

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЗАГЛУБЛЕНИЯ ПЕРЕМЕШАННОГО СЛОЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

УДК 532.517.4

В. И. Квон, Д. В. Квон

Институт водных и экологических проблем СО РАН, 630090 Новосибирск

Предлагаются математическая формулировка и численное решение двумерной задачи о заглублении турбулентного перемешанного слоя в линейно стратифицированной среде под действием напряжения трения. При моделировании турбулентности используется  $(\epsilon - \epsilon)$ -модель, содержащая уравнения для энергии турбулентности и скорости ее диссипации. Проведено численное исследование поведения решения задачи при различных значениях параметра при силе плавучести в уравнении для скорости диссипации энергии турбулентности. Получено хорошее соответствие результатов расчета толщины перемешанного слоя с данными лабораторного эксперимента Като и Филлипса [1].

В теплые сезоны глубокие водоемы обычно стратифицированы. Верхние слои воды в них подвергаются перемешиванию, обусловленному процессами, порождаемыми турбулентностью и конвекцией. Процессы турбулентного перемешивания в поверхностных слоях глубоких водоемов играют важную роль в формировании их термической структуры, в возникновении термоклина. Термоклин является слоем, препятствующим переносу кислорода и питательных веществ в водоемах. Тем самым он оказывает значительное влияние на функционирование водных экосистем. В [1] экспериментально изучается один из основных механизмов, порождающих верхний перемешанный слой, а именно генерация турбулентности за счет касательного напряжения, приложенного к водной поверхности, и развитие турбулентного движения в устойчиво стратифицированной жидкости. В [2-4] выполнено математическое моделирование процессов турбулентного перемешивания в условиях лабораторного эксперимента [1] в предположении об однородности гидродинамических параметров по длине лотка. В [5] сделана попытка снять ограничение об однородности этих параметров по длине лотка, однако только для замкнутого лотка с условием непротекания на его торцевых сечениях.

В данной работе предлагается задача, более точно отражающая течение в круговом лотке. На торцевых сечениях ставятся условие свободного протекания на выходной границе и условие того, что течение на входной границе является непрерывным продолжением течения на выходе из рассматриваемой области определения решения задачи. Процессы вертикального турбулентного перемешивания описываются на основе полной  $(\epsilon - \epsilon)$ -модели, а коэффициенты горизонтального турбулентного обмена определяются по формуле Ричардсона. Кроме того, эта постановка задачи учитывает напряжение трения боковых стенок, возможность влияния которых на толщину перемешанного слоя указывается в [6].

**Постановка задачи.** Течение воды в условиях лабораторного эксперимента, приведенного в [1], происходит в узком длинном лотке. Поэтому к нему применим подход, при котором возможно осреднение исходных уравнений движения и переноса соли по ширине лотка в радиальном направлении [7]. Тогда уравнения импульса, сохранения массы и уравнение для плотности соленой воды имеют вид [7, 8]

$$\frac{\partial b u_1}{\partial t} + \frac{\partial b u_1 u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b u_1 u_2}{\partial x_2} = -g b \frac{\partial}{\partial x_1} \left( z + \frac{1}{\rho_0} \int_{x_2}^z \rho dx \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} b K_h \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} b K_v \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - 2r |u_1| u_1; \quad (1)$$

$$\frac{\partial bu_1}{\partial x_1} + \frac{\partial bu_2}{\partial x_2} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial b\rho}{\partial t} + \frac{\partial bu_1\rho}{\partial x_1} + \frac{\partial bu_2\rho}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} bK_{hs} \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} bK_{vs} \frac{\partial \rho}{\partial x_2}, \quad (3)$$

где  $t$  — время;  $x_1$  и  $x_2$  — оси декартовой системы координат (ось  $x_2$  направлена вертикально вверх);  $u_1$  и  $u_2$  — компоненты скорости по  $x_1$  и  $x_2$  соответственно;  $\rho$  — плотность водного раствора соли;  $b$  — ширина лотка;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $z$  — отметка уровня водной поверхности;  $K_h$  и  $K_v$  ( $K_{hs}$  и  $K_{vs}$ ) — коэффициенты суммарной (турбулентной и молекулярной) вязкости (диффузии соли) соответственно в горизонтальном  $h$  и вертикальном  $v$  направлении;  $r$  — коэффициент сопротивления трения боковых стенок.

Заметим, что уравнение для плотности (3) вытекает из диффузионного уравнения переноса соли в предположении о линейной зависимости между плотностью раствора и концентрацией соли. Кроме того, коэффициенты турбулентного переноса тепла и соли принимаются одинаковыми.

Коэффициенты вертикального турбулентного обмена определяются с привлечением уравнений для энергии турбулентности  $e$  и скорости ее диссипации  $\epsilon$  [9, 10]:

$$\frac{\partial be}{\partial t} + \frac{\partial bu_1e}{\partial x_1} + \frac{\partial bu_2e}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} bK_{he} \frac{\partial e}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} bK_{ve} \frac{\partial e}{\partial x_2} + b(P - G) - b\epsilon; \quad (4)$$

$$\frac{\partial b\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial bu_1\epsilon}{\partial x_1} + \frac{\partial bu_2\epsilon}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} bK_{h\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} bK_{v\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_2} + c_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{e} b(P - (1 - c_{3\epsilon})G) - c_{2\epsilon} b \frac{\epsilon^2}{e}. \quad (5)$$

Здесь  $K_{he}$  ( $K_{h\epsilon}$ ) и  $K_{ve}$  ( $K_{v\epsilon}$ ) — коэффициенты суммарной диффузии энергии турбулентности (скорости ее диссипации) в горизонтальном  $h$  и вертикальном  $v$  направлении;  $P = K(\partial u_1/\partial x_2)^2$ ;  $G = -g(\alpha_s/\rho_0)K(\partial \rho/\partial z)$ ; коэффициенты турбулентного обмена определяются по формулам [9, 10]  $K = c_\mu e^2/\epsilon$ ,  $K_v = \nu + K$ ,  $K_{vs} = \nu_s + \alpha_s K$ ,  $K_{ve} = \nu + \alpha_e K$ ,  $K_{v\epsilon} = \nu + \alpha_\epsilon$ ;  $\nu$  и  $\nu_s$  — молекулярные вязкость и коэффициент диффузии соли;  $c_\mu = 0,09$ ;  $\alpha_s = 0,8$ ;  $\alpha_e = 1,0$ ;  $\alpha_\epsilon = 0,77$ ; значения остальных констант приняты стандартными:  $c_{1\epsilon} = 1,44$ ,  $c_{2\epsilon} = 2,0[1,0 - 0,3 \exp(-Re_T^2)]$ ,  $Re_T = e^2/(\nu\epsilon)$ ,  $c_{3\epsilon} = 0,8$ . Суммарные коэффициенты горизонтального обмена  $K_h$ ,  $K_{hs}$ ,  $K_{he}$ ,  $K_{h\epsilon}$  принимаются постоянными. Их численные значения приводятся ниже.

Для системы уравнений (1)–(5) принимаются следующие краевые условия:

— на торцевых сечениях ( $x = x_L$  — левое сечение, где вода втекает в рассматриваемую область,  $x_R$  — правое сечение, где вода вытекает из нее)

$$\varphi(t, x_L, x_2) = \varphi(t, x_R, x_2) \quad (\varphi = (u_1, \rho, e, \epsilon)); \quad (6)$$

$$\partial \varphi / \partial x_1 = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = x_R; \quad (7)$$

— на водной поверхности при  $x_2 = z$

$$K_v \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\tau_w}{\rho}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial e}{\partial x_2} = 0, \quad \epsilon = c_\epsilon \frac{e^{3/2}}{y^0}; \quad (8)$$

— на дне при  $x_2 = 0$

$$K_v \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = k_b |u_1| u_1, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x_2} = 0, \quad u_2 = 0, \quad \frac{\partial e}{\partial x_2} = 0, \quad \epsilon = c_\epsilon \frac{e^{3/2}}{y_0}. \quad (9)$$

Здесь  $y^0$  и  $y_0$  — шероховатости водной поверхности и дна соответственно;  $k_b = 0,14$ ;  $c_\epsilon = 0,314$  [11].

Следует отметить, что в рассматриваемом физическом эксперименте на водной поверхности было приложено постоянное касательное напряжение  $\tau_w$  путем перемещения

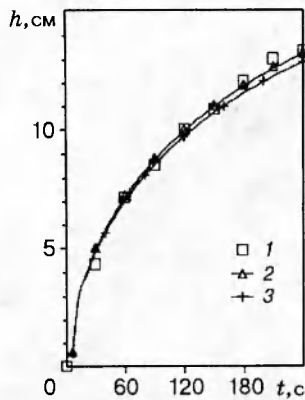


Рис. 1

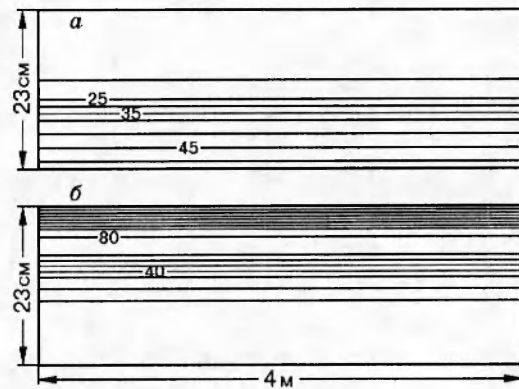


Рис. 2

крышки кольцевого лотка. Поэтому в постановке задачи полагается постоянной отметка водной поверхности. Поскольку течение воды исследуется в кольцевом лотке [1], то в схеме течения левое и правое торцевые сечения отвечают одному и тому же произвольно выбранному вертикальному поперечному сечению лотка. Условие (7) означает свободное протекание жидкости на выходном торцевом сечении, а (6) — непрерывное продолжение течения на входном торцевом сечении.

Помимо краевых условий (6)–(9) для системы (1)–(5) необходимо задать начальные условия, соответствующие состоянию покоя.

**Результаты численных расчетов.** Численное решение поставленной задачи строится на разнесенной  $C$ -сетке Аракавы [12]. При этом скалярные величины  $\rho$ ,  $e$ ,  $\varepsilon$  определяются в центральных точках разностной сетки, а компоненты скорости — на гранях элементов этой сетки. Способ аппроксимации источниковых слагаемых в уравнениях (4) и (5) с его тестированием на простом примере течения приведен в [11]. Горизонтальная компонента скорости вычисляется с использованием метода расщепления [13]. На первом дробном шаге в центральных точках производится расчет изменений горизонтального импульса за счет адвекции и диффузии без учета сил давления, на втором дробном шаге происходит адаптация полей скорости к распределению давления на гранях элементов разностной сетки. Напомним, что распределение давления принимается гидростатическим, поэтому оно определяется распределением плотности (при постоянном уровне). Далее, члены горизонтальной адвекции и горизонтальной диффузии, а также вертикальные коэффициенты вычисляются явно (с известного слоя по времени). Используется метод прогонки по вертикальному направлению.

Напомним, что лабораторные эксперименты проведены при постоянном касательном напряжении у водной поверхности прямо под крышкой лотка. В начальный момент времени соленая вода находилась в покое и имела линейное распределение плотности по всей глубине. Для моделирования выполнен расчет при градиенте плотности  $\partial\rho/\partial x_2 = 1,92 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>4</sup> и напряжении трения на крышке лотка  $\tau_w = 0,995$  дин/см<sup>2</sup>, при глубине воды  $h = 0,23$  м и длине лотка 4 м. Значения суммарных коэффициентов горизонтального обмена  $K_h$ ,  $K_{hs}$ ,  $K_{he}$  и  $K_{he}$  полагались равными между собой и вычислялись по формуле Ричардсона  $K_h = cl^{4/3}$ , где значение  $l$  принято равным шагу сетки в горизонтальном направлении (параметризация подсеточной турбулентности), числовой коэффициент  $c = 0,01$  см<sup>2/3</sup>/с [14],  $K_h = 5,6 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с, шаг по времени 0,5 с, число точек разностной сетки по глубине лотка 40, по длине 20,  $r = 1,32 \cdot 10^{-3}$ . Уменьшение шага по времени в 2 раза практически не повлияло на результаты расчетов.

На рис. 1 приведены данные измерений [1] (точки 1) и результаты расчетов изменений толщины перемешанного слоя в середине лотка при  $c_{3\varepsilon} = 0,8$  [10] и 1,0 [15] (кривые 2 и 3) в уравнении для диссипации энергии турбулентности. При  $c_{3\varepsilon} = 0,8$  и 1,0 кривые хорошо

соответствуют экспериментальным данным и мало между собой отличаются, но более предпочтительный результат дает расчет при  $s_{3\epsilon} = 0,8$ .

На рис. 2 показаны распределения разности плотности (а)  $\rho - \rho_0$  ( $\rho$ , кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>) и отношения коэффициентов турбулентной и молекулярной вязкости (б) в вертикальной плоскости в момент времени  $t = 240$  с при  $s_{3\epsilon} = 0,8$ . Все изолинии приведены с равными интервалами. Поведение изолиний плотности и коэффициента турбулентной вязкости по длине лотка показывает практическую их однородность по длине.

Авторы выражают свою признательность О. Ф. Васильеву и О. Б. Бочарову за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (грант RM1000).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kato H., Phillips O. M. On the penetration of a turbulent layer in stratified fluid // J. Fluid Mech. 1969. V. 37, pt 4. P. 643–655.
2. Квон В. И. Об отношении коэффициентов турбулентной температуропроводности и турбулентной вязкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1979. Т. 15, № 6. С. 672–675.
3. Зиновьев А. Т., Яковенко С. Н. Моделирование вертикального турбулентного обмена в стратифицированном водоеме // Математические проблемы экологии. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1994. С. 37–42.
4. Левеллен В. Методы инвариантного моделирования // Турбулентность. Принципы и применение. М.: Мир, 1980. С. 269–310.
5. Васильев О. Ф., Квон В. И., Квон Д. В. Математическое моделирование индуцированных ветром течений в стратифицированном водоеме // Математические проблемы экологии. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1994. С. 27–36.
6. Price James F. On the scaling of stressdriven entrainment experiments // J. Fluid Mech. 1979. V. 90, N 3. P. 509–529.
7. Vasiliev O. F., Kvon V. I., Chernyshova R. T. Mathematical modeling of the thermal pollution of a water body // Proc. of the 15 Congress of IAHR. Istanbul, 1973. V. 2.
8. Васильев О. Ф., Квон В. И., Чернышева Р. Т. Температурно-стратифицированное течение в водоеме вытянутой формы // Гидротехническое строительство. 1974. № 4. С. 35–38.
9. Jones W. P., Launder B. E. The calculation of low Reynolds-number phenomena with a two-equation model of turbulence // Int. J. Heat Mass. Transfer. 1973. V. 16, N 6. P. 1119–1130.
10. Роди В. Модели турбулентности окружающей среды. Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984. С. 227–322.
11. Игнатова Г. Ш., Квон В. И. О гидродинамической схеме скольжения при турбулентном течении // Метеорология и гидрология. 1978. № 7. С. 50–54.
12. Backhaus J. O. A semi-implicit scheme for the shallow water equations for application to shelf sea modeling // Continental Shelf Research. 1983. V. 2, N 4. P. 243–254.
13. Марчук Г. И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеоздат, 1974.
14. Озмидов Р. В. Горизонтальная турбулентность и горизонтальный обмен в океане. М.: Наука, 1968.
15. Viollet P. L. On the numerical modeling of stratified flows // Physical processes in estuaries. Berlin: Springer-Verlag, 1988. P. 257–277.

Поступила в редакцию 26/IV 1995 г.,  
в окончательном варианте — 17/X 1995 г.