nu$  — вязкость;  $a$  — температуропроводность жидкости. Компоненты скорости, функция тока  $\psi$  и завихренность  $\omega$  связаны соотношениями  $w = \partial \psi / \partial y$ ,  $v = -\partial \psi / \partial z$ ,  $\omega = \text{rot } \mathbf{u}$ . Для дискретных идеальных вихрей вся завихренность предполагается сосредоточенной в отдельных точках:

$$(1.4) \quad \omega = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)).$$

Здесь  $\Gamma_n$  — циркуляция вокруг  $n$ -го вихря;  $\delta$  — дельта-функция;  $\mathbf{x}_n(t)$  — мгновенное положение  $n$ -го вихря.

Граничные условия по переменной  $y$ :  
условие непротекания

$$(1.5) \quad \psi(z, y = 0) = \psi(z, y = H) = 0;$$

условие «прилипания»

$$(1.6) \quad u(z, y = 0) = u(z, y = H) = 0.$$

По температуре используются граничные условия на нижней и верхней стенке первого и второго рода соответственно:

$$(1.7) \quad \Theta(z, y = 0) = 0, \quad \partial \Theta / \partial y(z, y = H) = -\text{Pe}^*.$$

По  $z$  предполагаются периодические граничные условия для  $u$ ,  $\psi$  и  $\Theta$ :

$$(1.8) \quad \psi(z = 0, y) = \psi(z = L, y), \quad u(z = 0, y) = \\ = u(z = L, y), \quad \Theta(z = 0, y) = \Theta(z = L, y).$$

Из постановки задачи ясно, что в предлагаемой модели поперечное движение не зависит от продольного и передачи энергии из среднего движения  $u$  в поперечные пульсации  $w$ ,  $v$  не происходит. Так как в уравнениях для  $w$ ,  $v$  также отсутствуют и диссипативные члены, кинетическая энергия движения в плоскости  $y - z$  сохраняется.

В реальном течении интенсивность поперечного движения всегда зависит от интенсивности продольного, поэтому необходимо согласовать поперечные и продольные движения по их интенсивностям. В нашем случае интенсивность среднего течения определяется параметром  $\text{Re}^*$  (или  $v^*$ ), а интенсивность поперечных движений — величинами  $\Gamma_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Необходимо  $\Gamma_i$  выбрать так, чтобы отношения  $w/v^*$  и  $v/v^*$  были близки к единице, как это наблюдается в эксперименте [5]. Таким образом,  $\Gamma_i$  есть свободный параметр данной модели.

Энергия поперечного движения выражается интегралом

$$(1.9) \quad E = \frac{1}{2} \int \int_S (w^2 + v^2) dy dz.$$

В свою очередь энергия системы вихрей в случае равенства нулю их суммарной интенсивности  $\left(\sum_{i=1}^N \Gamma_i = 0\right)$  и достаточно однородного пространственного распределения определяется формулой [6]

$$(1.10) \quad E = \frac{1}{2} N \Gamma^2.$$

Из (1.9), (1.10) следует, что интенсивность точечных вихрей для выполнения условий  $w \sim v^*$  и  $v \sim v^*$  необходимо выбрать в виде  $\Gamma_i = v^* \sqrt{S/N}$ , где  $S = HL$  — поперечная площадь канала.

Известно, что в задачах прямого численного моделирования турбулентности кроме проблемы разрешимости масштабов существует еще одна серьезная трудность — получение достаточного количества статистической информации для нахождения средних величин [7].

Это связано с тем, что статистическая погрешность при осреднении убывает обратно пропорционально корню из числа независимых значений случайной переменной. Таким образом, для расчетов средних значений интересующих нас величин необходимо использовать очень большие выборки, что означает необходимость многократного интегрирования уравнений на длительных временных интервалах с варьированием начальных условий (усреднение по ансамблю реализаций). Проблема упрощается в случае однородной и стационарной турбулентности, так как тогда можно воспользоваться кроме временного дополнительным осреднением по однородной пространственной переменной (например, по координате  $z$ ). Все средние величины далее определяются формулой

$$\bar{u} = \frac{1}{(t_2 - t_1)L} \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} u dt dz;$$

где  $t_2 - t_1$  и  $L$  — длина временного и пространственного интервалов соответственно.

Осреднение по времени осуществлялось при установившемся течении, т. е. статистически стационарном, а длина интервала выбиралась гораздо больше характерного времени вращения вихрей  $L/v^*$  для получения надежного осреднения.

**2. Метод решения.** Задача о движении точечных вихрей идеальной жидкости решалась методом [8]. По своей сути он является лагранжево-эйлеровским методом частиц в ячейках, однако вместо частиц массы здесь рассматриваются точечные вихри. Решение начиналось с определения сеточной функции  $\omega$  правой части уравнения (1.1). По известному положению вихрей завихренность каждого распределялась между четырьмя ближайшими узлами сетки пропорционально четырем площадям  $A, B, C, D$ , на которые разбивалась сеточная ячейка линиями, проходящими через вихрь (рис. 1). Этот метод имеет второй порядок точности и носит название метода взвешенных площадей [8]. Затем решалось уравнение Пуассона (1.1) и по уже известной функции тока дифференцированием определялось поперечное поле скоростей  $v, w$ . Далее  $v, w$  использовались для решения конвективных уравнений (1.2), (1.3), а также для нахождения нового положения вихрей. В такой последовательности осуществлялось временное интегрирование системы (1.1) — (1.3). Первоначальное положение вихрей задавалось случайным образом. Суммарная завихренность положительных вихрей равнялась завихренности отрицательных. Уравнения (1.1) — (1.3) аппроксимировались разностными схемами второго порядка точности на неравномерной сетке по оси  $y$  со сгущением к стенкам. Сетка вводилась

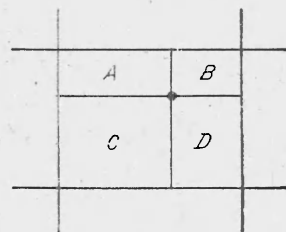


Рис. 1.

в направлении от стенки по закону арифметической прогрессии от 0,1 до 1,6. В область логарифмического слоя попадало не менее 7—8 узлов. Всего исследовалось по  $y$  35 узлов, так что ширина  $H = 30,6$ .

Наиболее эффективными методами решения уравнения Пуассона (1.1) с правой частью (1.4) в канале с граничными условиями (1.5)—(1.8) являются прямые методы [9]. Фурье-преобразование в направлении  $z$  обеспечивает периодичность решения с периодом  $L$  по  $z$  и сводит двумерную задачу к серии одномерных, которые легко решаются с помощью прогонки по  $y$  [9]. Применялось быстрое преобразование Фурье (БПФ) на равномерной по  $z$  сетке из 64 узлов на периоде  $L = 64$ . Для интегрирования уравнений движения вихрей  $\dot{\mathbf{x}}_n = \mathbf{u}_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ) использовалась схема Эйлера второго порядка точности. Количество вихрей в расчетах  $N = 1024$ .

Уравнения (1.2), (1.3) решались неявными методами с применением БПФ по переменной  $z$  и прогонкой по  $y$ . Нелинейные члены аппроксимировались по явной схеме, аналогичной схеме Аракавы [10], обладающей свойством сохранения средних величин завихренности, квадрата вихря и кинетической энергии. Это дает возможность передать структуру течения без искажения (кинетическая энергия и квадрат вихря переносятся в двумерной области от одного узла сетки к другому без фиктивного роста или уменьшения), что важно для интегрирования уравнений переноса на длительном временном интервале. На неравномерной сетке использовалась также обычная центральная конечно-разностная схема.

Проведена методическая работа по выяснению влияния ошибок аппроксимации. На основе метода «пробных» функций [10] исследовалось влияние шага сетки, шага по времени и величины коэффициента перед диффузионным членом на точность расчетов. Для этого применялись различные неравномерные и равномерные по  $y$  сетки. Для контроля точности расчета движения вихрей в плоскости сравнивались решения для двух точечных вихрей, полученные методом Кристиансена, и решения, найденные аналитически с помощью точного метода конформных отображений [11]. Отличия в траекториях вихрей, рассчитанных этими методами, не превышают 3% за период движения. Методическая работа позволила гарантировать точность расчетов для параметров  $Re^*$  и  $Pe^*$ , не превышающих  $10^3$  на сетке  $65 \times 35$ .

Расчеты проводились в два этапа. На первом рассчитывалось движение вихрей и на магнитную ленту ЭВМ записывались последовательные во времени значения функций тока  $\psi(z, y, t)$ , на втором решались эволюционные уравнения конвективного переноса для  $u$  и  $\Theta$ . При этом использовались ранее записанные значения функций тока. Мгновенные значения  $u(y, z, t)$  и  $\Theta(y, z, t)$  снова записывались на магнитную ленту для последующей статистической обработки, при которой сначала вычислялись средние  $\bar{\Theta}$  и  $\bar{u}$ , а затем среднеквадратичные величины  $\sqrt{\overline{u'^2}}$ ,  $\sqrt{\overline{\Theta'^2}}$ ,  $\sqrt{\overline{v'^2}}$  и корреляции  $\overline{u'v'}$  и  $\overline{v'\Theta'}$ . Количество шагов по времени обычно 2000, шаг по времени  $5 \cdot 10^{-2}$ , так что безразмерное время расчета составляло  $10^2$ .

**3. Результаты расчетов.** Приведем наиболее важные результаты моделирования турбулентного переноса. Кривой I (рис. 2) в традиционных полулогарифмических координатах показан профиль скорости для  $Re^* = 300; 500; 800$  (точки I—3), что соответствует расходным числам Рейнольдса 2030; 3615; 5894. Хорошо видно, что с увеличением  $Re^*$  логарифмический участок профиля скорости растягивается. Циркуляция точечных вихрей  $\Gamma_i$ , которая определяет интенсивность поперечного движения, для этого случая выбрана единичной. Логарифмическая прямая средней скорости имеет вид  $u^+ = A \ln y^+ + B$ , где  $A = 1,41$  и  $B = 0,35$ , а  $y^+ = Re^* y / H$ .

Кривая II представляет профиль средней скорости для  $\Gamma_i = 5$ . Видно, что в результате увеличения интенсивности поперечного движения

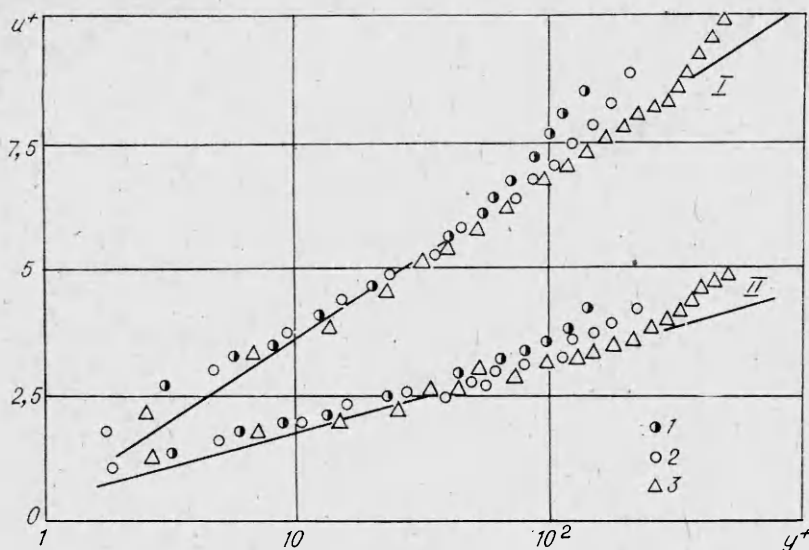


Рис. 2.

продольная скорость падает. При этом  $A = 0,54$  и  $B = 0,4$ . Как следует из рис. 2, рассчитанная средняя скорость проходит значительно ниже, чем известный экспериментальный профиль скорости в канале [5]. Это вызвано, по-видимому, повышенной интенсивностью поперечного движения вблизи стенок канала: из-за отсутствия вязкости оно не демпфируется стенкой (например,  $w$ -компонента на стенке вообще не равна нулю). Аналогично этому повышенная степень турбулентности в течениях вблизи шероховатой поверхности приводит к понижению продольной скорости относительно универсального профиля для гладкой стенки. Из рис. 2 можно также заключить, что повышенная интенсивность поперечного движения приводит как бы к вырождению вязкого подслоя: отсутствует участок линейного поведения по  $y$  вблизи стенки. При больших  $y^+$  в центральной части канала профили скорости отклоняются вверх от логарифмического закона. Так же ведет себя универсальный профиль, полученный в экспериментах [5].

На рис. 3 показаны среднеквадратичные пульсации скоростей и температуры; точки 1 и 4 для  $\Gamma_i = 1$  и 2, 3 для  $\Gamma_i = 5$ . Поведение рассчитанной продольной среднеквадратичной пульсации скорости качественно согласуется с экспериментально определенной [5]. Значение для  $\sqrt{v'^2}$  получается несколько ниже, чем в эксперименте. На рис. 4 приведены рейнольдсовы напряжения  $-u'v'$  (линия — полные касательные напряжения). Профиль температуры представлен на рис. 5 для  $\Gamma_i = 1$  и для  $Re^* = 300; 500; 800$  (точки 1—3), видно, что он также имеет логарифмический участок. Формула для средней температуры  $\Theta^* = A_\Theta \ln y_- + B_\Theta$ , где константы  $A_\Theta = 1,40$  и  $B_\Theta = 3,35$ ;  $y_- = Re^* y / H$ . Турбулентное число Прандтля получается весьма близким к единице  $Pr_\tau = A/A_\Theta = 1,41/1,40$ . На рис. 6 показан турбулентный поток тепла  $-\Theta'v'$ .

Требуемое процессорное время на ЭВМ 1060 на один временной шаг для решения задачи о движении вихрей 2,1 с, для решения уравнения конвективного переноса 1,5 с. Максимальное количество вихрей в расчетах  $10^4$ . Время расчетов при этом значительно возрастало (до 7 с на один шаг). Результаты расчетов здесь не приводятся, но нужно отметить, что получающиеся средние величины более гладкие функции от  $y$ .

Таким образом, в работе не учитывается влияние эффектов вязкости на турбулентный перенос, но основные важнейшие рассчитанные характеристики турбулентного потока качественно согласуются с экспериментальными. Можно заключить, что точечные вихри правильно описывают

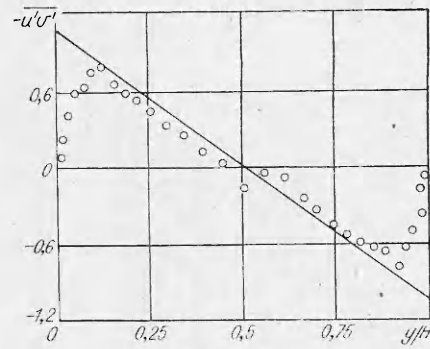
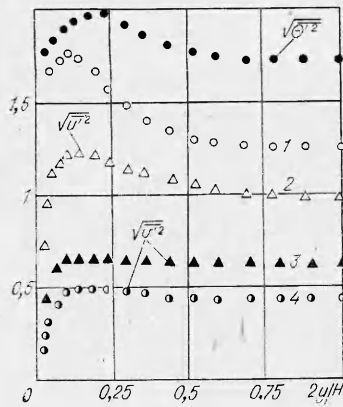


Рис. 3.

Рис. 4.

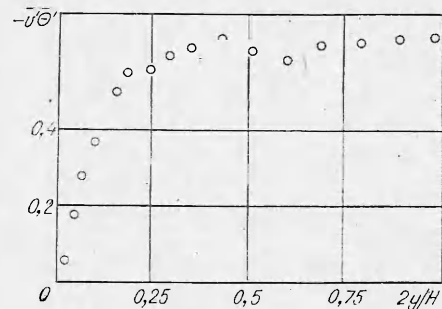
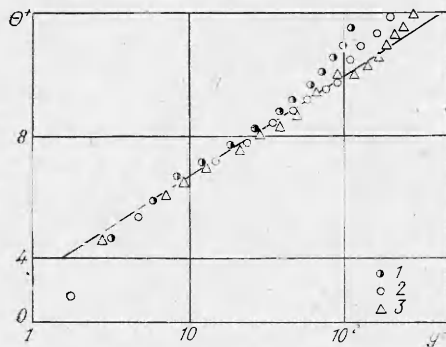


Рис. 5.

Рис. 6.

динамику крупномасштабных энергосодержащих движений, непосредственно не зависящих от вязкости. Это означает, что не только средние, но и другие статистические характеристики, не зависящие от вязкости, в первую очередь моменты второго порядка (интенсивности пульсаций, рейнольдсовы напряжения, турбулентные потоки тепла), описываются качественно верно предложенной моделью.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Orszag S. A., Patera A. T. Calculation of von Karman's constant for turbulent channel flow.— Phys. Rev. Lett., 1981, v. 47, N 12.
2. Leonard A. Turbulent structures in wall-bounded shear flows observed via three-dimensional numerical simulations.— In: Lect. Notes in Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1981, v. 126.
3. Тависенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: ИЛ, 1959.
4. Siggia E. D., Aref I. Point-vortex simulation of the inverse energy cascade in two-dimensional turbulence.— Phys. Fluids, 1981, v. 24, N 1.
5. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965.
6. Pointin Y. B., Lundgren T. S. Statistical mechanics of two-dimensional vortices in a bounded container.— Phys. Fluids, 1976, v. 19, N 10.
7. Шуманн У., Грегцбах Г., Кляйзер Л. Прямые методы численного моделирования турбулентных течений.— В кн.: Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984.
8. Christiansen J. P. Numerical simulation of hydrodynamics by the method of point vortices.— J. Comp. Phys., 1973, v. 13, N 1.
9. Самарский А. Л., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
10. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
11. Гешев П. И., Ездин Б. С. Движение вихревой пары между параллельными стенками.— ПМТФ, 1983, № 5.

Поступила 6/II 1985 г.