

УДК 537.6, 539.3

## ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОВОЙ РЕЛАКСАЦИИ И МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ОБОБЩЕННУЮ МИКРОПОЛЯРНУЮ ТЕРМОУПРУГОСТЬ

М. И. А. Отман, Й. К. Сонг\*

Университет г. Загазиг, 44519 Загазиг, Египет

\* Школа космонавтики Ксианьского университета Джаотонг, 710049 Ксиань, Китай  
E-mails: m\_i\_a\_othman@yahoo.com, yqsong@mail.xjtu.edu.cn

Изучается модель обобщенной микрополярной магнитной термоупругости в теплопроводном идеально проводящем полупространстве в случае, когда вектор напряженности начального магнитного поля параллелен границе полупространства. Такая постановка задачи используется в обобщенных теориях термоупругости Лорда — Шульмана, Грина — Линдсея, а также в динамической моментной теории. С учетом нормальных колебаний на поверхности раздела получены выражения для приращения температуры, смещения и компонент напряжения в модели. С использованием гармонических функций управляющие уравнения приводятся к двум дифференциальным уравнениям четвертого порядка. В результате численного расчета получены значения рассматриваемых величин для микрополярного упругого материала (кристаллического магния). Проведено сравнение этих результатов с результатами, полученными по известным теориям в случае наличия магнитного поля.

Ключевые слова: микрополярная электромагнитная термоупругость, теория Лорда — Шульмана, теория Грина — Линдсея, анализ нормальных колебаний.

DOI: 10.15372/PMTF20160112

**Введение.** Интерес к исследованию микрополярной упругости обусловлен широким использованием композитов, а также усиленных и крупнозернистых материалов. Общая теория линейной микрополярной упругости предложена в работе [1]. В соответствии с этой теорией твердые частицы могут подвергаться макродеформациям и микровращениям. Движение такого типа характеризуется вектором смещения и вектором вращения, в то время как в случае классической упругости движение характеризуется только вектором смещения. Микрополярные твердые тела могут иметь как силовые напряжения, так и моментные. К числу таких материалов относятся металлы, полимеры, композиты, грунты, скалы, бетон. В работах [2, 3] изложена теория микрополярной упругости с учетом тепловых эффектов. Линейная теория микрополярной упругости адекватно описывает поведение материалов с указанными выше свойствами. В случае ультразвуковых волн, т. е. в случае упругих колебаний, характеризуемых высокими частотами и небольшими длинами волн, влияние микроструктуры тела становится существенным, что приводит к развитию волн, не описываемых классической теорией упругости. Теория микрополярной упругости отличается от классической теории наличием независимого вектора микровращения, описывающего движение материала, и тензора моментных напряжений. В ряде работ теория микрополярной упругости изучалась в рамках обобщенной теории термоупругости [4–6].

В [7] сформулирована теория моментной термоупругости, позволяющая устранить парадокс, возникающий при использовании классической теории без учета моментных напряжений и заключающийся в отсутствии влияния упругих деформаций на температуру. В обеих теориях уравнения теплопроводности представляют собой уравнения диффузионного типа, решениями которых являются бесконечные скорости распространения тепловых волн, что противоречит экспериментальным данным. В [8] исследованы пять обобщений моментной теории.

Г. Лорд и Я. Шульман впервые предложили обобщенную теорию термоупругости с одним временем релаксации [9], используя новый закон теплопроводности вместо классического закона Фурье. Этот закон содержит вектор потока тепла и его производную по времени, а также новую константу, имеющую смысл времени релаксации. В этой теории уравнение теплопроводности является уравнением волнового типа, что обеспечивает конечность скоростей распространения тепловых и упругих волн. Остальные управляющие уравнения, а именно уравнение движения и конститутивные соотношения, такие же, причем как для моментных, так и для безмоментных теорий. Следующее обобщение моментной теории известно как обобщенная теория с двумя временами релаксации [10]. Усовершенствованный вариант этой теории предложен А. Грином, К. Линдсеем [11, 12] и независимо И. Сухуби [13]. В данном варианте скорость изменения температуры рассматривается как конститутивная переменная. Как и теория Лорда — Шульмана, теория с двумя временами релаксации предсказывает конечные скорости распространения. Однако при использовании этой теории закон Фурье для теплопроводности не нарушается, если у рассматриваемого тела имеется центр симметрии. В [14] получены уравнения для двумерной модели обобщенной термоупругости с одним и двумя временами релаксации с учетом вращения, наличия магнитного поля и зависимости модуля упругости от начальной температуры.

В данной работе изучается влияние тепловой релаксации и магнитного поля на параметры термоупругости и проводится сравнение трех теорий термоупругости при малых временах.

**1. Формулировка задачи.** Рассматривается изотропная гомогенная линейная теплопроводная идеально проводящая микрополярная термоупругая среда. Тело имеет постоянную температуру  $T_0$ , и на него действуют постоянное магнитное поле, вектор напряженности которого  $\mathbf{H} = (0, H_0, 0)$  параллелен оси  $Y$ , и тепловое поле  $T$ . Среда деформируется под действием тепла и магнитного поля, что приводит к появлению индуцированного магнитного поля  $\mathbf{h} = (0, h, 0)$  и индуцированного электрического поля  $\mathbf{E}$ . Предполагается, что величины  $h$ ,  $E$ ,  $T$ ,  $H$  являются функциями координат  $x$ ,  $z$  и времени  $t$  и не зависят от координаты  $y$ . Таким образом, вектор смещения имеет компоненты  $u_x = u(x, z, t)$ ,  $u_y = 0$ ,  $u_z = w(x, z, t)$ , а вектор микровращения имеет вид  $\boldsymbol{\omega}_i = (0, \omega_2, 0)$ .

Основные управляющие уравнения микрополярной магнитно-термоупругой среды при отсутствии в теле массовых сил, моментов и источников тепла записываются следующим образом:

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ir,r} + F_i, \quad \varepsilon_{irp} \sigma_{rp} + m_{ri,r} = j \rho \ddot{\omega}_i. \quad (1)$$

Здесь  $\rho$  — плотность;  $j$  — момент инерции;  $\varepsilon_{irp}$  — антисимметричный тензор:

$$\varepsilon_{irp} = n_i \cdot (n_r \times n_p),$$

$F_i$  — сила Лоренца:

$$F_i = \mu_0 (\mathbf{J} \times \mathbf{H})_i \quad (2)$$

( $\mathbf{J}$  — вектор плотности тока).

Соотношения для смещений представляются в виде

$$e_{ir} = \frac{1}{2}(u_{i,r} + u_{r,i}), \quad e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (3)$$

Рассмотрим линеаризованные уравнения электромагнитных колебаний, справедливые для медленно движущихся сред:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \dot{\mathbf{D}}; \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}; \quad (5)$$

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{B},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}.$$

Компоненты вектора напряженности магнитного поля в среде имеют вид

$$H_1 = H_3 = 0, \quad H_2 = H_0 + h(x, z, t). \quad (6)$$

С учетом (3)–(5) запишем уравнение (2) в виде

$$F_1 = \mu_0 H_0^2 \frac{\partial e}{\partial x} - \mu_0^2 H_0^2 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad F_2 = 0, \quad (7)$$

$$F_3 = \mu_0 H_0^2 \frac{\partial e}{\partial z} - \mu_0^2 H_0^2 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

где  $\mu_0$  — магнитная проницаемость;  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая постоянная. Из (6), (7) следует

$$h = -H_0 e. \quad (8)$$

Компоненты силовых и моментных напряжений имеют вид

$$\sigma_{ir} = \lambda u_{p,p} \delta_{ir} + \mu(u_{i,r} + u_{r,i}) + k(u_{r,i} - \varepsilon_{irp} \omega_p) - \hat{\gamma} \left(1 + \nu \frac{\partial}{\partial t}\right) T \delta_{ir}, \quad (9)$$

$$m_{ir} = \alpha \omega_{p,p} \delta_{ir} + \beta \omega_{i,r} + \gamma \omega_{r,i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad p = 1, 2, 3, \quad r = 1, 2, 3,$$

где  $\hat{\gamma} = (3\lambda + 2\mu + k)\alpha_T$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $k$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — коэффициенты упругости;  $\alpha_T$  — коэффициент линейного теплового расширения;  $\delta_{ir}$  — дельта-функция Кронекера;  $T_0$  — начальная температура, выбранная таким образом, чтобы выполнялось неравенство  $|T - T_0|/T_0 \ll 1$ ;  $T$  — абсолютная температура.

Подставляя уравнения (7)–(9) в уравнения (1), получаем

$$\rho \ddot{u}_i = (\lambda + \mu) u_{r,ri} + (\mu + k) u_{i,rr} - k \varepsilon_{irp} \omega_{p,r} - \hat{\gamma} \left(1 + \nu \frac{\partial}{\partial t}\right) T_{,i} + F_i; \quad (10)$$

$$\rho j \ddot{\omega}_i = \gamma \omega_{i,rr} + k \varepsilon_{irp} u_{p,r} - 2k \omega_i. \quad (11)$$

Обобщенное уравнение теплопроводности имеет вид

$$K T_{,ii} = \rho C_E \left(n_1 + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \dot{T} + \hat{\gamma} T_0 \left(n_1 + n_0 \tau_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \dot{e}, \quad (12)$$

где  $K$  — теплопроводность;  $C_E$  — удельная теплоемкость при постоянных напряжениях;  $n_0$ ,  $n_1$ ,  $\tau_0$ ,  $\nu$  — константы. В (9)–(11) запятая перед индексом обозначает производную по соответствующей координате, точка вверху — производную по времени; индексы  $i$ ,  $r$  принимают значения  $x$ ,  $z$ .

Из уравнений (10)–(12), являющихся уравнениями обобщенной линейной теории микрополярированной магнитотермоупругости, следуют уравнения моментной теории, а также уравнения теорий Лорда — Шульмана и Грина — Линдсея.

Уравнения моментной теории получаются из (10), (12) при  $n_1 = 1$ ,  $\tau_0 = \nu = 0$ . В этом случае уравнения (10), (12) принимают вид

$$\rho \ddot{u}_i = (\lambda + \mu) u_{r,ri} + (\mu + k) u_{i,rr} - k \varepsilon_{irp} \omega_{p,r} - \hat{\gamma} T_{,i} + \mu_0 (\mathbf{J} \times \mathbf{H})_i; \quad (13)$$

$$K T_{,ii} = \rho C_E \dot{T} + \hat{\gamma} T_0 \dot{e}.$$

Уравнения теории Лорда — Шульмана следуют из (10), (12) при

$$n_1 = n_0 = 1, \quad \nu = 0.$$

В этом случае уравнение (10) совпадает с (13), а уравнение (12) принимает вид

$$KT_{,ii} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (\rho C_E T + \hat{\gamma} T_0 e).$$

Уравнения теории Грина — Линдсея следуют из (10), (12) при

$$n_1 = 1, \quad n_0 = 0, \quad \nu \geq \tau_0 > 0,$$

где  $\nu, \tau_0$  — времена релаксации. В этом случае уравнения (10), (12) имеют вид

$$\rho \ddot{u}_i = (\lambda + \mu) u_{r,ri} + (\mu + k) u_{i,rr} - k \varepsilon_{irp} \omega_{p,r} - \hat{\gamma} \left( 1 + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) T_{,i} + \mu_0 (\mathbf{J} \times \mathbf{H})_i,$$

$$KT_{,ii} = \rho C_E \left( \frac{\partial}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) T + \hat{\gamma} T_0 \frac{\partial e}{\partial t}.$$

Уравнения обобщенной теории термоупругости следуют из (10), (12) при  $k = \omega_i = H_0 = 0$ . В этом случае уравнения (10), (12) сводятся к уравнениям

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + (\mu + k) \nabla^2 u - k \frac{\partial \omega_2}{\partial z} - \hat{\gamma} \left( 1 + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \mu_0 H_0^2 \frac{\partial e}{\partial x} - \mu_0^2 H_0^2 \varepsilon_0 \ddot{u}, \\ \rho \ddot{w} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + (\mu + k) \nabla^2 w + k \frac{\partial \omega_2}{\partial x} - \hat{\gamma} \left( 1 + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial T}{\partial z} + \mu_0 H_0^2 \frac{\partial e}{\partial z} - \mu_0^2 H_0^2 \varepsilon_0 \ddot{w}, \\ \rho j \ddot{\omega}_2 &= \gamma \nabla^2 \omega_2 - 2k \omega_2 + k \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Конститутивные соотношения могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu + k) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} - \hat{\gamma} \left( 1 + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) T, \\ \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu + k) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} - \hat{\gamma} \left( 1 + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) T, \\ \sigma_{xz} &= \mu \frac{\partial u}{\partial z} + (\mu + k) \frac{\partial w}{\partial x} + k \omega_2, \quad \sigma_{zx} = \mu \frac{\partial w}{\partial x} + (\mu + k) \frac{\partial u}{\partial z} - k \omega_2, \\ m_{xy} &= \gamma \frac{\partial \omega_2}{\partial x}, \quad m_{zy} = \gamma \frac{\partial \omega_2}{\partial z}. \end{aligned}$$

Введем следующие безразмерные переменные:

$$x'_i = \frac{\omega^*}{c_0} x_i, \quad u'_i = \frac{\rho c_0 \omega^*}{\hat{\gamma} T_0} u_i, \quad t' = \omega^* t, \quad \tau'_0 = \omega^* \tau_0, \quad \nu' = \omega^* \nu, \quad \theta = \frac{T}{T_0},$$

$$\sigma'_{ir} = \frac{\sigma_{ir}}{\hat{\gamma} T_0}, \quad m'_{ir} = \frac{\omega^*}{c_0 \hat{\gamma} T_0} m_{ir}, \quad \omega'_2 = \frac{\rho c_0^2}{\hat{\gamma} T_0} \omega_2, \quad \omega^* = \frac{\rho C_E c_0^2}{K}, \quad c_0^2 = \frac{\lambda + 2\mu + k}{\rho}, \quad i = 1, 3.$$

Уравнения (12), (13) принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= \frac{\lambda + \mu}{\rho c_0^2} \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\mu + k}{\rho c_0^2} \nabla^2 u - \frac{k}{\rho c_0^2} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} - \left( 1 + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\mu_0 H_0^2}{\rho c_0^2} \frac{\partial e}{\partial x} - \frac{\mu_0^2 H_0^2 \varepsilon_0}{\rho} \ddot{u}, \\ \ddot{w} &= \frac{\lambda + \mu}{\rho c_0^2} \frac{\partial e}{\partial z} + \frac{\mu + k}{\rho c_0^2} \nabla^2 w + \frac{k}{\rho c_0^2} \frac{\partial \omega_2}{\partial x} - \left( 1 + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\mu_0 H_0^2}{\rho c_0^2} \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{\mu_0^2 H_0^2 \varepsilon_0}{\rho} \ddot{w}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \omega_2 - \frac{\rho j c_0^2}{\gamma} \ddot{\omega}_2 - \frac{2k c_0^2}{\gamma \omega^{*2}} \omega_2 + \frac{k c_0^2}{\gamma \omega^{*2}} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0, \\ \nabla^2 \theta &= \left( n_1 + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \dot{\theta} + \frac{\hat{\gamma}^2 T_0}{K \rho \omega^*} \left( n_1 + n_0 \tau_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \dot{e}\end{aligned}$$

(штрихи у безразмерных величин опущены).

Введем потенциалы смещений  $\varphi$  и  $\psi$  с помощью соотношений

$$\begin{aligned}u &= \varphi_{,x} + \psi_{,z}, & w &= \varphi_{,z} - \psi_{,x}, \\ e &= \nabla^2 \varphi, & \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} &= \nabla^2 \psi,\end{aligned}\tag{16}$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Подставляя уравнения (16) в (15), получаем

$$\begin{aligned}\left( \alpha_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \beta_0^2 \nabla^2 \right) \varphi &= - \left( 1 + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) \theta, \\ \left( \alpha_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_1 \nabla^2 \right) \psi &= - a_2 \omega_2, \\ \left( \nabla^2 - a_4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2a_3 \right) \omega_2 + a_3 \nabla^2 \psi &= 0, \\ \nabla^2 \theta - \left( n_1 + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \varepsilon \left( n_1 + n_0 \tau_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0,\end{aligned}\tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 1 + \frac{\mu_0^2 H_0^2 \varepsilon_0}{\rho}, & \beta_0^2 &= 1 + \frac{\mu_0 H_0^2}{\rho c_0^2}, & a_1 &= \frac{\mu + k}{\rho c_0^2}, & a_2 &= \frac{k}{\rho c_0^2}, & a_3 &= \frac{k c_0^2}{\gamma \omega^{*2}}, \\ a_4 &= \frac{\rho j c_0^2}{\gamma}, & \varepsilon &= \frac{\hat{\gamma}^2 T_0}{\rho K \omega^*}.\end{aligned}$$

**2. Анализ нормальных мод.** Решение для рассматриваемых физических величин можно проанализировать, представив их в виде

$$[\theta, \omega_2, \varphi, \psi, \sigma_{ij}, m_{ij}](x, z, t) = [\theta^*, \omega_2^*, \varphi^*, \psi^*, \sigma_{ij}^*, m_{ij}^*](z) \exp(\omega t + i a x),\tag{18}$$

где  $\omega$  — частота;  $a$  — волновое число в направлении  $x$ . С использованием (18) уравнения (17) принимают форму

$$(D^2 - a^2 - b^2 \omega^2) \varphi^* - n_2 \theta^* = 0;\tag{19}$$

$$(D^2 - a^2 - a_5 \omega^2) \psi^* - a_6 \omega_2^* = 0;\tag{20}$$

$$(D^2 - a^2 - 2a_3 - a_4 \omega^2) \omega_2^* + a_3 (D^2 - a^2) \psi^* = 0;\tag{21}$$

$$(D^2 - a^2 - n_3) \theta^* - n_4 (D^2 - a^2) \varphi^* = 0,\tag{22}$$

где

$$\begin{aligned}D &= \frac{d}{dz}, & n_2 &= \frac{1 + \nu \omega}{\beta_0^2}, & n_3 &= \omega(n_1 + \tau_0 \omega), & n_4 &= \varepsilon \omega(n_1 + n_0 \tau_0 \omega), \\ b^2 &= \frac{\alpha_0}{\beta_0^2}, & a_5 &= \frac{\alpha_0}{a_1}, & a_6 &= \frac{a_2}{a_1}.\end{aligned}$$

Подставляя уравнение (22) в (19) и уравнение (21) в (20), получаем

$$(D^4 - AD^2 + B)(\varphi^*, \theta^*) = 0, \quad (D^4 - CD^2 + E)(\psi^*, \omega_2^*) = 0, \quad (23)$$

где

$$A = 2a^2 + n_3 + b^2\omega^2 + n_2n_4; \quad (24)$$

$$B = a^4 + (n_3 + b^2\omega^2 + n_2n_4)a^2 + n_3b^2\omega^2; \quad (25)$$

$$C = 2a^2 + 2a_3 + a_5\omega^2 + a_4\omega^2 - a_3a_6,$$

$$E = a^4 + (a_5\omega^2 + 2a_3 + a_4\omega^2 - a_6a_3)a^2 + a_5\omega^2(2a_3 + a_4\omega^2).$$

Решение уравнений (23), ограниченное при  $z > 0$ , будем искать в виде

$$\varphi^* = \sum_{n=1}^2 A_n e^{-knz}, \quad \theta^* = \sum_{n=1}^2 A_n R_n e^{-knz},$$

$$\psi^* = \sum_{n=1}^2 A_{n+2} e^{-kn+2z}, \quad \omega_2^* = \sum_{n=1}^2 A_{n+2} R_{n+2} e^{-kn+2z},$$

где  $A_n, A_{n+2}$  ( $n = 1, 2$ ) — параметры, зависящие от  $a, \omega$ ; величины  $R_n$  вычисляются по формулам

$$R_{1,2} = \frac{1}{n_2} (k_{1,2}^2 - a^2 - b^2\omega^2), \quad R_{3,4} = \frac{1}{a_6} (k_{3,4}^2 - a^2 - a_5\omega^2),$$

$k_{1,2}^2, k_{3,4}^2$  — корни уравнений (23):

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (A \pm \sqrt{A^2 - 4B}), \quad k_{3,4}^2 = \frac{1}{2} (C \pm \sqrt{C^2 - 4E}).$$

**3. Частные случаи теории микрополярной магнитотермоупругости.** Уравнения (9)–(12) являются уравнениями обобщенной теории микрополярной магнитотермоупругости, из которой следует ряд частных случаев.

Уравнения обобщенной теории микрополярной магнитотермоупругости получаются из (9)–(12) при

$$n_1 = 1, \quad \tau_0 = \nu = 0, \quad n_2 = \beta_0^{-2}, \quad n_3 = \omega, \quad n_4 = \varepsilon\omega.$$

В этом случае выражения (24), (25) принимают вид

$$A = 2a^2 + \omega + \frac{\alpha_0\omega^2}{\beta_0^2} + \frac{\varepsilon\omega}{\beta_0^2}, \quad B = a^4 + \left( \omega + \frac{\alpha_0\omega^2}{\beta_0^2} + \frac{\varepsilon\omega}{\beta_0^2} \right) a^2 + \frac{\alpha_0\omega^3}{\beta_0^2}.$$

Уравнения теории Лорда — Шульмана следуют из (9)–(12) при

$$n_1 = n_0 = 1, \quad \tau_0 > 0, \quad \nu = 0, \quad n_2 = \beta_0^{-2}, \quad n_3 = \omega(1 + \tau_0\omega), \quad n_4 = \varepsilon\omega(1 + \tau_0\omega).$$

В этом случае выражения (24), (25) имеют вид

$$A = 2a^2 + \omega(1 + \tau_0\omega) + \frac{\alpha_0\omega^2}{\beta_0^2} + \frac{\varepsilon\omega(1 + \tau_0\omega)}{\beta_0^2},$$

$$B = a^4 + \left( \omega(1 + \tau_0\omega) + \frac{\alpha_0\omega^2}{\beta_0^2} + \frac{\varepsilon\omega(1 + \tau_0\omega)}{\beta_0^2} \right) a^2 + \frac{\alpha_0\omega^3(1 + \tau_0\omega)}{\beta_0^2}.$$

Уравнения теории Грина — Линдсея следуют из (9)–(12) при

$$n_1 = 1, \quad n_0 = 0, \quad \nu \geq \tau_0 > 0, \quad n_2 = (1 + \nu\omega)/\beta_0^2, \quad n_3 = \omega(1 + \tau_0\omega), \quad n_4 = \varepsilon\omega.$$

В этом случае выражения (24), (25) принимают вид

$$A = 2a^2 + \omega(1 + \tau_0\omega) + \frac{\alpha_0\omega^2}{\beta_0^2} + \frac{\varepsilon\omega(1 + \nu\omega)}{\beta_0^2},$$

$$B = a^4 + \left(\omega(1 + \tau_0\omega) + \frac{\alpha_0\omega^2}{\beta_0^2} + \frac{\varepsilon\omega(1 + \nu\omega)}{\beta_0^2}\right)a^2 + \frac{\alpha_0\omega^3(1 + \tau_0\omega)}{\beta_0^2}.$$

Частные случаи уравнений (9)–(12) могут быть получены также при  $k = \alpha = \beta = \gamma = 0$  или  $H_0 = 0$ .

Чтобы определить параметры  $A_n, A_{n+2}$  ( $n = 1, 2$ ), нужно задать граничные условия:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = m_{zy} = 0, \quad \theta = f(x, t), \quad z = 0.$$

С помощью этих условий амплитуды в выражениях для компонент смещения, силового напряжения, моментного напряжения и температурного поля записываются в виде

$$u^* = \frac{1}{\Delta} (ia\Delta_1 e^{-k_1 z} + ia\Delta_2 e^{-k_2 z} - k_3\Delta_3 e^{-k_3 z} - k_4\Delta_4 e^{-k_4 z}),$$

$$w^* = -\frac{1}{\Delta} (k_1\Delta_1 e^{-k_1 z} + k_2\Delta_2 e^{-k_2 z} + ia\Delta_3 e^{-k_3 z} + ia\Delta_4 e^{-k_4 z}),$$

$$\theta^* = \frac{1}{\Delta} (R_1\Delta_1 e^{-k_1 z} + R_2\Delta_2 e^{-k_2 z}), \quad \omega_2^* = \frac{1}{\Delta} (R_3\Delta_3 e^{-k_3 z} + R_4\Delta_4 e^{-k_4 z}),$$

$$\sigma_{zz}^* = \frac{1}{\Delta} (f_1\Delta_1 e^{-k_1 z} + f_2\Delta_2 e^{-k_2 z} + iab_5k_3\Delta_3 e^{-k_3 z} + iab_5k_4\Delta_4 e^{-k_4 z}),$$

$$\sigma_{zx}^* = \frac{1}{\Delta} (-iab_6k_1\Delta_1 e^{-k_1 z} - iab_6k_2\Delta_2 e^{-k_2 z} + g_3\Delta_3 e^{-k_3 z} + g_4\Delta_4 e^{-k_4 z}),$$

$$\sigma_{xz}^* = \frac{1}{\Delta} (-iab_6k_1\Delta_1 e^{-k_1 z} - iab_6k_2\Delta_2 e^{-k_2 z} + g_1\Delta_3 e^{-k_3 z} + g_2\Delta_4 e^{-k_4 z}),$$

$$\sigma_{xx}^* = \frac{1}{\Delta} (f_3\Delta_1 e^{-k_1 z} + f_4\Delta_2 e^{-k_2 z} - iab_5k_3\Delta_3 e^{-k_3 z} - iab_5k_4\Delta_4 e^{-k_4 z}),$$

$$m_{xy}^* = -\frac{1}{\Delta} (b_4k_3R_3\Delta_3 e^{-k_3 z} + b_4k_4R_4\Delta_4 e^{-k_4 z}), \quad m_{zy}^* = \frac{ia}{\Delta} (b_4R_3\Delta_3 e^{-k_3 z} + b_4R_4\Delta_4 e^{-k_4 z}),$$

где

$$\Delta = a^2b_5^2k_3k_4(k_2R_1 - k_1R_2)(R_3 - R_4) - (f_2R_1 - f_1R_2)(g_4k_3R_3 - g_3k_4R_4),$$

$$\Delta_1 = \theta_0b_4[f_2(g_3k_4R_4 - g_4k_3R_3) - a^2b_5b_6k_2k_3k_4(R_4 - R_3)],$$

$$\Delta_2 = -\theta_0b_4[f_1(g_3k_4R_4 - g_4k_3R_3) - a^2b_5b_6k_1k_3k_4(R_4 - R_3)],$$

$$\Delta_3 = ia\theta_0b_4b_6k_4R_4(f_2k_1 - f_1k_2), \quad \Delta_4 = ia\theta_0b_4b_6k_3R_3(f_1k_2 - f_2k_1),$$

$\theta_0$  — амплитуда функции  $f(x, t) = \theta_0 \exp(\omega t + ia x)$ ,

$$f_n = \begin{cases} k_n^2 - a^2b_1 - (1 + \nu\omega)R_n, & n = 1, 2, \\ b_1k_{n-2}^2 - a^2 - (1 + \nu\omega)R_{n-2}, & n = 3, 4, \end{cases}$$

$$g_n = \begin{cases} b_2k_{n+2}^2 + a^2b_3 + (b_3 - b_2)R_{n+2}, & n = 1, 2, \\ b_3k_n^2 + a^2b_2 - (b_3 - b_2)R_n, & n = 3, 4, \end{cases}$$

$$b_1 = \frac{\lambda}{\rho c_0^2}, \quad b_2 = \frac{\mu}{\rho c_0^2}, \quad b_3 = \frac{\mu + k}{\rho c_0^2}, \quad b_4 = \frac{\gamma\omega^{*2}}{\rho c_0^4}, \quad b_5 = 1 - b_1, \quad b_6 = b_2 + b_3.$$

**4. Результаты численных расчетов.** Для проведения численных расчетов выбраны значения параметров кристалла магния, соответствующие температуре  $T_0 = 297$  К [15]:  $\lambda = 9,4 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\mu = 4 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $k = 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\rho = 1,74 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $j = 0,2 \cdot 10^{-15}$  м<sup>2</sup>,  $C_E = 1,04 \cdot 10^3$  Дж·кг/К,  $\hat{\gamma} = 6,493 \cdot 10^{-8}$  К<sup>-1</sup>,  $\gamma = 0,779 \cdot 10^{-9}$  Н,  $K = 1,7 \cdot 10^2$  Дж/(м·с·К),  $\omega = \omega_0 + i\xi$ ,  $\omega_0 = 2$ ,  $\xi = 1$ . Другие константы задачи имеют следующие значения:  $L = 4$ ,  $\theta_0 = 1$ ,  $b = 1$ ,  $a = 2$ , безразмерные времена релаксации  $\nu = 0,03$ ,  $\tau_0 = 0,02$ . При различных условиях вычислены вещественные части компонент вектора смещения  $u(x, z, t)$ ,  $w(x, z, t)$ , температуры  $\theta(x, z, t)$ , компонент вектора микровращения  $\omega_2(x, z, t)$ , компонент тензоров силового напряжения  $\sigma_{xx}(x, z, t)$ ,  $\sigma_{xz}(x, z, t)$ ,  $\sigma_{zz}(x, z, t)$  и моментного напряжения  $m_{xy}(x, z, t)$ ,  $m_{zy}(x, z, t)$ .

На рис. 1 представлены распределения вещественных частей величин  $u$ ,  $\theta$ ,  $\sigma_{xx}$ ,  $m_{xy}$  вдоль оси  $z$  при  $x = 0$ ,  $t = 0,02$ ,  $\alpha_0 = 1,1$ , полученные с использованием различных теорий. Видно, что распределения температуры различаются незначительно. Различие значений

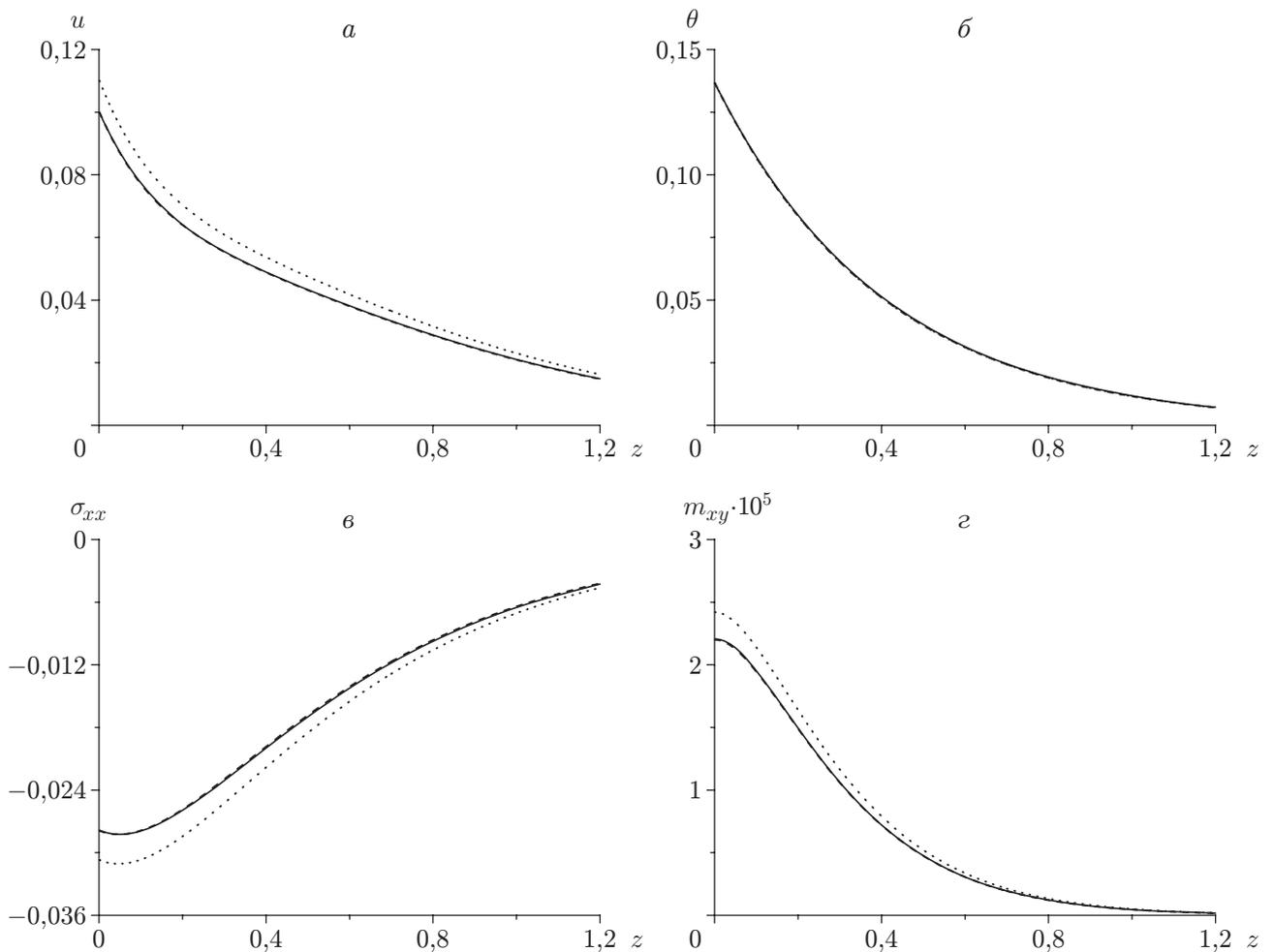


Рис. 1. Распределения смещения  $u$  (а), температуры  $\theta$  (б), силовых напряжений  $\sigma_{xx}$  (в) и моментных напряжений  $m_{xy}$  (г) при  $x = 0$ ,  $\alpha_0 = 1,1$ , полученные с использованием различных теорий: сплошные линии — динамическая моментная теория, штриховые — теория Лорда — Шульмана, пунктирные — теория Грина — Линдсея

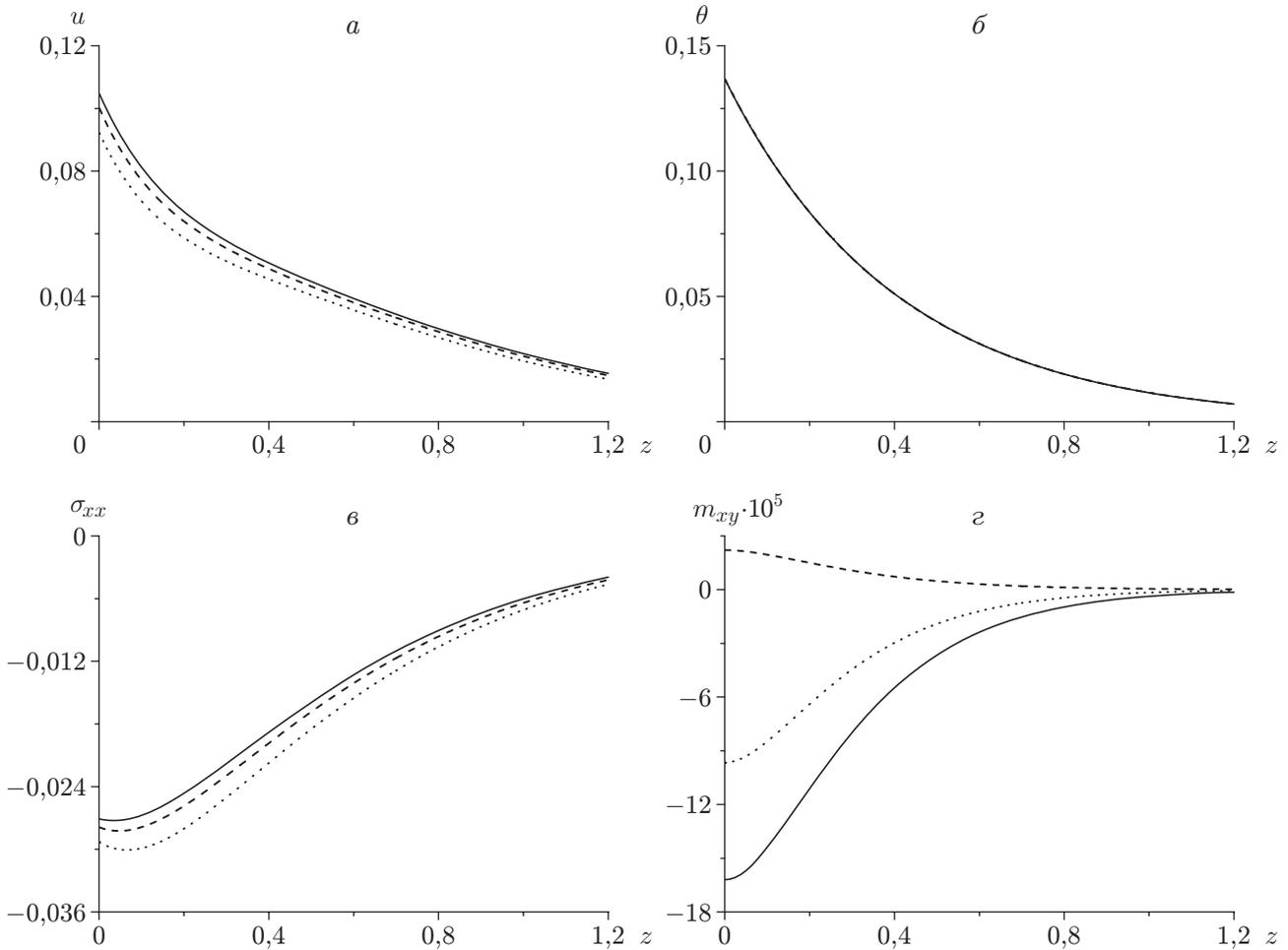


Рис. 2. Распределения смещения  $u$  (а), температуры  $\theta$  (б), силовых напряжений  $\sigma_{xx}$  (в) и моментных напряжений  $m_{xy}$  (г) при  $x = 0$  и различных значениях  $\alpha_0$ : сплошные линии —  $\alpha_0 = 1,0$ , штриховые —  $\alpha_0 = 1,1$ , пунктирные —  $\alpha_0 = 1,3$

смещения, силового и моментного напряжений, вычисленных с помощью динамической моментной теории и теории Лорда — Шульмана, также несущественное. Распределения указанных величин, полученные с использованием динамической моментной теории и теории Грина — Линдсея, различаются значительно. Значения величины  $\sigma_{xx}$ , вычисленные с помощью теории Грина — Линдсея, меньше, а значения величин  $u$  и  $m_{xy}$  больше соответствующих значений, полученных с использованием динамической моментной теории и теории Лорда — Шульмана.

На рис. 2 показано влияние магнитного поля на распределения величин  $u$ ,  $\theta$ ,  $\sigma_{xx}$ ,  $m_{xy}$ , полученные с помощью теории Лорда — Шульмана при  $\alpha_0 = 1,0$  (без учета магнитного поля),  $\alpha_0 = 1,1$  и  $\alpha_0 = 1,3$ . Видно, что магнитное поле оказывает существенное влияние на все величины, за исключением температуры. С увеличением магнитного поля значения величин  $u$  и  $\sigma_{xx}$  уменьшаются.

**Заключение.** Получено фундаментальное решение системы уравнений для обобщенной микрополярной магнитно-термоупругой среды и исследовано влияние тепловой релаксации и магнитного поля на смещения, температуру, силовое и моментное напряжения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Eringen A. C.** Linear theory of micropolar elasticity // J. Math. Mech. 1966. V. 15. P. 909–923.
2. **Tauchert T. R.** Thermal stresses in micropolar elastic solids // Acta Mech. 1971. V. 11. P. 155–169.
3. **Nowacki W., Olszak W.** Micropolar thermoelasticity. Vienna: Springer-Verlag, 1974. (CISM courses and lectures; N 151).
4. **Boschi E., Iesan D.** A generalized theory of linear micropolar thermoelasticity // Meccanica. 1973. V. 7. P. 154–157.
5. **Nowacki W.** The plane problem of micropolar thermoelasticity // Arch. Mech. Stos. 1970. V. 22. P. 3–26.
6. **Kumar R., Deswall S.** Mechanical and thermal source in a micropolar generalized thermoelastic medium // J. Sound Vibrat. 2001. V. 239. P. 467–488.
7. **Biot M. A.** Thermoelasticity and irreversible thermodynamics // J. Appl. Phys. 1956. V. 27. P. 240–253.
8. **Hetnarski R. B., Ignaczak J.** Generalized thermoelasticity // J. Thermal Stresses. 1999. V. 22. P. 451–476.
9. **Lord H., Shulman Y.** A generalized dynamical theory of thermoelasticity // J. Mech. Phys. 1967. V. 15. P. 299–309.
10. **Müller I. M.** The coldness, a universal function in thermoelastic bodies // Arch. Rational Mech. Anal. 1971. V. 41. P. 319–332.
11. **Green A. E., Laws N.** On the entropy production inequality // Arch. Rational Mech. Anal. 1972. V. 45. P. 47–53.
12. **Green A. E., Lindsay K. A.** Thermoelasticity // J. Elasticity. 1972. V. 2. P. 1–7.
13. **Suhubi E. S.** Thermoelastic solids. N. Y.: Acad. Press, 1975. (Continuum physics; V. 2).
14. **Othman M. I. A.** Lord — Shulman theory under the dependence of the modulus of elasticity on the reference temperature in two dimensional generalized thermo-elasticity // J. Thermal Stresses. 2002. V. 25. P. 1027–1045.
15. **Zakaria M.** Effects of Hall current and rotation on magneto-micropolar generalized thermoelasticity due to ramp-type heating // Intern. J. Electromagnetics Appl. 2012. V. 2, N 3. P. 24–32.

*Поступила в редакцию 4/XII 2012 г.,  
в окончательном варианте — 3/VI 2013 г.*

---