

УДК 539.3

ТЕРМОУПРУГИЙ КОНТАКТ БАНДАЖА И ЦИЛИНДРА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ФРИКЦИОННОМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИИ

П. П. Краснюк

Львовский государственный финансово-экономический институт, 79000 Львов

E-mail: askp138@zhovkva.lviv.ua

Выполнена математическая постановка и построено решение квазистатической термоупругой задачи контактного взаимодействия упругого бандажа и вставленного в него круглого полого цилиндра, обжатых нагрузкой, изменяющейся вдоль оси системы, при условии ненагруженного контакта по поверхности кольца или по контуру окружности. Радиальные перемещения контактной поверхности бандажа аппроксимировались перемещениями поверхности длинного круглого полого цилиндра. Учитывалось нестационарное фрикционное тепловыделение, вызванное действием сил трения вследствие вращения бандажа вокруг цилиндра с малой угловой скоростью, зависящей от времени. Задача приведена к системе интегральных уравнений, структура которой определяется видом теплофизических контактных условий. Предложен численный алгоритм решения и исследовано влияние параметров задачи на распределение контактного давления и температуры. На основе анализа результатов сделан вывод о существенном влиянии характера изменения вдоль оси обжимающей нагрузки на распределение контактного давления при описании кинематического условия взаимодействия тел согласно теории Герца.

Ключевые слова: контактное взаимодействие, бандаж, цилиндр, фрикционное тепловыделение, нестационарная температура, теория Герца.

Введение. Исследования контактного взаимодействия тел цилиндрической формы актуальны как в теоретическом, так и в прикладном аспекте, поскольку полый цилиндр является наиболее распространенной деталью в машиностроении. Контактные задачи для цилиндрических тел рассматриваются при расчетах подшипников качения, валов прокатных станов, тормозных устройств, катков мостовых опор и др.

В частности, посадка с натяжением жесткой втулки на упругий цилиндр рассмотрена в работе [1]. Поставленная задача была приведена к интегральному уравнению Фредгольма первого рода с ядром, содержащим логарифмическую особенность. Взаимодействие жесткой вкладки с поверхностью шахты в упругом полупространстве, а также контакт упругого бандажа с упругим цилиндром исследованы в монографии [2].

Осесимметричная контактная задача обжатия длинного круглого цилиндра насаженным с натяжением упругим кольцом рассмотрена в [3]. Получена формула, определяющая контактное давление в зависимости от величины натяжения.

Результаты исследования контакта с зазором цилиндра и обоймы приведены в монографии [4], внешний контакт пары вращающихся круговых цилиндров с учетом тепловыделения от действия сил трения рассмотрен в [5].

В работе [6] исследована упругая, а в [7] — термоупругая при стационарном тепловыделении задача обжатия длинного цилиндра упругим бандажом с внутренним радиусом $a_0 + \varepsilon(z)$, обеспечивающего начальный ненагруженный контакт тел по поверхности кольца или по контуру окружности. Так как рассматривалось взаимодействие тел несогласо-

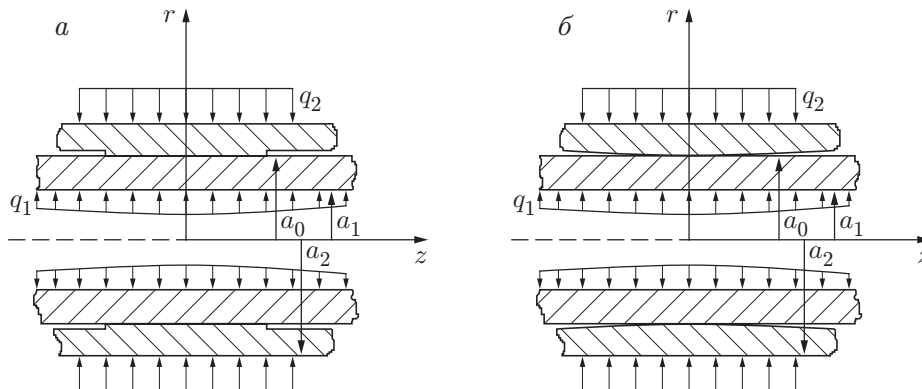


Рис. 1. Схема контактного взаимодействия упругого биндажа и цилиндра:
 а — контакт по поверхности кольца (постоянная область контакта); б — по контуру окружности (изменяемая граница взаимодействия)

ванной формы, то предполагалась возможность аппроксимации радиальных перемещений контактной поверхности биндажа перемещениями поверхности длинного круглого цилиндра. В настоящем исследовании для рассматриваемой трибосистемы предложена постановка и построено решение квазистатической контактной задачи с учетом нестационарного фрикционного тепловыделения.

Математическая постановка задачи и построение решения. Рассмотрим трибосистему, составленную из цилиндра с внутренним радиусом a_1 и внешним радиусом a_0 , вставленного в длинный упругий биндаж с внутренним радиусом $a_0 + \varepsilon(z)$ и внешним — a_2 , на поверхностях $r = a_1$ и $r = a_2$ которой задаются радиальные напряжения q_1 и q_2 , зависящие от осевой координаты и времени. Отнесем это трибосопряжение к цилиндрической системе координат, выбрав некоторое сечение в качестве нулевого и направив ось z вдоль оси цилиндра, и предположим, не уменьшая общности построений, что нагрузка определена симметричной относительно сечения $z = 0$ функцией.

Функция $\varepsilon(z)$, определяющая зазор между телами, положительная и существенно меньше a_0 для всех значений $|z| < \infty$. Дополнительно положим, что $\varepsilon(0) = \varepsilon'(0) = 0$. Тогда, в зависимости от выбора функции зазора, можно получить задачу с фиксированным участком контакта $2c_0$ ($\varepsilon(z) = \varepsilon_0(1 - S(c_0 - |z|))$), где $S(z)$ — функция Хевисайда [8]; рис. 1, а) или с участком неизвестной длины $2c$ (рис. 1, б). Во втором случае функцию можно выбрать в виде $\varepsilon(z) = \varepsilon_0(1 - \exp(-\delta z^2))$, где параметры ε_0 и δ — малые величины.

Предположим, что биндаж неподвижен, а цилиндр вращается с малой угловой скоростью ω , зависящей от времени. За счет действия сил трения, возникающих на контактирующих поверхностях и подчиненных закону Амонтона ($\tau_{r\theta} = f\sigma_r$), в области взаимодействия происходит тепловыделение, тепловой контакт тел неидеален, а между неконтактирующими поверхностями биндажа, цилиндра и окружающей среды нулевой температуры предполагаем теплообмен по закону Ньютона. Пренебрегая динамическими эффектами, которые могут возникнуть при действии нагрузки, исследуем поведение этой трибосистемы в квазистатической постановке.

В соответствии с теорией Герца [2, 9] предполагаем, что радиальные перемещения поверхности $r = a_0$ биндажа от силовых и тепловых факторов с достаточной точностью можно аппроксимировать радиальными перемещениями поверхности $r = a_0$ упругого цилиндра. Тогда при фиксированном участке контакта кинематическое условие взаимодействия цилиндра и биндажа записывается в виде

$$u_r^{(1)}(a_0, z, \tau) = u_r^{(2)}(a_0, z, \tau), \quad |z| < c_0,$$

а когда граница участка взаимодействия неизвестна, — в виде

$$u_r^{(1)}(a_0, z, \tau) = u_r^{(2)}(a_0, z, \tau) + \varepsilon(z), \quad |z| \leq c. \quad (1)$$

Кроме того, предположив малость участка контакта по координате z , можно разложить функцию зазора в ряд Тейлора и, учитывая парность функции $\varepsilon(z)$, а также отбросив члены до порядка $2(n-1)$ включительно, положить, что в формуле (1) $\varepsilon(z) = Az^{2n}$, где $A = \varepsilon^{(2n)}(0)/(2n)!$. Параметр n определяет плотность контакта [9].

Предположим, что поведение нагрузки на бесконечности таково, что допускает возможность использования при построении решения задачи интегрального преобразования Фурье. Поскольку нагрузка не зависит от угловой координаты θ , для определения температурных полей, тепловых потоков, термоупругих напряжений и перемещений эта задача рассматривается как осесимметричная. При сделанных предположениях она приводится к интегрированию системы, включающей дифференциальные уравнения теплопроводности

$$\partial_r^2 T_j + r^{-1} \partial_r T_j + \partial_z^2 T_j = k_j^{-1} \partial_\tau T_j; \quad (2)$$

равновесия

$$\partial_r \sigma_r^{(j)} + r^{-1}(\sigma_r^{(j)} - \sigma_\theta^{(j)}) + \partial_z \tau_{rz}^{(j)} = 0, \quad \partial_r \tau_{rz}^{(j)} + r^{-1} \tau_{rz}^{(j)} + \partial_z \sigma_z^{(j)} = 0;$$

совместности деформаций

$$\partial_r \varepsilon_\theta^{(j)} + r^{-1}(\varepsilon_\theta^{(j)} - \varepsilon_r^{(j)}) = 0, \quad r \partial_z^2 \varepsilon_\theta^{(j)} + \partial_r \varepsilon_z^{(j)} = \partial_z \gamma_{rz}^{(j)}$$

и соотношения закона Гука

$$\begin{aligned} E_j \varepsilon_r^{(j)} &= \sigma_r^{(j)} - \nu_j(\sigma_\theta^{(j)} + \sigma_z^{(j)}) + E_j \alpha_j T_j, & E_j \varepsilon_\theta^{(j)} &= \sigma_\theta^{(j)} - \nu_j(\sigma_r^{(j)} + \sigma_z^{(j)}) + E_j \alpha_j T_j, \\ E_j \varepsilon_z^{(j)} &= \sigma_z^{(j)} - \nu_j(\sigma_r^{(j)} + \sigma_\theta^{(j)}) + E_j \alpha_j T_j, & E_j \gamma_{rz}^{(j)} &= 2(1 + \nu_j) \tau_{rz}^{(j)} \quad (j = 1, 2) \end{aligned}$$

при начальных

$$T_j(r, z, 0) = 0, \quad (3)$$

граничных

$$r = a_1: \quad \partial_r T_1 = \gamma_1 T_1, \quad \sigma_r^{(1)} = -q_1(z, \tau), \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0; \quad (4)$$

$$r = a_2: \quad \partial_r T_2 = -\gamma_2 T_2, \quad \sigma_r^{(2)} = -q_2(z, \tau), \quad \tau_{rz}^{(2)} = 0 \quad (5)$$

и контактных условиях

$$r = a_0, \quad |z| \leq c(\tau): \quad \lambda_1 \partial_r T_1 - \lambda_2 \partial_r T_2 = f\omega(\tau) a_0 p(z, \tau); \quad (6)$$

$$\lambda_1 \partial_r T_1 + \lambda_2 \partial_r T_2 + h(T_1 - T_2) = 0; \quad (7)$$

$$\sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)} = -p(z, \tau), \quad \tau_{rz}^{(j)} = 0, \quad u_r^{(1)} = u_r^{(2)} + Az^{2n}; \quad (8)$$

$$r = a_0, \quad |z| > c(\tau): \quad \partial_r T_j = \mp \gamma_{0,j} T_j, \quad \sigma_r^{(j)} = 0, \quad \tau_{rz}^{(j)} = 0.$$

Здесь и в дальнейшем r, z — радиальная и осевая координаты; τ — время; $p(z, \tau)$ — контактное давление; $q_j(z, \tau)$ — внешняя нагрузка на неконтактирующих поверхностях трибосистемы; $\omega(\tau)$ — относительная угловая скорость вращения; T_j — температура; $\sigma_r^{(j)}, \sigma_\theta^{(j)}, \sigma_z^{(j)}$ — радиальное, тангенциальное и осевое нормальные напряжения; $\tau_{rz}^{(j)}$ — касательное напряжение; $\varepsilon_r^{(j)}, \varepsilon_\theta^{(j)}, \varepsilon_z^{(j)}$ — радиальная, тангенциальная и осевая линейные деформации; $\gamma_{rz}^{(j)}$ — деформация сдвига; $u_r^{(j)}$ — радиальное перемещение; E_j — модуль

Юнга; ν_j , λ_j , k_j , α_j — соответственно коэффициенты Пуассона, теплопроводности, температуропроводности и линейного теплового расширения; $\gamma_j = \bar{\alpha}_j/\lambda_j$; $\gamma_{j,0} = \bar{\alpha}_{j,0}/\lambda_j$; $\bar{\alpha}_j$ и $\bar{\alpha}_{j,0}$ — коэффициенты теплообмена; f — коэффициент трения; h — термическая проводимость поверхности участка контакта. Значение $j = 1$ и верхний знак в сочетании “ \pm ”, “ \mp ” соответствуют цилиндру, а значение $j = 2$ и нижний знак — упругому бандажу.

Неизвестную полуширину участка контакта $c(\tau)$ найдем из условия $p(\pm c(\tau), \tau) = 0$, справедливого при $\varepsilon(z) = Az^{2n}$ или при таких механических и теплофизических параметрах трибосистемы, когда контакт имеет место на участке, меньшем начального $c(\tau) = c_0 = \text{const}$ ($\varepsilon(z) = 0$).

Поставленную задачу приведем к системе интегральных уравнений относительно контактного давления $p(z, \tau)$ и двух функций $f_j(z, \tau)$ ($j = 1, 2$)

$$f_j(z, \tau) = (\pm \partial_r T_j(a_0, z, \tau) + \gamma_{0,j} T_j(a_0, z, \tau)) S(c(\tau) - |z|).$$

Для этого температуру цилиндров выразим через эти функции, построив решение уравнения теплопроводности (2) при начальном условии (3) и соответствующих соотношениях в граничных условиях (4), (5) с использованием уравнения

$$\partial_r T_j(a_0, z, \tau) = \pm (f_j(z, \tau) - \gamma_{0,j} T_j(a_0, z, \tau)).$$

Так как симметрия нагрузки обеспечивает четность функций решения задачи относительно сечения $z = 0$, то, используя при построении решения задачи теплопроводности интегральное косинус-преобразование Фурье по координате z

$$\bar{T}_j(r, \xi, \tau) = \int_0^\infty T_j(r, z, \tau) \cos(z\xi) dz$$

и теорему Дюамеля по времени τ [10], получим для трансформанты Фурье температуры цилиндров $\bar{T}_j(r, \xi, \tau)$ интегральное изображение

$$\bar{T}_j(r, \xi, \tau) = \partial_\tau \int_0^\tau \bar{f}_j(\xi, \eta) \bar{\Phi}_j(r, \xi, \tau - \eta) d\eta, \quad (9)$$

где $\bar{f}_j(\xi, \tau)$ — трансформанта Фурье функции $f_j(z, \tau)$. Ядро интегрального изображения определяется из решения вспомогательной задачи

$$\begin{aligned} \partial_r^2 \bar{\Phi}_j + r^{-1} \partial_r \bar{\Phi}_j - \xi^2 \bar{\Phi}_j &= k_j^{-1} \partial_\tau \bar{\Phi}_j, & \bar{\Phi}_j(r, \xi, 0) &= 0, \\ \partial_r \bar{\Phi}_j(a_j, \xi, \tau) &= \pm \gamma_j \bar{\Phi}_j(a_j, \xi, \tau), & \partial_r \bar{\Phi}_j(a_0, \xi, \tau) &= \pm (1 - \gamma_{0,j} \bar{\Phi}_j(a_0, \xi, \tau)). \end{aligned}$$

Не останавливаясь детально на построении решения этой задачи (соответствующие выкладки повторяют приведенные в работе [11]), запишем только окончательный результат:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_j(r, \xi, \tau) &= \bar{\Phi}_{j,st}(r, \xi) + \bar{\Phi}_{j,0}(r, \xi, \tau) = \\ &= \pm \frac{I_0(\xi r)(\xi K_1(\xi a_j) \pm \gamma_j K_0(\xi a_j)) +}{(\xi I_1(\xi a_0) \pm \gamma_{0,j} I_0(\xi a_0))(\xi K_1(\xi a_j) \pm \gamma_j K_0(\xi a_j)) -} \\ &\quad \frac{+ K_0(\xi r)(\xi I_1(\xi a_j) \mp \gamma_j I_0(\xi a_j))}{-(\xi K_1(\xi a_0) \mp \gamma_{0,j} K_0(\xi a_0))(\xi I_1(\xi a_j) \mp \gamma_j I_0(\xi a_j))} \mp \\ &\mp 2a_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{U_0(\mu_{j,m} r, \mu_{j,m} a_0) U_0(\mu_{j,m} a_0, \mu_{j,m} a_0)}{(\mu_{j,m}^2 + \xi^2) N_{j,m}^2} \exp(-k_j(\mu_{j,m}^2 + \xi^2)\tau), \quad (10) \end{aligned}$$

где $\mu_{j,m}$ ($m = 1, 2, \dots$) — положительные корни трансцендентного уравнения задачи Штурма — Лиувилля

$$\mu_j U_1(\mu_j a_j, \mu_j a_0) \pm \gamma_j U_0(\mu_j a_j, \mu_j a_0) = 0 \quad (\mu_j \neq 0);$$

$$N_j^2 = a_0^2(1 + \gamma_{0,j}^2 \mu_j^{-2}) U_0^2(\mu_j a_0, \mu_j a_0) - a_j^2(1 + \gamma_j^2 \mu_j^{-2}) U_0^2(\mu_j a_j, \mu_j a_0);$$

$$U_0(\mu_j r, \mu_j a_0) = J_0(\mu_j r)(\mu_j Y_1(\mu_j a_0) \mp \gamma_{0,j} Y_0(\mu_j a_0)) - Y_0(\mu_j r)(\mu_j J_1(\mu_j a_0) \mp \gamma_{0,j} J_0(\mu_j a_0));$$

$$U_1(\mu_j r, \mu_j a_0) = J_1(\mu_j r)(\mu_j Y_1(\mu_j a_0) \mp \gamma_{0,j} Y_0(\mu_j a_0)) - Y_1(\mu_j r)(\mu_j J_1(\mu_j a_0) \mp \gamma_{0,j} J_0(\mu_j a_0));$$

$J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя первого и второго рода порядка ν ; $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка ν [12].

Обратив интеграл Фурье [10]

$$T_j(r, z, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \bar{T}_j(r, \xi, \tau) \cos(\xi z) d\xi,$$

запишем интегральное изображение для температуры тел

$$T_j(r, z, \tau) = \frac{1}{\pi} \partial_\tau \int_0^\tau \int_{-c(\eta)}^{c(\eta)} f_j(t, \eta) \Phi_j(r, t - z, \tau - \eta) dt d\eta, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_j(r, z, \tau) &= \int_0^\infty \bar{\Phi}_j(r, \xi, \tau) \cos(\xi z) d\xi = \int_0^\infty \bar{\Phi}_{j,st}(r, \xi) \cos(\xi z) d\xi \mp \\ &\mp a_0 \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^\infty \frac{U_0(\mu_{j,m} r, \mu_{j,m} a_0) U_0(\mu_{j,m} a_0, \mu_{j,m} a_0)}{\mu_{j,m} N_{j,m}^2} \times \\ &\times \sum_{k=1}^2 \exp((-1)^k \mu_{j,m} z) \operatorname{erfc} \left(\mu_{j,m} \sqrt{k_j \tau} + (-1)^k \frac{z}{2\sqrt{k_j \tau}} \right) \end{aligned}$$

($\operatorname{erfc}(z)$ — функция ошибок [8]).

Используя выражения (9) и (10) для трансформанты температуры, построим, аналогично (2.15) из [11], соотношения для трансформант радиальных перемещений на поверхности $r = a_0$:

$$\begin{aligned} \bar{u}_r^{(j)}(a_0, \xi, \tau) &= (1 - \nu_j^2) E_j^{-1}(a_0 \bar{p}(\xi, \tau) \bar{\Delta}_1(a_j, \xi) - a_j \bar{q}_j(\xi, \tau) \bar{\Delta}_2(a_j, \xi)) + \\ &+ \alpha_j \partial_\tau \int_0^\tau \bar{f}_j(\xi, \eta) \bar{H}_j(\xi, \tau - \eta) d\eta, \end{aligned}$$

где

$$\bar{H}_j(\xi, \tau) = \bar{H}_{j,st}(\xi) + \bar{H}_{j,0}(\xi, \tau);$$

$$\bar{H}_{j,st}(\xi) = (1 - \nu_j^2) \xi^{-2} [\bar{\Delta}_2(a_j, \xi) \partial_r \bar{\Phi}_{j,st}(a_j, \xi) - (\bar{\Delta}_1(a_j, \xi) - (1 - \nu_j)^{-1}) \partial_r \bar{\Phi}_{j,st}(a_0, \xi)];$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_{j,0}(\xi, \tau) = & \pm 2(1 + \nu_j)a_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{U_0(\mu_{j,m}a_0, \mu_{j,m}a_0)}{N_{j,m}^2(\xi^2 + \mu_{j,m}^2)^2} \times \\ & \times \left[\xi^2(\bar{\Delta}_1(a_j, \xi)a_0U_0(\mu_{j,m}a_0, \mu_{j,m}a_0) - \bar{\Delta}_2(a_j, \xi)a_jU_0(\mu_{j,m}a_j, \mu_{j,m}a_0)) + \right. \\ & \left. + \mu_{j,m}(\bar{\Delta}_3(a_j, \xi)U_1(\mu_{j,m}a_j, \mu_{j,m}a_0) + \bar{\Delta}_4(a_j, \xi)U_1(\mu_{j,m}a_0, \mu_{j,m}a_0)) \right] \exp(-k_j(\xi^2 + \mu_{j,m}^2)\tau); \end{aligned}$$

$$\bar{q}_j(\xi, \tau) = \int_0^{\infty} q_j(z, \tau) \cos(\xi z) dz; \quad \bar{\Delta}_j(a_j, \xi) = \tilde{\Delta}_j(a_j, \xi)\tilde{\Delta}_0^{-1}(a_j, \xi);$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_0(a_j, \xi) = & 4(1 - \nu_j) + a_j^2\xi^2 + a_0^2\xi^2 + (2(1 - \nu_j) + a_j^2\xi^2)(2(1 - \nu_j) + a_0^2\xi^2) \times \\ & \times [I_1(a_j\xi)K_1(a_0\xi) - I_1(a_0\xi)K_1(a_j\xi)]^2 - a_j^2\xi^2(2(1 - \nu_j) + a_0^2\xi^2) \times \\ & \times [I_0(a_j\xi)K_1(a_0\xi) + I_1(a_0\xi)K_0(a_j\xi)]^2 - a_0^2\xi^2(2(1 - \nu_j) + a_j^2\xi^2) \times \\ & \times [I_1(a_j\xi)K_0(a_0\xi) + I_0(a_0\xi)K_1(a_j\xi)]^2 + a_j^2a_0^2\xi^4[I_0(a_j\xi)K_0(a_0\xi) - I_0(a_0\xi)K_0(a_j\xi)]^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_1(a_j, \xi) = & 2[1 + (2(1 - \nu_j) + a_j^2\xi^2)[I_1(a_j\xi)K_1(a_0\xi) - I_1(a_0\xi)K_1(a_j\xi)]^2 - \\ & - a_j^2\xi^2[I_0(a_j\xi)K_1(a_0\xi) + I_1(a_0\xi)K_0(a_j\xi)]^2]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_2(a_j, \xi) = & 2a_0\xi[I_1(a_j\xi)K_0(a_0\xi) + I_0(a_0\xi)K_1(a_j\xi)] - \\ & - 2a_j\xi[I_0(a_j\xi)K_1(a_0\xi) + I_1(a_0\xi)K_0(a_j\xi)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_3(a_j, \xi) = & 2[(2(1 - \nu_j) + a_j^2\xi^2)[I_1(a_j\xi)K_1(a_0\xi) - I_1(a_0\xi)K_1(a_j\xi)] - \\ & - a_ja_0\xi^2[I_0(a_j\xi)K_0(a_0\xi) - I_0(a_0\xi)K_0(a_j\xi)]]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_4(a_j, \xi) = & -2a_0\xi[(2(1 - \nu_j) + a_j^2\xi^2)(I_1(a_j\xi)K_0(a_0\xi) + K_1(a_j\xi)I_0(a_0\xi)) \times \\ & \times (I_1(a_j\xi)K_1(a_0\xi) - I_1(a_0\xi)K_1(a_j\xi)) - \\ & - a_j^2\xi^2(I_0(a_j\xi)K_1(a_0\xi) + K_0(a_j\xi)I_1(a_0\xi))(I_0(a_j\xi)K_0(a_0\xi) - K_0(a_j\xi)I_0(a_0\xi))]. \end{aligned}$$

Обратив интегральное преобразование Фурье, запишем формулы для радиальных перемещений на поверхности контакта:

$$\begin{aligned} u_r^{(j)}(a_0, z, \tau) = & \frac{1 - \nu_j^2}{E_j} \frac{a_0}{\pi} \int_{-c(\tau)}^{c(\tau)} p(t, \tau) \Delta_1(a_j, t - z) dt - \\ & - \frac{1 - \nu_j^2}{E_j} \frac{2a_j}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{q}_j(\xi, \tau) \bar{\Delta}_2(a_j, \xi) \cos(\xi z) d\xi + \frac{\alpha_j}{\pi} \partial_{\tau} \int_0^{\tau} \int_{-c(\eta)}^{c(\eta)} f_j(t, \eta) H_j(t - z, \tau - \eta) dt d\eta, \end{aligned}$$

где

$$\Delta_1(a_j, z) = \int_0^{\infty} \bar{\Delta}_1(a_j, \xi) \cos(\xi z) d\xi; \quad H_j(z, \tau) = \int_0^{\infty} \bar{H}_j(\xi, \tau) \cos(\xi z) d\xi.$$

Для определения неизвестного контактного давления $p(z, \tau)$ и функции $f_j(z, \tau)$ используем последние граничные условия, а именно теплофизические (6), (7) и кинематические ((8) третье условие) соотношения контакта. При этом вид теплофизических контактных условий определяет структуру интегральных уравнений поставленной задачи.

При идеальном тепловом контакте ($h \rightarrow \infty$) за искомые функции выбираем $f_{0,j}(z, \tau)$ и температуру промежутка контакта $T_1(a_0, z, \tau) = T_2(a_0, z, \tau) = T(z, \tau)$ при $|z| \leq c(\tau)$, связанные с контактным давлением $p(z, \tau)$ и функциями $f_j(z, \tau)$ зависимостями

$$f_j(z, \tau) = f_{0,j}(z, \tau) + \gamma_{0,j}T(z, \tau), \quad \lambda_1 f_{0,1}(z, \tau) + \lambda_2 f_{0,2}(z, \tau) = f\omega(\tau)a_0p(z, \tau).$$

В этом случае задача приводится к системе интегральных уравнений

$$T(z, \tau) = \frac{1}{\pi} \partial_\tau \int_0^\tau \int_{-c(\eta)}^{c(\eta)} f_{0,1}(t, \eta) \Phi_1(a_0, t - z, \tau - \eta) dt d\eta + \\ + \frac{\gamma_{0,1}}{\pi} \partial_\tau \int_0^\tau \int_{-c(\eta)}^{c(\eta)} T(t, \eta) \Phi_1(a_0, t - z, \tau - \eta) dt d\eta; \quad (12)$$

$$T(z, \tau) = \frac{1}{\pi} \partial_\tau \int_0^\tau \int_{-c(\eta)}^{c(\eta)} f_{0,2}(t, \eta) \Phi_2(a_0, t - z, \tau - \eta) dt d\eta + \\ + \frac{\gamma_{0,2}}{\pi} \partial_\tau \int_0^\tau \int_{-c(\eta)}^{c(\eta)} T(t, \eta) \Phi_2(a_0, t - z, \tau - \eta) dt d\eta; \quad (13)$$

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\lambda_k}{\pi} \int_{-c(\tau)}^{c(\tau)} f_{0,k}(t, \tau) \Delta(t - z) dt + \\ + f\omega(\tau)a_0 \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{\alpha_k E_0}{\pi} \partial_\tau \int_0^\tau \int_{-c(\eta)}^{c(\eta)} (f_{0,k}(t, \eta) + \gamma_{0,k}T(t, \eta)) H_k(t - z, \tau - \eta) dt d\eta = \\ = f\omega(\tau)a_0 \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \frac{2a_k E_0}{\pi} \int_0^\infty \bar{q}_k(\xi, \tau) \bar{\Delta}_2(a_k, \xi) \cos(\xi z) d\xi - \\ - f\omega(\tau)a_0 A E_0 z^{2n}, \quad |z| \leq c(\tau), \quad (14)$$

где

$$E_0 = \left(2 \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \right)^{-1}; \\ \Delta(z) = \int_0^\infty \bar{\Delta}(\xi) \cos(\xi z) d\xi = a_0 E_0 \int_0^\infty \left[\sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \bar{\Delta}_1(a_k, \xi) \right] \cos(\xi z) d\xi.$$

Для температуры тел имеем новое интегральное изображение

$$T_j(r, z, \tau) = \frac{1}{\pi} \partial_\tau \int_0^\tau \int_{-c(\eta)}^{c(\eta)} f_{0,j}(t, \eta) \Phi_j(r, t - z, \tau - \eta) dt d\eta + \\ + \frac{\gamma_{0,j}}{\pi} \partial_\tau \int_0^\tau \int_{-c(\eta)}^{c(\eta)} T(t, \eta) \Phi_j(r, t - z, \tau - \eta) dt d\eta.$$

Если же поверхности $r = a_0$ вне участка контакта являются теплоизолированными ($\gamma_{0,j} = 0$), задача существенно упрощается: необходимо решить систему только двух интегральных уравнений относительно функций $f_{0,j}(z, \tau)$

$$\frac{1}{\pi} \partial_\tau \int_0^\tau \int_{-c(\eta)}^{c(\eta)} f_{0,1}(t, \eta) \Phi_1(a_0, t - z, \tau - \eta) dt d\eta - \frac{1}{\pi} \partial_\tau \int_0^\tau \int_{-c(\eta)}^{c(\eta)} f_{0,2}(t, \eta) \Phi_2(a_0, t - z, \tau - \eta) dt d\eta = 0; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \frac{\lambda_k}{\pi} \int_{-c(\tau)}^{c(\tau)} f_{0,k}(t, \tau) \Delta(t - z) dt + \\ & + f\omega(\tau) a_0 \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{\alpha_k E_0}{\pi} \partial_\tau \int_0^\tau \int_{-c(\eta)}^{c(\eta)} f_{0,k}(t, \eta) H_k(t - z, \tau - \eta) dt d\eta = \\ & = f\omega(\tau) a_0 \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \frac{2a_k E_0}{\pi} \int_0^\infty \bar{q}_k(\xi, \tau) \bar{\Delta}_2(a_k, \xi) \cos(\xi z) d\xi - \\ & - f\omega(\tau) a_0 A E_0 z^{2n}, \quad |z| \leq c(\tau). \quad (16) \end{aligned}$$

Кроме того, если в начальный момент времени $\omega(0) = 0$, то $f_{0,j}(t, 0) = T(t, 0) = 0$, а контактное давление найдем из интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-c(0)}^{c(0)} p(t, 0) \Delta(t - z) dt = \\ = \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \frac{2a_k E_0}{\pi} \int_0^\infty \bar{q}_k(\xi, 0) \bar{\Delta}_2(a_k, \xi) \cos(\xi z) d\xi - A E_0 z^{2n}. \end{aligned}$$

При неидеальном тепловом контакте за искомые функции выбираем контактное давление $p(z, \tau)$ и температуру промежутка контакта $T_{0,j}(z, \tau) = T_j(a_0, z, \tau)$ при $|z| \leq c(\tau)$, связанные с $f_j(t, \tau)$ теплофизическими условиями контакта (6) и (7). Поэтому

$$f_j(t, \tau) = \frac{f\omega(\tau) a_0}{2\lambda_j} p(t, \tau) + \left(\gamma_{0,j} - \frac{h}{2\lambda_j} \right) T_{0,j}(t, \tau) + \frac{h}{2\lambda_j} T_{0,3-j}(t, \tau).$$

Подставив эти выражения в формулу (11), получим новое интегральное изображение для температуры цилиндров

$$\begin{aligned} T_j(r, z, \tau) = \frac{f a_0}{2\pi \lambda_j} \partial_\tau \int_0^\tau \omega(\eta) \int_{-c(\eta)}^{c(\eta)} p(t, \eta) \Phi_j(r, t - z, \tau - \eta) dt d\eta + \\ + \left(\gamma_{0,j} - \frac{h}{2\lambda_j} \right) \frac{1}{\pi} \partial_\tau \int_0^\tau \int_{-c(\eta)}^{c(\eta)} T_{0,j}(t, \eta) \Phi_j(r, t - z, \tau - \eta) dt d\eta + \\ + \frac{h}{2\pi \lambda_j} \partial_\tau \int_0^\tau \int_{-c(\eta)}^{c(\eta)} T_{0,3-j}(t, \eta) \Phi_j(r, t - z, \tau - \eta) dt d\eta. \quad (17) \end{aligned}$$

Используя его на участке контакта $|z| \leq c(\tau)$, получим два интегральных уравнения для определения неизвестных $T_{0,j}(z, \tau)$, а вместе с соотношением

$$\begin{aligned} & \frac{a_0 E_0}{\pi} \int_{-c(\tau)}^{c(\tau)} p(t, \tau) \left[\sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \Delta_1(a_k, t - z) \right] dt + \\ & + \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{\alpha_k E_0 f a_0}{2\pi \lambda_k} \partial_\tau \int_0^\tau \omega(\eta) \int_{-c(\eta)}^{c(\eta)} p(t, \eta) H_k(t - z, \tau - \eta) dt d\eta + \\ & + \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{\alpha_k E_0}{\pi} \left(\gamma_{0,k} - \frac{h}{2\lambda_k} \right) \partial_\tau \int_0^\tau \int_{-c(\eta)}^{c(\eta)} T_{0,k}(t, \eta) H_k(t - z, \tau - \eta) dt d\eta + \\ & + \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{\alpha_k E_0 h}{2\pi \lambda_k} \partial_\tau \int_0^\tau \int_{-c(\eta)}^{c(\eta)} T_{0,3-k}(t, \eta) H_k(t - z, \tau - \eta) dt d\eta = \\ & = \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \frac{2a_k E_0}{\pi} \int_0^\infty \bar{q}_k(\xi, \tau) \bar{\Delta}_2(a_k, \xi) \cos(\xi z) d\xi - A E_0 z^{2n}, \quad |z| \leq c(\tau) \end{aligned} \quad (18)$$

— полную систему уравнений поставленной задачи.

Определение и построение численного алгоритма. Основываясь на методе трапеций [8] и используя результаты работ [11, 13], проведем дискретизацию по времени систем интегральных уравнений (12)–(14), (15), (16) или (17), (18) в промежутке $[0, \tau_*]$, на котором исследуется поведение трибосистемы (этот интервал разбиваем на N отрезков времени $\tau_k = k\tau_1$, $k = 0, \dots, N$, где $\tau_N = \tau_*$), по формулам

$$\begin{aligned} F(z, 0) &= 0, \quad F(z, \tau_1) = 0,5G_1(z, \tau_{1,1}) + 0,25G_1(z, \tau_{0,2}), \\ F(z, \tau_2) &= 0,5G_2(z, \tau_{2,1}) + 0,5G_2(z, \tau_{1,2}) + 0,25(G_2(z, \tau_{0,3}) - G_2(z, \tau_{0,1})), \\ F(z, \tau_n) &= 0,5G_n(z, \tau_{n,1}) + 0,5G_n(z, \tau_{n-1,2}) + 0,5 \sum_{k=1}^{n-2} (G_n(z, \tau_{k,n+1-k}) - G_n(z, \tau_{k,n-1-k})) + \\ & + 0,25(G_n(z, \tau_{0,n+1}) - G_n(z, \tau_{0,n-1})) \quad (n \geq 3) \end{aligned} \quad (19)$$

для интегралов вида

$$F(z, \tau) = \frac{1}{\pi} \partial_\tau \int_0^\tau \int_{-c(\eta)}^{c(\eta)} f(t, \eta) \Phi(t - z, \tau - \eta) dt d\eta, \quad \Phi(z, 0) = 0,$$

где

$$G_m(z, \tau_{i,j}) = \frac{1}{\pi} \int_{-c(\tau_i)}^{c(\tau_i)} f(t, \tau_i) \Phi(t - z, \tau_j) dt, \quad |z| \leq c(\tau_m).$$

Ядра $\Delta(z)$, $H_j(z, \tau)$, $\Phi_j(r, z, \tau)$ и правую часть интегральных уравнений (14), (16) и (18) найдем по схемам

$$\Delta(z) = -\ln |z| + \int_0^{\lambda_1} \bar{\Delta}(\xi) \cos(\xi z) d\xi - \begin{cases} \ln \lambda_1 + \gamma, & z = 0, \\ \text{Ci}(\lambda_1 |z|) - \ln |z|, & z \neq 0, \end{cases}$$

$$H_j(z, \tau) = \int_0^{\lambda_{j,2}} \bar{H}_j(\xi, \tau) \cos(\xi z) d\xi \pm (1 + \nu_j) \left[\frac{\cos(\lambda_{j,2} z)}{\lambda_{j,2}} + |z| \left(\text{Si}(\lambda_{j,2} |z|) - \frac{\pi}{2} \right) \right],$$

$$\Phi_{j,st}(a_0, z) = -\ln |z| + \int_0^{\lambda_{j,3}} \bar{\Phi}_{j,st}(a_0, \xi) \cos(\xi z) d\xi - \begin{cases} \ln \lambda_{j,3} + \gamma, & z = 0, \\ \text{Ci}(\lambda_{j,3} |z|) - \ln |z|, & z \neq 0, \end{cases}$$

$$\Phi_{j,st}(r, z) = \int_0^{\lambda_{j,3}} \bar{\Phi}_{j,st}(r, \xi) \cos(\xi z) d\xi + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a_0}{r}} \sum_{k=1}^2 E_1(\pm \lambda_{j,3}(a_0 - r + (-1)^{k-1} iz)) \quad (r \neq a_0),$$

$$\sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \frac{2a_k E_0}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{q}_k(\xi, \tau) \bar{\Delta}_2(a_k, \xi) \cos(\xi z) d\xi = \quad (20)$$

$$= \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \frac{2a_2 E_0}{\pi} q(\tau) (I_0(L + z) + I_0(L - z)),$$

$$I_0(z) = \int_0^{\lambda_4} \frac{\bar{\Delta}_2(a_2, \xi) - \bar{\Delta}_2(a_2, 0)}{\xi} \sin(\xi z) d\xi +$$

$$+ \bar{\Delta}_2(a_2, 0) \text{Si}(\lambda_4 z) + \frac{2(a_2 - a_0)}{i\sqrt{a_2 a_0}} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} E_1(\lambda_4(a_2 - a_0 + (-1)^k iz)),$$

где внутренняя поверхность трибосистемы свободна от нагрузки ($q_1(z, \tau) = 0$), а нагрузка на внешней поверхности изменяется по закону $q_2(z, \tau) = q(\tau)S(L - |z|)$; $\text{Si}(z)$, $\text{Ci}(z)$ — интегральные синус и косинус; $E_1(z)$ — интегральная показательная функция; γ — константа Эйлера [12]; i ($i^2 = -1$) — мнимая единица. При этом учтено, что трансформанты Фурье ядер $\bar{\Delta}_1(a_j, \xi)$, $\bar{\Delta}_2(a_j, \xi)$, $\bar{H}_j(\xi, \tau)$ и $\bar{\Phi}_j(r, \xi, \tau)$ обладают такими свойствами:

$$\bar{\Delta}_1(a_j, 0) = \frac{1}{1 - \nu_j^2} \left(\frac{a_j^2 + a_0^2}{a_j^2 - a_0^2} + \nu_j \right), \quad \bar{\Delta}_2(a_j, 0) = \frac{1}{1 - \nu_j^2} \frac{2a_0 a_j}{a_j^2 - a_0^2},$$

$$\bar{\Phi}_j(r, 0, \tau) = \frac{a_0(\pm \ln(r/a_j) + (a_j \gamma_j)^{-1})}{1 + \gamma_{0,j} a_0(\pm \ln(a_0/a_j) + (a_j \gamma_j)^{-1})} \mp$$

$$\mp 2a_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{U_0(\mu_{j,m} r, \mu_{j,m} a_0) U_0(\mu_{j,m} a_0, \mu_{j,m} a_0)}{\mu_{j,m}^2 N_{j,m}^2} \exp(-k_j \mu_{j,m}^2 \tau),$$

$$\bar{H}_j(0, \tau) = \pm a_0^2 \left[\frac{a_0^2 (a_0^2 - a_j^2)^{-1} \ln(a_0/a_j) - 0,5 \pm (a_j \gamma_j)^{-1}}{1 + \gamma_{0,j} a_0(\pm \ln(a_0/a_j) + (a_j \gamma_j)^{-1})} + \right.$$

$$\left. + \frac{4a_j}{a_0^2 - a_j^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{U_1(\mu_{j,m} a_j, \mu_{j,m} a_0) U_0(\mu_{j,m} a_0, \mu_{j,m} a_0)}{N_{j,m}^2 \mu_{j,m}^3} \exp(-k_j \mu_{j,m}^2 \tau) \right],$$

а при $\xi \rightarrow \infty$ — свойствами

$$\bar{\Delta}_1(a_j, \xi) \sim \mp 2(a_0 \xi)^{-1}, \quad \bar{\Delta}_2(a_j, \xi) \sim -\frac{4(a_0 - a_j)}{\sqrt{a_j a_0}} \exp(\mp \xi(a_0 - a_j)),$$

$$\bar{\Phi}_j(r, \xi, \tau) \sim \bar{\Phi}_{j,st}(r, \xi) \sim \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{a_0}{r}} \exp(\mp \xi(a_0 - r)), \quad \bar{H}_j(\xi, \tau) \sim \bar{H}_{j,st}(\xi) \sim \pm \frac{1 + \nu_j}{\xi^2} \quad (\tau > 0).$$

Границы интегрирования $\lambda_{j,k}$ в формулах (20) выбирались такими, чтобы на интервалах $(\lambda_{j,k}, \infty)$ подынтегральные функции в интегралах Фурье можно было заменить их асимптотическими выражениями. Значения интегралов Фурье на промежутках $[0, \lambda_{j,k}]$ найдем численным интегрированием, используя квадратурный метод Филона [14].

Перейдя к симметричному промежутку $[-1, 1]$, решение полученных выше систем интегральных уравнений в каждый момент времени $\tau_i, i = 0, 1, 2, \dots, N$ (после дискретизации по формулам (19)) выберем таким:

$$p(t, \tau_i) = \frac{\psi_0(t, \tau_i)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad f_{0,j}(t, \tau_i) = \frac{\psi_j(t, \tau_i)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad T(t, \tau_i) = \varphi_0(t, \tau_i), \quad T_{0,j}(t, \tau_i) = \varphi_j(t, \tau_i), \quad (21)$$

где $\psi_l(t, \tau_i), \varphi_l(t, \tau_i), l = 0, 1, 2$ — непрерывные и ограниченные функции, которые представляются четными интерполяционными полиномами Лагранжа степени $2n + 1$ [15] по полиномам Чебышева первого рода $T_n(t)$ [12]

$$\psi_l(t, \tau_i) = \frac{1}{n + 0,5} \sum_{k=1}^{n+1} \psi_l(t_k, \tau_i) \delta_k \left(1 + 2 \sum_{m=1}^n T_{2m}(t_k) T_{2m}(t) \right),$$

$$\varphi_l(t, \tau_i) = \frac{1}{n + 0,5} \sum_{k=1}^{n+1} \varphi_l(t_k, \tau_i) \delta_k \left(1 + 2 \sum_{m=1}^n T_{2m}(t_k) T_{2m}(t) \right).$$

Здесь $t_j = \cos(\pi(2j - 1)/(2(2n + 1)))$, $j = 1, \dots, n + 1$ — нули полинома Чебышева первого рода порядка $2n + 1$ [12]; $\delta_j = 1$, если $j \neq n + 1$, и $\delta_j = 0,5$, когда $j = n + 1$.

Подставим выражения для функций $p(t, \tau_i), f_{0,j}(t, \tau_i), T(t, \tau_i)$ и $T_{0,j}(t, \tau_i)$ через интерполяционные полиномы Лагранжа в дискретные по времени системы интегральных уравнений. Интегралы с логарифмами вычислим точно по известным формулам [16], а значения регулярных интегралов найдем приближенно, используя квадратурные формулы Гаусса [8]. Положив $t = t_k, k = 1, \dots, n + 1$, приведем системы интегральных уравнений в каждый момент времени τ_i к системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения в интерполяционном полиноме $\psi_l(t_k, \tau_i)$ и $\varphi_l(t_k, \tau_i)$. Они полностью определяют изменение контактного давления и функций $f_{0,j}, T$ и $T_{0,j}$ в этот момент времени.

При этом нужно сделать несколько замечаний.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Выбор функций контактного давления и $f_{0,j}$ в виде (21) обусловлен присутствием логарифмической особенности ядер интегральных уравнений [17, 18].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При вычислении интегралов вида

$$J_n(z) = \int_{-1}^1 T_n(x) \ln |x - z| dx$$

использовались формулы

$$J_n(z) = \frac{n}{2} \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{(n - m - 1)!}{m!(n - 2m)!} 2^{n-2m} I_{n-2m}(z),$$

$$I_m(z) = \int_{-1}^1 x^m \ln |x - z| dx = -\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \frac{1 + (-1)^{m-k}}{m+1-k} z^k +$$

$$+ \frac{1}{m+1} \begin{cases} (1 - z^{m+1}) \ln(1 - z) + ((-1)^m + z^{m+1}) \ln(-1 - z), & z < -1, \\ (1 - z^{m+1}) \ln(1 - z) + ((-1)^m + z^{m+1}) \ln(1 + z), & |z| \leq 1, \\ (1 - z^{m+1}) \ln(z - 1) + ((-1)^m + z^{m+1}) \ln(1 + z), & z > 1, \end{cases}$$

которые получены на основе явных выражений для полиномов Чебышева [12]. Здесь $[n]$ — целая часть числа n .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если промежуток контакта неизвестен, то, выбирая значения $c(\tau_i)$, будем добиваться при идеальном тепловом контакте выполнения условия

$$|\lambda_1 \psi_1(1, \tau_i) + \lambda_2 \psi_2(1, \tau_i)| < \varepsilon, \quad (22)$$

а при неидеальном — условия

$$|\psi_0(1, \tau_i)| < \varepsilon,$$

где ε — некоторое число, определяющее погрешность вычисления (как правило, $\varepsilon \approx 10^{-5}$), что обусловлено численным подходом к решению систем интегральных уравнений. Выполнение этих условий позволяет выбрать функцию контактного давления в виде [18]

$$p(t, \tau_i) = \psi_3(t, \tau_i) \sqrt{1 - t^2}, \quad (23)$$

где $\psi_3(t, \tau_i)$ — непрерывно-дифференцируемая и ограниченная функция. Из условия (22) следует, что тепловые потоки при переходе через точку $z = c(\tau_i)$ имеют разрыв второго рода на поверхности $r = a_0$. Тогда при неидеальном тепловом контакте выражение для контактного давления имеет вид (23), где $\psi_3(t, \tau_i)$ — парный интерполяционный полином Лагранжа степени $2n + 1$ [15] по полиномам Чебышева второго рода $U_n(t)$ [12]

$$\psi_3(t, \tau_i) = \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \psi_3(t_j, \tau_i) \delta_j (1 - t_j^2) \left(1 + \sum_{m=1}^n U_{2m}(t_j) U_{2m}(t) \right),$$

когда $t_j = \cos(\pi j / (2(n+1)))$, $j = 1, \dots, n+1$ — нули полинома Чебышева второго рода порядка $2n + 1$ [12], а при $h \rightarrow \infty$ контактное давление найдем по формуле

$$p(z, \tau_i) = (\lambda_1 f_{0,1}(z, \tau_i) + \lambda_2 f_{0,2}(z, \tau_i)) / (f \omega(\tau_i) a_0).$$

При численных расчетах достаточно взять шаг разбиения по времени $\tau_1 = 5$ с, а степень интерполяционного полинома Лагранжа $n = 10$. Тогда относительная погрешность вычислений не превышает 5 %.

Анализ результатов и выводы. Для численного анализа рассматриваемой задачи выбиралась пара трения сталь — сталь ($E_j = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu_j = 0,3$, $\lambda_j = 50$ Вт/(м·К), $k_j = 0,125 \cdot 10^{-4}$ м²/с) и значения основных параметров: $h = 10$ кВт/(м²·К), $f = 0,1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 20$ м⁻¹, $\gamma_{0,1} = \gamma_{0,2} = 0$ и 20 м⁻¹, $a_1 = 3,5$ см, $a_0 = 5$ см, $a_2 = 6$ см, $\alpha_1 = (1 \div 15) \cdot 10^{-6}$ К⁻¹, $\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹, $A = 0,001 \div 0,005$ м⁻¹ (параметр плотности контакта $n = 1$). Нагрузка на поверхности $r = a_2$ и относительная скорость вращения изменялись по законам

$$1) q_2(z, \tau) = q_{st}(z)(1 - \exp(-\beta\tau)), \quad \omega(\tau) = \omega_0,$$

$$2) q_2(z, \tau) = q_{st}(z), \quad \omega(\tau) = \omega_0(1 - \exp(-\beta\tau)),$$

где $q_{st}(z) = q_0 S(L - |z|)$. Здесь $q_0 = 20$ МПа, $\omega_0 = 0 \div 2$ рад/с, $\beta = 0,01$ с⁻¹, $L = 0,1$ м. Поверхность $r = a_1$, как было сказано выше, свободна от усилий.

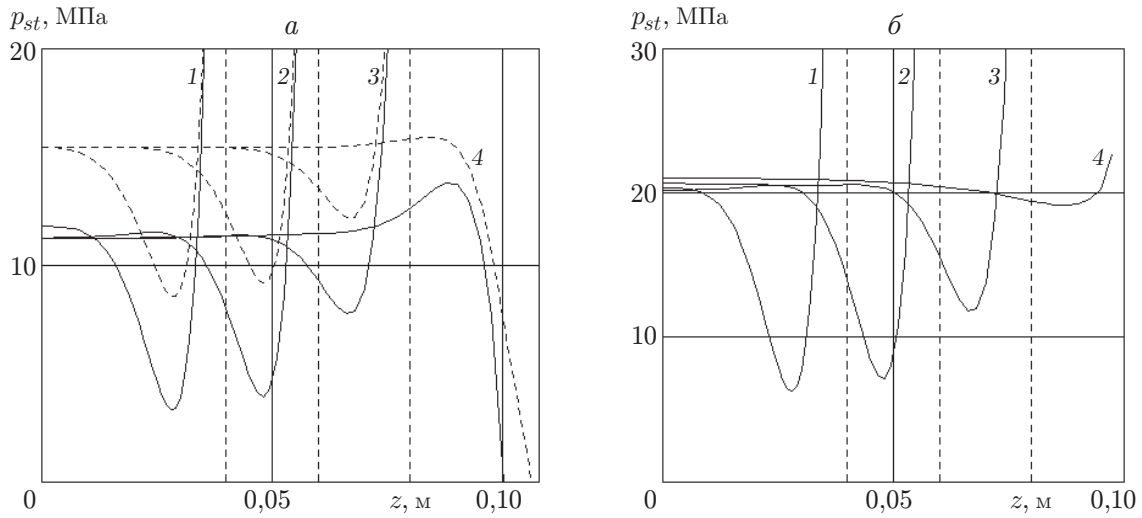


Рис. 2. Распределение стационарного контактного давления: сплошные кривые — $\alpha_1 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ (а) и $15 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ (б); штриховые кривые — решение в упругой постановке; c , м: 1 — 0,04, 2 — 0,06, 3 — 0,08, 4 — $\approx 0,1002$ ($\alpha_1 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$), 0,1 ($\alpha_1 = 15 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$) и $\approx 0,1064$ ($\omega_0 = 0$); вертикальные штриховые линии определяют величину участка контакта

Если промежуток взаимодействия тел фиксирован, то контактные напряжения стационарной задачи неограниченно увеличиваются при приближении к границе (корневая особенность). Но сингулярность контактного давления имеет место только при условии $c < c_*$, где граничное значение участка контакта c_* зависит как от величины интервала приложения нагрузки L , так и от соотношения между коэффициентами линейного теплового расширения тел. При $c \approx c_*$ выполняется условие $\psi_0(1) = 0$ и контактные напряжения будут совпадать с рассчитанными между цилиндрами при уточненной постановке [6].

Но параметр c_* существует либо только при чисто упругом взаимодействии тел, либо при условии, что $\alpha_1 \ll \alpha_2$, т. е. при контакте цилиндров по ограниченной односвязной области [13]. Если же $\alpha_1 > \alpha_2$ (случай сплошного контакта между цилиндрами) [11], то контактные напряжения между бандажом и цилиндром являются сингулярными (с меньшим коэффициентом при особенности) при довольно большом значении полуширины участка контакта c .

Эти выводы иллюстрирует рис. 2, где приведено распределение стационарного контактного давления при $\omega_0 = 1,0$ рад/с в условиях, когда тепловой контакт тел неидеален, а поверхности $r = a_0$ вне участка контакта теплоизолированы ($\gamma_{0,1} = \gamma_{0,2} = 0$).

Как показывают численные расчеты, можно так подобрать параметры распределения нагрузки или материал пар трения, что контакт будет иметь место на участке, меньшем начального.

Идеальность теплового контакта и теплообмен с поверхностями $r = a_0$ тел вне участка взаимодействия вносят незначительные коррективы в описанные выше эффекты распределения контактных напряжений, но они существенно влияют на распределение температуры в телах. При увеличении коэффициента термической проводимости участка контакта h температура тел уменьшается, и тем существеннее, чем больше коэффициент линейного теплового расширения цилиндра α_1 . Увеличение коэффициентов теплоотдачи с поверхностей $r = a_0$ вызывает противоположные эффекты, а именно: наблюдается локальное увеличение контактной температуры.

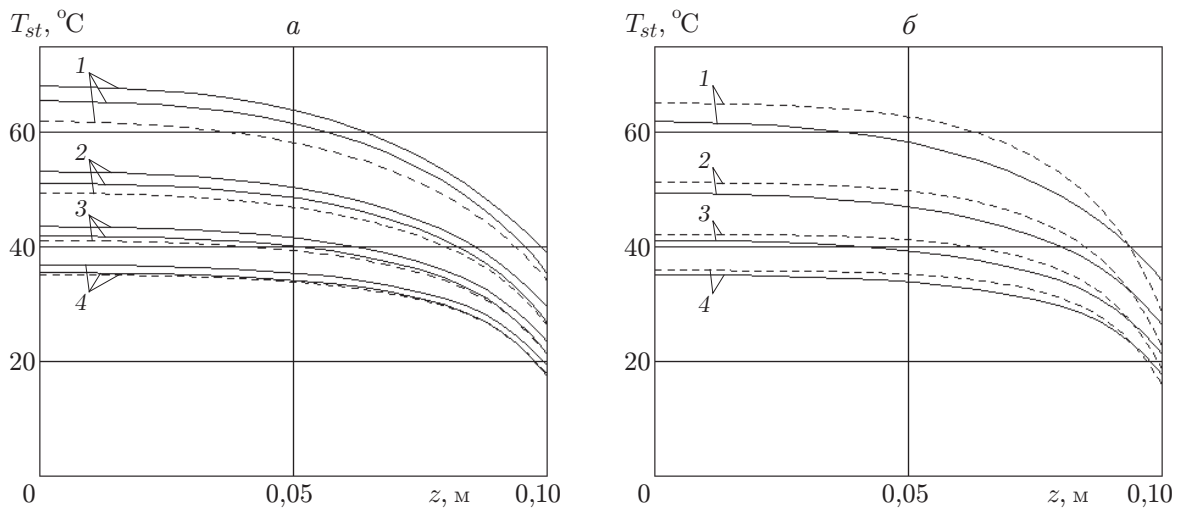


Рис. 3. Распределение контактной температуры в стационарной задаче при фиксированном участке контакта $c = 0,1$ м ($\omega_0 = 1,0$ рад/с):

$\alpha_1, 10^{-6} \text{ K}^{-1}$: 1 — 15, 2 — 12, 3 — 9, 4 — 6; сплошные кривые на рис. 3,а соответствуют неидеальному тепловому контакту (верхние кривые относятся к первому телу, нижние — ко второму), штриховые — идеальному ($\gamma_{0,j} = 0$); рис. 3,б построен при идеальном тепловом контакте (сплошные линии — $\gamma_{0,j} = 0$, штриховые — $\gamma_{0,j} = 20 \text{ м}^{-1}$)

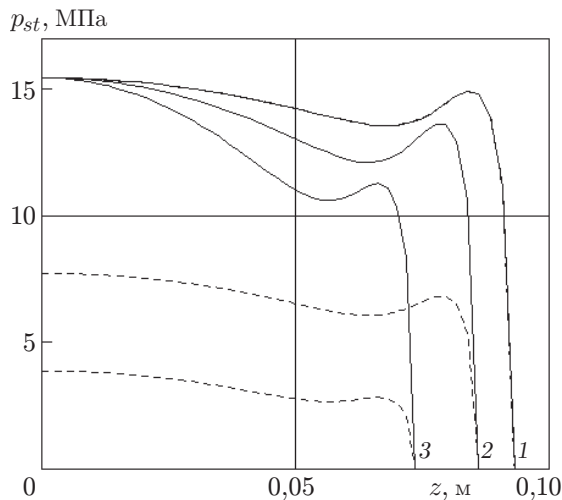


Рис. 4. Распределение контактного давления в упругой задаче:

сплошные кривые: $n = 1$, $q_0 = 20$ МПа; $A = 0,001$ (1), $0,002$ (2), $0,004 \text{ м}^{-1}$ (3); штриховые кривые: $n = 1$, $A = 0,001 \text{ м}^{-1}$; $q_0 = 20$ (1), 10 (2) и 5 МПа (3)

Для иллюстрации этих выводов на рис. 3 приведено распределение контактной температуры в стационарной задаче в предположении взаимодействия бандажа и цилиндра на фиксированном участке контакта.

Выводы относительно распределения контактной температуры справедливы и при взаимодействии тел с изменяемым участком контакта (граничное условие (1)). Что же касается контактного давления, то его распределение в значительной степени определяется кривизной поверхности бандажа A и отношением между коэффициентами линейного теплового расширения тел, влияние которых на контактное давление иллюстрируют рис. 4–6. В частности, увеличение кривизны контактирующей поверхности бандажа или пропорциональное уменьшение интенсивности нагрузки q_0 вызывает уменьшение участка контакта, а распределение контактного давления приближается к параболическому распределению давления в задаче Герца [9], что согласуется с результатами работы [18]. На основе дан-

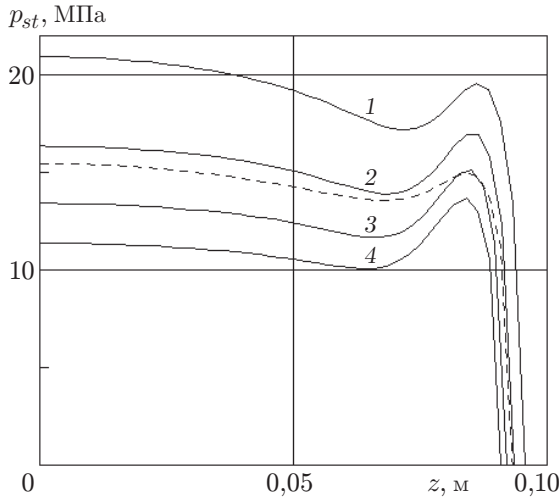


Рис. 5

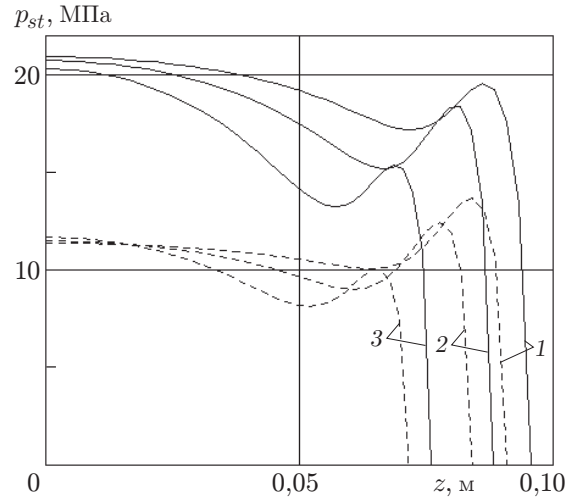


Рис. 6

Рис. 5. Изменение вдоль оси z стационарного контактного давления при $\alpha_1, 10^{-6} \text{ K}^{-1}$: 1 — 15, 2 — 12, 3 — 9, 4 — 6 ($A = 0,001 \text{ м}^{-1}, n = 1$); штриховая линия — решение упругой задачи

Рис. 6. Распределение стационарного контактного давления при $A = 0,001$ (1), 0,002 (2), 0,004 м^{-1} (3) и $\alpha_1 = 15 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ (сплошные линии) и $6 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ (штриховые)

ных рис. 4 можно утверждать, что характер изменения вдоль оси прижимающей нагрузки существенно влияет на характер распределения контактного давления даже тогда, когда при описании механизма взаимодействия тел используется теория Герца.

С уменьшением параметра A или увеличением плотности контакта n контактное давление упругой задачи мало отличается от его распределения, полученного в уточненной постановке при взаимодействии двух цилиндров [6, 13]. То есть в отличие от контактной задачи Герца [9] промежуток взаимодействия ограничивается величиной c_* . В термоупругой задаче $c \leq c_*$ только при условии $\alpha_1 < \alpha_2$.

Увеличение коэффициента линейного теплового расширения внутреннего тела ведет к увеличению как участка контакта, так и контактных напряжений, а уменьшение α_1 вызывает противоположные эффекты. Кроме того, как и при силовом взаимодействии, рост кривизны контактирующей поверхности или пропорциональное уменьшение интенсивности нагрузки q_0 вызывают уменьшение участка контакта при любом значении α_1 . Но если $\alpha_1 > \alpha_2$, то при уменьшении A или росте n задача в данной постановке теряет смысл (наблюдается сплошной контакт между телами).

На рис. 5 приведено распределение стационарного контактного давления в зависимости от величины α_1 , а на рис. 6 — распределение стационарного контактного давления при различных значениях A .

Исследования решения квазистатической задачи показывают, что при выполнении условия $\omega_0 < \omega_{cr}$ (ω_{cr} — критическое значение скорости вращения, при котором уже невозможно рассчитать стационарное контактное давление при взаимодействии двух длинных цилиндров [11, 13]) контактные напряжения монотонно приближаются к соответствующему стационарному значению, поскольку при указанном выше выборе обжимающей нагрузки и скорости вращения существуют стационарные значения этих факторов. При этом, так как при $\alpha_1 < \alpha_2$ происходит “ослабление” контакта, а при $\alpha_1 > \alpha_2$, наоборот, “уси-

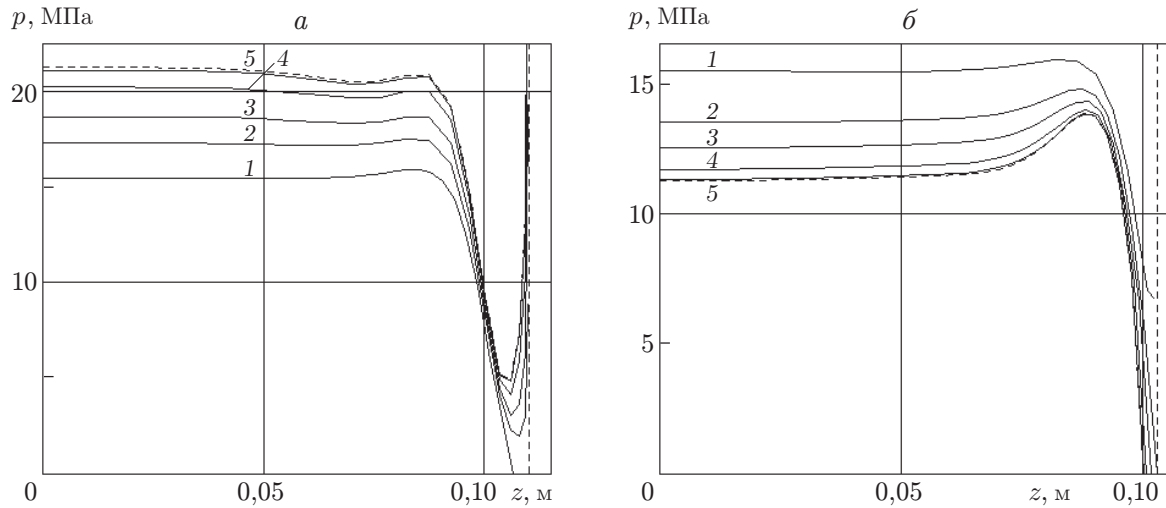


Рис. 7. Изменение вдоль оси z контактного давления в квазистатической постановке при $\alpha_1 = 15 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $c = 0,11 \text{ м}$ (а) и $\alpha_1 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $c = 0,103 \text{ м}$ (б): τ , с: 1 — 0, 2 — 50, 3 — 100, 4 — 200, 5 — 400; штриховые линии соответствуют стационарным значениям

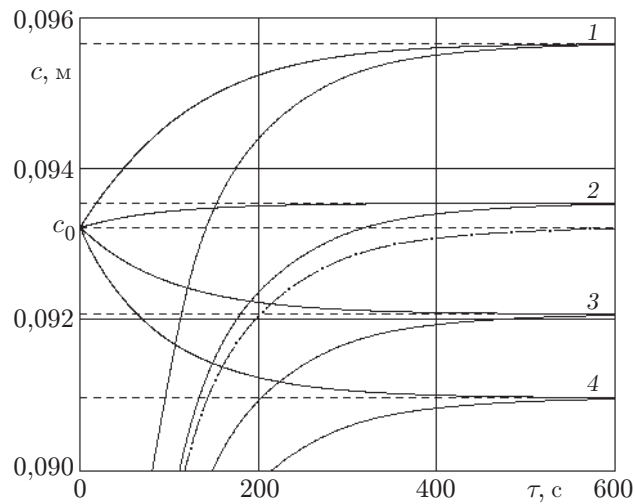


Рис. 8. Изменение со временем полуширины участка контакта при различных значениях α_1 , 10^{-6} K^{-1} :

1 — 15, 2 — 12, 3 — 9, 4 — 6 ($A = 0,001 \text{ м}^{-1}$). Горизонтальные штриховые линии определяют значение c стационарной (при штрихпунктирной кривой — силовой) задачи. Кривые, берущие свое начало в точке c_0 , определяющей величину участка контакта упругой задачи, получены при изменении со временем угловой скорости вращения, а выходящие из точки $c = 0$ (на графике не показана) соответствуют изменению со временем обжимающей нагрузки

ление”, то во втором варианте изменения со временем нагрузки и скорости движения (см. выше) возможны следующие особенности выхода на стационарное значение контактных напряжений (при изначально фиксированном участке контакта):

— при $\alpha_1 > \alpha_2$ контактное давление, ограниченное при $\tau = 0$, со временем получает корневую особенность (рис. 7,а);

— при $\alpha_1 < \alpha_2$ сингулярное (при $\tau = 0$) контактное давление со временем становится ограниченным (рис. 7,б). Данные, приведенные на рис. 7, получены при неидеальном тепловом контакте. Результаты расчетов показывают, что продолжительность переходных процессов для контактных напряжений лежит в границах 600–700 с.

Различие коэффициентов линейного теплового расширения тел вызывает некоторые аналогии и при изменении со временем участка контакта (при граничном условии (1)). В частности, при $\alpha_1 \geq \alpha_2$ полуширина участка контакта со временем увеличивается, а при $\alpha_1 < \alpha_2$ — уменьшается, если используется вторая закономерность изменения со временем нагрузки и угловой скорости вращения. Если же выбирается первая закономерность, то участок контакта монотонно увеличивается от нуля к соответствующему стационарному значению.

На рис. 8 показано изменение со временем полуширины участка контакта при различных значениях α_1 . Температура на поверхности контакта медленнее выходит на стационарное значение (приблизительно на протяжении 800 с), а с удалением от поверхности $r = a_0$ продолжительность переходного процесса увеличивается. Кроме того, величина участка контакта существенно влияет на распределение температуры, полученной при изменении нагрузки (постоянная угловая скорость) и относительной угловой скорости вращения (постоянная обжимающая нагрузка). Если же участок контакта не изменяется на протяжении всего переходного процесса, наблюдается незначительное различие полей температуры, полученных при первой и второй закономерностях изменения нагрузки и скорости вращения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Александров В. М.** Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1962. № 5. С. 91–94.
2. **Александров В. М., Ромалис Б. Л.** Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986.
3. **Арутюнян Н. Х.** О контактном взаимодействии упругого кольца с упругим цилиндром // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1994. № 2. С. 204–206.
4. **Панасюк В. В., Теплый М. И.** Некоторые контактные задачи теории упругости. Киев: Наук. думка, 1975.
5. **Дроздов Ю. Н., Грилицкий Д. В., Левицкий В. П.** Контакт пары вращающихся круговых цилиндров с учетом теплообразования от трения // Трение и износ. 1991. Т. 12, № 6. С. 974–980.
6. **Грилицкий Д. В., Краснюк П. П.** Упругий контакт двух цилиндров // Физ.-хим. механика материалов. 1997. Т. 33, № 3. С. 31–38.
7. **Краснюк П. П., Чаповская Р. Б.** Термоупругий контакт бандажа и цилиндра в условиях фрикционного теплообразования // Физ.-хим. механика материалов. 2000. Т. 36, № 3. С. 42–52.
8. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977.
9. **Штаерман И. Я.** Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.

10. **Галицын А. С., Жуковский А. Н.** Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. Киев: Наук. думка, 1976.
11. **Грилицкий Д. В., Краснюк П. П.** Термоупругий контакт двух цилиндров с нестационарным фрикционным теплообразованием // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 3. С. 112–121.
12. **Справочник** по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
13. **Краснюк П. П.** Исследование отрыва контактирующих поверхностей при термоупругом взаимодействии двух цилиндров с нестационарным фрикционным тепловыделением // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 5. С. 117–130.
14. **Трантер К. Дж.** Интегральные преобразования в математической физике. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
15. **Натансон И. П.** Конструктивная теория функций. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.
16. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982.
17. **Александров В. М., Коваленко Е. В.** Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986.
18. **Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.** Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 19/VIII 2004 г.
