к уменьшению скорости распространения акустических возмущений и, следовательно, к уменьшению коэффициента отражения волны давления от зоны горения (расчеты, проведенные для пороха IPN [2], показывают, что $E \leqslant 1,0$). В случае химически «замороженных» продуктов сгорания $E=1{,}0$, $\beta_2=c_p/R$, $\alpha_1=\beta_1=\alpha_2=0$, $R^0=c_p-c_v$ и формулы (14) сводятся к полученному в [1] решению задачи.

Поступила в редакцию
24/XI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Гостинцев, Л. А. Суханов, П. Ф. Похил. Докл. АН СССР, 1971, **200**, 4.
2. Р. Н. Уимпресс. Внутренняя баллистика пороховых ракет. М., ИЛ, 1952.
3. Т. Карман. Вопросы горения ракетных топлив. М., ИЛ, 1959.
4. Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, 1942, 12, 11—12.
5. Б. В. Новожилов. ФГВ, 1968, **4**, 4.

УДК 536.46

ЗАМЕЧАНИЕ О СООТНОШЕНИЯХ ПОДОБИЯ В ЗАДАЧЕ О НЕСТАЦИОНАРНОМ ГОРЕНИИ ПОРОХОВ

Ю. С. Рязанцев, В. Е. Тульских

(Москва)

Горение пороха в нестационарных условиях исследовалось во многих экспериментальных и теоретических работах (например, [1—9]). Ниже на основе модели нестационарного горения конденсированных систем, предложенной в [1, 2, 10], устанавливаются некоторые законы подобия, позволяющие результаты единичного численного расчета или эксперимента, выполненного при некоторых фиксированных значениях исходных параметров, распространить на целый класс аналогичных расчетов или экспериментов с другими значениями этих параметров.

Рассмотрим задачу о горении пороха при световом облучении [4], когда в к-фазе поглощается меняющийся во времени по экспоненциальному закону световой поток $I(t)$. Математическая формулировка этой задачи сводится к следующим соотношениям:

$$\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}+I(t)\,e^{kx}\right),\quad -\infty<x<0,\quad 0<t<\infty, \tag{1}$$

$$u=Bp^{\nu}f\left[T_s-\frac{\varkappa}{u}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0\right], \tag{2}$$

$$I(t)=I_1+(I_0-I_1)\exp(-t/\alpha), \tag{3}$$

$$t=0: p=p_0,\ I=I_0,\ u_0=Bp_0^{\nu}f\left[T_0+\frac{I_0}{u_0\rho c}\right],$$

$$T(x)=T_0+(T_s-T_0)\exp\left(\frac{u_0x}{\varkappa}\right)+\frac{I_0}{\lambda(u_0/\varkappa-k)}\left(e^{kx}-e^{\frac{u_0x}{\varkappa}}\right), \tag{4}$$

$$x=0,\ T=T_s=\mathrm{const},\quad x\to-\infty,\ T\to T_0. \tag{5}$$

Здесь T — температура, t — время, x — пространственная координата, u — линейная скорость горения, p — давление, I_0 и I_1 — начальное и конечное значение светового потока, α — характерное время изменения светового потока; ρ, c, λ, k — соответственно плотность, теплоемкость, теплопроводность и показатель прозрачности к-фазы. Формула (2) для скорости горения в нестационарных условиях получена из известного стационарного закона методом [2].

Переходя к новым переменным по формулам

$$t' = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)t, \quad x' = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}x, \quad u' = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}u,$$

$$p' = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2\nu}}p, \quad k' = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}k, \quad I' = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}I, \tag{6}$$

$$I_0' = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}I_0, \quad I_1' = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}I_1,$$

видим, что в новых переменных формулировка задачи остается прежней с той лишь разницей, что показатель в законе изменения светового потока (3) будет равен $1/\alpha'$, а не $1/\alpha$. Таким образом, если имеется решение задачи (1)—(5) для некоторого набора величин α, p_0, I_0, I_1, k, T_0, T_s, то формулы (6) позволяют простым пересчетом получить решение задачи (1)—(5) для значений параметров α', $p_0(\alpha'/\alpha)^{-\frac{1}{2\nu}}$

$$I_0(\alpha'/\alpha)^{-\frac{1}{2}}, \; I_1(\alpha'/\alpha)^{-\frac{1}{2}}, \; k(\alpha'/\alpha)^{-\frac{1}{2}}, \; T_0, \; T_s.$$

Пусть для некоторого набора параметров p_0^*, I_0^*, I_1^*, k^*, α^* задача (1)—(5) не имеет решений, что соответствует погасанию пороха. Из соотношений (6) видно, что при более резком изменении светового потока $\alpha'(\alpha'<\alpha^*)$ режим погасания реализуется для

$$I_0' = (\alpha'/\alpha)^{-\frac{1}{2}}I_0^* > I_0^*, \; I_1' = (\alpha'/\alpha)^{-\frac{1}{2}}I_1^* > I_1^*,$$
$$p_0' = (\alpha'/\alpha)^{-\frac{1}{2\nu}}p_0^* > p_0^* \, (\nu > 0), \; k' = (\alpha'/\alpha)^{-\frac{1}{2}}k^* > k^*. \tag{7}$$

Соотношения (7) показывают, что если порох с показателем прозрачности k^*, горящей при давлении p_0^*, гаснет при изменении светового потока, поглощающегося в к-фазе, от величины I_0^* до I_1^* по закону (3) с характерным временем изменения α^*, то менее прозрачный порох ($k'>k^*$) будет погасать при более резком изменении светового потока (характерное время изменения светового потока α' в этом случае равно $\alpha'=\alpha(k^*/k')^2$) от величины $I_0' > I_0^*$ до $I_1' > I_1^*$. При этом относительная глубина спада светового потока остается прежней $I_1'/I_0' = I_1^*/I_0^*$, а давление, при котором осуществляется режим погасания, может быть как более высоким $p_0' > p_0^*$ (для $\nu>0$), так и более низким $p_0' < p_0^*$ (для $\nu<0$), чем в случае пороха с показателем прозрачности k^*. Аналогичные выводы могут быть сделаны относительно условий потухания пороха с меньшим, чем k^*, показателем прозрачности. В этом случае знаки всех неравенств (7) необходимо заменить на обратные, а изменение светового потока будет более плавным, чем в случае пороха с показателем прозрачности k^*.

Отметим, что соотношения подобия (6) сохраняют свою силу в задаче о нестационарном горении пороха при экспоненциальном изменении давления и наличии постоянного светового потока $I(t)=I_0$, падающего на горящую поверхность. В этом случае соотношение (3) следует заменить законом изменения давления

$$p(t) = p_1 + (p_0 - p_1)\exp(-t/\alpha). \tag{8}$$

Здесь p_0 и p_1 — соответственно начальное и конечное значения давления. В частном случае $I(t) \equiv 0$, когда задача (1), (2), (4), (5), (8) сводится к задаче о нестационарном горении пороха при экспоненциальном изменении давления, соотношения подобия (6) обычно используют при записи задачи в безразмерных переменных и позволяют из решения задачи (1), (2), (4), (5), (8) для некоторого набора параметров α, p_0, p_1 простым пересчетом получить решение этой же задачи для параметров α', $p_0' = p_0 (\alpha'/\alpha)^{-\frac{1}{2\nu}}$, $p_1' = p_1 (\alpha'/\alpha)^{-\frac{1}{2\nu}}$. Например, в работе [5] выполнен соответствующий анализ для закона изменения давления

$$\frac{p}{p_0} = \exp(-t/\alpha), \quad 0 < t < t_1, \tag{9}$$

$$p = p_1 \equiv p_0 \exp(-t_1/\alpha), \quad t_1 < t < \infty.$$

Отметим, что соотношения (6) останутся справедливыми для любого закона изменения светового потока (или давления), в котором аргументом является величина типа t/α. Подобие решений не зависит также от вида функции $f(T_0)$ в стационарном законе горения

$$u_0 = B p_0^{\nu} f(T_0) \tag{10}$$

и, в частности, справедливо для обычно используемых при обработке экспериментов экспоненциальной, линейной и дробно-линейной зависимостей стационарной скорости горения от начальной температуры [5, 6]. Очевидно, что вывод о подобии процессов горения будет справедлив и для результатов эксперимента в том случае, когда модель [1, 2] правильно описывает нестационарное горение конденсированной системы.

Рассмотрим теперь другой распространенный режим нестационарного горения — горение в полузамкнутом объеме, когда изменение давления вызывается изменением критического сечения сопла.

Уравнения, граничные и начальные условия могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = \varkappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \begin{array}{l} -\infty < x < 0, \\ 0 < t < \infty, \end{array} \tag{11}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{a}{V} (\rho u S - p A \sigma), \tag{12}$$

$$u = B p^{\nu} f \left[T_s - \frac{\varkappa}{u} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_0 \right], \tag{13}$$

$$\sigma = \sigma_1 + (\sigma_0 - \sigma_1) \exp(-t/\beta), \tag{14}$$

$$t = 0 : \sigma = \sigma_0, \; p = p_0 = \rho u_0 S / A \sigma_0, \; u_0 = B p_0^{\nu} f(T_0),$$

$$T(x) = T_0 + (T_s - T_0) \exp\left(\frac{u_0 x}{\varkappa} \right), \tag{15}$$

$$x = 0, \quad T = T_s, \quad x \to -\infty, \quad T \to T_0. \tag{16}$$

Здесь ρ — плотность пороха, a — константа, характеризующая свойства газов — продуктов сгорания, V — объем камеры, σ — критическое сечение сопла, A — коэффициент истечения, S — площадь горящей поверхности пороха.

Вводя вместо t, x, u, p, V, σ, σ_0, σ_1 новые величины

$$t' (\beta'/\beta) t, \; x' = (\beta'/\beta)^{\frac{1}{2}} x, \; u' = (\beta'/\beta)^{-\frac{1}{2}} u,$$

$$p' = (\beta'/\beta)^{-\frac{1}{2\nu}} p, \; V' = (\beta'\beta)^{\frac{1}{2\nu} + \frac{1}{2}} V, \tag{17}$$

$$\sigma' = (\beta'/\beta)^{\frac{1}{2\nu} - \frac{1}{2}}, \; \sigma_0' = (\beta'/\beta)^{\frac{1}{2\nu} - \frac{1}{2}} \sigma_0, \; \sigma_1' = (\beta'/\beta)^{\frac{1}{2\nu} - \frac{1}{2}} \sigma_1,$$

видим, что в новых переменных задача сохраняет свой прежний вид с той разницей, что показатель в законе изменения сечения сопла имеет значение $1/\beta'$ вместо $1/\beta$. Отсюда следует, что если имеется решение задачи (11) — (16) для V, σ_0, σ_1, β, то из него можно получить решение задачи в случае экспоненциального изменения сечения сопла с показателем $1/\beta'$ от $\sigma_0'=(\beta'/\beta)^{\frac{1}{2\nu}-\frac{1}{2}}\sigma_0$ до $\sigma_1'=(\beta'/\beta)^{\frac{1}{2\nu}-\frac{1}{2}}\sigma_1$ в камере объемом $V'=(\beta'/\beta)^{\frac{1}{2\nu}+\frac{1}{2}}$. Если при увеличении критического сечения сопла от σ_0 до σ_1 по закону (14) с показателем экспоненты $1/\beta$ в камере объема V наблюдается погасание, то при увеличении критического сечения сопла по экспоненциальному закону с показателем экспоненты $1/\beta'$ от $\sigma_0'=\sigma_0(\beta'/\beta)^{\frac{1}{2\nu}-\frac{1}{2}}$ до $\sigma_1'=\sigma_1(\beta'/\beta)^{\frac{1}{2\nu}-\frac{1}{2}}$ в камере объемом $V'=V(\beta'/\beta)^{\frac{1}{2\nu}+\frac{1}{2}}$ *также* будет наблюдаться погасание пороха. Соотношения подобия могут быть установлены и в случаях, когда при описании нестационарного горения конденсированной системы должно быть принято во внимание изменение температуры горящей поверхности. Обратимся к задаче о горении при экспоненциальном изменении давления. В соответствии с [8], чтобы учесть изменение температуры поверхности пороха, заменим условие $T_s=\text{const}$ на поверхности к-фазы уравнением

$$T_s = T_0 + B_1 p^{\mu} \exp\left\{\beta_1\left[T_s - \frac{\varkappa}{u}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0\right]\right\}. \tag{18}$$

Перейдем к новым переменным

$$t' = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)t,\quad x' = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}x,\quad u' = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}u, \tag{19}$$

$$p' = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{n}p,\quad B' = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{m}B,\quad B_1' = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{q}B_1$$

(B и B_1 — параметры, входящие в уравнения (10) и (18)). Если при этом n, m, и q удовлетворяют условиям

$$m + n\nu + \frac{1}{2} = 0, \tag{20}$$

$$q + n\mu = 0$$

(ν и μ — показатели степеней давления в законах горения (10) и (18)), то из решения задачи о нестационарном горении пороха с параметрами B, B_1, ν, μ при изменении давления от p_0 до p_1 с характерным временем изменения α можно получить простым пересчетом решение этой же задачи для пороха с параметрами $B(\alpha'/\alpha)^m$, $B_1(\alpha'/\alpha)^q$, ν, μ при изменении давления от $p_0(\alpha'/\alpha)^n$ до $p_1(\alpha'/\alpha)^n$ с характерным временем изменения давления α'.

Для закона горения, принятого во многих работах (например, [9]),

$$u = Bp^{\nu}f\left[T_s - \frac{\varkappa}{u}\left(\frac{\partial T}{x}\right)_0\right],$$
$$u = D\exp\left(-E/RT_s\right), \tag{21}$$

соотношения подобия имеют вид:

$$t' = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)t,\quad x' = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}x,\quad u' = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}u,$$
$$p' = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{n}p,\quad B' = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{m}B,\quad D' = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}D, \tag{22}$$

причем n и m должны удовлетворять условию

$$m + n\nu + \frac{1}{2} = 0. \tag{23}$$

Аналогично приведенным в данной работе примерам полезные соотношения подобия могут быть получены и в некоторых других задачах нестационарного горения конденсированных систем. Отметим, что эти соотношения могут быть использованы как для обобщения результатов расчетов и экспериментов, так и для экспериментальной проверки справедливости теорий нестационарного горения, предложенных в [1, 2, 10], и их модификаций.

Поступила в редакцию
4/II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, 1942, 12, 11—12.
2. Я. Б. Зельдович. ПМТФ, 1964, 3.
3. Б. В. Новожилов. ПМТФ, 1962, 5.
4. И. Г. Ассовский, А. Г. Истратов. ПМТФ, 1971, 5.
5. А. Г. Истратов, В. Б. Либрович, Б. В. Новожилов. ПМТФ, 1964, 3.
6. Ю. А. Гостинцев, А. Д. Марголин. НТПГВ, 1965, 1, 2.
7. В. Н. Маршаков, О. И. Лейпунский. ФГВ, 1967, 3, 2.
8. Б. Ф. Новожилов. ПМТФ, 1966, 5.
9. В. А. Фрост, В. Л. Юмашев. ПМТФ, 1973, 2.
10. Б. В. Новожилов. ПМТФ, 1965, 4.

УДК 662.612.3

ГОРЕНИЕ ТВЕРДОГО ГОРЮЧЕГО В ПОТОКЕ ГАЗООБРАЗНОГО ОКИСЛИТЕЛЯ

Ю. С. Кичин, С. А. Осветимский, Н. Н. Бахман

(Москва)

Горение блока твердого горючего в потоке газообразного окислителя рассматривалось в работах [1—5]. Подробно изучена зависимость скорости газификации горючего u [мм/с] от плотности потока окислителя ρv [2, 3] и от давления p [2, 4, 5]. Эти зависимости, а также зависимость u от характерного размера d принято аппроксимировать степенной функцией:

$$u=A(\rho v)^n p^\nu d^m. \qquad (1)$$

В работе [2] показано, что при $\rho v=\text{const}$ показатель ν снижается с увеличением давления, а показатель n при $p=\text{const}$ уменьшается с увеличением ρv.

При горении в цилиндрическом канале интересен случай, когда отношение расхода окислителя $q_{\text{ок}}=(\rho v)\frac{\pi d^2}{4}$ к расходу горючего $q_{\text{г}}=\rho_{\text{г}} u\ \pi l d$ (где d, l — диаметр и длина канала, а $\rho_{\text{г}}$ — плотность горючего) остается постоянным при разгорании канала, а также при изменении расхода окислителя.

Рассмотрим случай, когда суммарный расход газа $q_{\text{ок}}+q_{\text{г}}$ в выходном сечении канала пропорционален давлению в канале. Исходную систему уравнений запишем в виде:

$$\frac{q_{\text{г}}}{q_{\text{ок}}}=\frac{\rho_{\text{г}} A(\rho v)^n p^\nu d^m \pi l d}{(\rho v)\frac{\pi d^2}{4}}=B=\text{const}, \qquad (2)$$