

**НАГРЕВ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА  
ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ  
В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ**

УДК 537.868:536

Д. Я. Бардзокас<sup>1</sup>, А. И. Зобнин<sup>2</sup>, В. З. Партон<sup>2</sup>,  
А. Л. Шаталов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Афинский национальный технический университет, Афины

<sup>2</sup>Московская государственная академия химического машиностроения,  
107884 Москва

Композиционные материалы на основе стеклянного, углеродного или борного волокна с эпоксидной смолой в качестве связующего широко применяются в авиационной, космической, ракетной технике и в машиностроении [1, 2]. Повышение качества таких композитов при одновременном облегчении технологических процессов возможно при использовании энергии электромагнитного поля сверхвысокой частоты (СВЧ) на стадиях сушки и отверждения [2]. Путем СВЧ-нагрева, т. е. объемного бесконтактного и легко управляемого энергоподвода, можно снизить в несколько раз длительность процессов сушки и полимеризации. Однако объемный нагрев с локальным тепловыделением, зависящим от электрофизических свойств компонентов, может сопровождаться местными перегревами с нежелательными последствиями для качества изделий. Выбор оптимальных режимов нагрева в поле СВЧ может быть сделан на основе расчета тепловых полей, возникающих в композите при таком нагреве, поскольку непосредственное экспериментальное определение тепловых полей вряд ли возможно.

В работе дано аналитическое решение задачи для однонаправленного композита с правильной укладкой волокон. Такая структура с точки зрения технологии простейшая и взята в качестве модельного объекта.

1. Рассматривается нагрев композиционного материала в квазиустановившемся электромагнитном поле (высокочастотном поле с медленно меняющейся амплитудой) [3]

$$\mathbf{E}_*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x})\chi(t) \exp(-i\omega t), \quad (1.1)$$

где  $|\partial\chi/\partial t| \ll \omega\chi$ ;  $|\partial^2\chi/\partial t^2| \ll \omega^2\chi$ . Сам композит моделируется идеальной периодической средой, являющейся объединением ячеек периодичности  $\alpha Y$  с характерным размером  $\alpha$ , малым по сравнению с размерами тела и длиной электромагнитных волн, вызывающих нагрев композита.

Температурное поле в таких условиях определяется из уравнения теплопроводности

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + D. \quad (1.2)$$

Здесь плотность  $\rho$ , удельная теплоемкость  $c$ , коэффициент теплопроводности  $\lambda$ , а также усредненная по периоду колебаний удельная мощность источников тепла  $D = (1/2)\chi^2(t)\omega\epsilon''_k E_k \bar{E}_k$  — быстро осциллирующие функции координат  $\mathbf{x}$  ( $\epsilon''_*$  — мнимая часть комплексной диэлектрической проницаемости  $\epsilon_*$ , в которой учитываются как проводимость, так и релаксация поляризации среды). В (1.2) и ниже суммирование проводится по повторяющимся индексам  $i, j, k = 1, 2, 3$ .

На границе  $\Gamma$  раздела фаз композита в случае идеального контакта должны выпол-

няться условия

$$[T] = 0, \quad \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] \nu_i = 0, \quad (1.3)$$

где  $[ ]$  — скачок величины;  $\nu$  — единичная нормаль  $\Gamma$ , направленная в сторону скачка.

2. Решение задачи (1.1)–(1.3) будем строить методом осреднения [4, 5] в виде рядов по малому параметру  $\alpha$ :

$$T(\mathbf{x}, t) = T_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \alpha T_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \alpha^2 T_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \dots \quad (2.1)$$

Здесь наряду с глобальными пространственными переменными  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$  вводятся локальные переменные  $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\alpha$ . Функции  $T_i$  периодические по переменной  $\mathbf{y}$  с ячейкой периодичности  $Y$ . Введем для краткости записи обозначение оператора

$$L_{\xi\eta}(T) = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \right).$$

Ограничиваясь рассмотрением макрооднородных сред, примем, что  $\rho, c, \lambda, \varepsilon_*$  являются  $Y$ -периодическими функциями только от переменной  $\mathbf{y}$ .

Удельная мощность источника тепла  $D$  определяется из решения соответствующей задачи электродинамики [6]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots,$$

откуда следует

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = D^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha D^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (2.2)$$

$$(D^{(0)}) = (1/2) \chi^2 \omega \varepsilon_*'' E_i^{(0)} \overline{E_i^{(0)}}, \quad E_i^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\delta_{ij} + \Phi_{j|i}(\mathbf{y})) \langle E_j^{(0)} \rangle(\mathbf{x}).$$

Здесь и далее дифференцирование по  $y_i$  обозначается вертикальной чертой ( $|i$ ), а дифференцирование по  $x_i$  — запятой ( $,i$ ).

Функции  $\Phi_j(\mathbf{y})$  являются  $Y$ -периодическими решениями локальной задачи электродинамики:

$$(\varepsilon_* \Phi_{j|i})|i + \varepsilon_{*|j} = 0, \quad [\Phi_i]|_{\Gamma} = 0, \quad [\varepsilon^*(\delta_{ij} + \Phi_{j|i})]|_{\Gamma} \nu_i = 0. \quad (2.3)$$

Скобки  $\langle \rangle$  означают среднюю по объему ячейки  $|Y|$  величину, например,

$$\langle D^{(0)} \rangle(\mathbf{x}) = \frac{1}{|Y|} \int_Y D^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \frac{1}{2} \chi^2 \omega \langle \Delta_{ij} \rangle \langle E_i^{(0)} \rangle(\mathbf{x}) \langle E_j^{(0)} \rangle(\mathbf{x}) \quad (2.4)$$

$$(\Delta_{ij}(\mathbf{y}) = \varepsilon_*''(\mathbf{y})(\delta_{ij} + \Phi_{i|j})(\delta_{ij} + \Phi_{j|i}).$$

Подстановка (2.1) и (2.2) в уравнение (1.2) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях  $\alpha^{-2}, \alpha^{-1}, \alpha^0$  приводят соответственно к равенствам

$$L_{yy} T_0 = 0; \quad (2.5)$$

$$L_{yy} T_1 = -(L_{yx} T_0 + L_{xy} T_0); \quad (2.6)$$

$$L_{yy} T_2 = \rho c \frac{\partial T_0}{\partial t} - D^{(0)} - (L_{yx} T_1 + L_{xy} T_1 + L_{xx} T_0). \quad (2.7)$$

Из (2.5) следует, что  $T_0$  не зависит от локальных переменных  $\mathbf{y}$ :

$$T_0 = T_0(\mathbf{x}, t). \quad (2.8)$$

С учетом (2.8) уравнение (2.6) запишем как

$$L_{yy}T_1 = -\lambda_{|i}T_{0,i}; \quad (2.9)$$

$Y$ -периодическое решение (2.9) имеет вид

$$T_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi_j(\mathbf{y})T_{0,j}(\mathbf{x}), \quad (2.10)$$

где  $\Phi_j(\mathbf{y})$  ( $j = 1, 2, 3$ ) — периодическое решение уравнений

$$(\lambda\Phi_{j|i})_{|i} + \lambda_{|j} = 0, \quad (2.11)$$

которые отличаются от уравнений электродинамики (2.3) только заменой  $\epsilon_*(\mathbf{y})$  на  $\lambda(\mathbf{y})$ . С учетом (2.8) и (2.10) уравнение (2.7) принимает вид

$$L_{yy}T_2 = \rho c \frac{\partial T_0}{\partial t} - D^{(0)} - T_{ij}(\mathbf{y})T_{0,ij} \quad (T_{ij}(\mathbf{y}) = \lambda_{|i}\Phi_j + 2\lambda\Phi_{j|i} + \lambda\delta_{ij}). \quad (2.12)$$

Усредняя (2.12) по объему ячейки и принимая во внимание  $Y$ -периодичность  $\Phi_j(\mathbf{y})$ , приходим к уравнению теплопроводности для эквивалентной однородной среды:

$$\langle \rho c \rangle \frac{\partial T_0}{\partial t} = \hat{\lambda}_{ij}T_{0,ij} + \langle D^{(0)} \rangle \quad (2.13)$$

( $\hat{\lambda}_{ij} = \langle \lambda(\delta_{ij} + \Phi_{j,i}) \rangle$  — эффективный коэффициент теплопроводности композита).

Исключая из (2.12) и (2.13) величину  $\partial T_0/\partial t$  и учитывая выражение (2.4), получим

$$L_{yy}T_2 = \left( \frac{\rho c}{\langle \rho c \rangle} \hat{\lambda}_{ij} - T_{ij} \right) T_{0,ij} + \frac{1}{2} \chi^2 \omega N_{ij} \langle E_i^{(0)} \rangle \langle \bar{E}_i^{(0)} \rangle \quad (2.14)$$

$$(N_{ij} = N_{ij}(\mathbf{y}) = \frac{\rho c}{\langle \rho c \rangle} \langle \Delta_{ij} \rangle - \Delta_{ij}).$$

Решение уравнения (2.14) можно представить в виде

$$T_2 = T_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi_{ij}T_{0,ij} + \frac{1}{2} \chi^2 \omega \nu_{ij} \langle E_i^{(0)} \rangle \langle \bar{E}_j^{(0)} \rangle, \quad (2.15)$$

где  $Y$ -периодические функции  $\Phi_{ij} = \Phi_{ij}(\mathbf{y})$  и  $\nu_{ij} = \nu_{ij}(\mathbf{y})$  являются решениями уравнений

$$L_{yy}\Phi_{ij} = \frac{\rho c}{\langle \rho c \rangle} \hat{\lambda}_{ij} - T_{ij}; \quad (2.16)$$

$$L_{yy}\nu_{ij} = N_{ij}. \quad (2.17)$$

Нетрудно убедиться в том, что условие теоремы существования и единственности решений локальных задач [4], сводящееся к равенству нулю среднего значения правой части, выполняется для уравнений (2.3), (2.11), (2.16), (2.17).

Подводя итог, получим, что распределение температуры в композитном материале имеет вид

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = T_0(\mathbf{x}, t) + \alpha \Phi_i(\mathbf{y})T_{0,i}(\mathbf{x}, t) + \alpha^2 \left[ \Phi_{ij}(\mathbf{y})T_{0,ij}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \chi^2(t) \omega \nu_{ij}(\mathbf{y}) \langle E_i^{(0)} \rangle(\mathbf{x}) \langle \bar{E}_j^{(0)} \rangle(\mathbf{x}) \right] + \dots \quad (2.18)$$

Первый член в правой части (2.18) представляет собой усредненное по объему структурной ячейки значение температуры  $T_0(\mathbf{x}, t) = \langle T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \rangle$ , или, другими словами, поле температур в эквивалентном однородном материале с эффективными характеристиками  $\hat{\lambda}_{ij}$ . Последующие члены есть локальные поправки разного порядка малости к  $T_0(\mathbf{x}, t)$ , каждая из которых имеет нулевое среднее значение по объему ячейки периодичности  $Y$ .

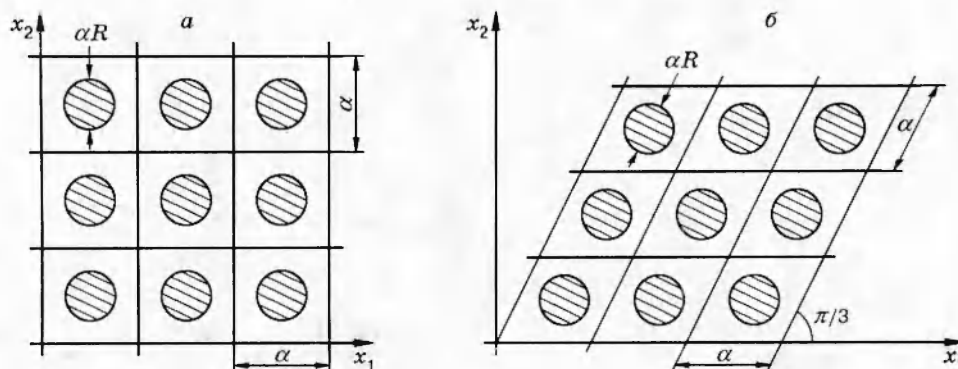


Рис. 1

Отметим, что в макронеравномерных температурных полях, где  $T_{0,i} \neq 0$ , поправка имеет порядок  $\alpha$  и определяется эффективными характеристиками материала  $\hat{\lambda}_{ij}$ ,  $\langle \rho c \rangle$ ,  $\langle \Delta_{ij} \rangle$ , в макроравномерных температурных полях, где  $T_{0,i} = T_{0,ij} = 0$ , она имеет порядок  $\alpha^2$  и зависит от распределения источников по ячейке:

$$T = T(\mathbf{y}, t) = T_0(t) + \frac{1}{2} \alpha^2 \chi^2(t) \omega \nu_{ij}(\mathbf{y}) \langle E_i^{(0)} \rangle \langle \bar{E}_j^{(0)} \rangle + \dots \quad (2.19)$$

Условия на границе  $\Gamma$  раздела фаз композита можно получить из (1.3) и (2.18):

$$[\Phi_i] = 0, \quad [\lambda(\delta_{ij} + \Phi_{j|i})] \nu_i = 0; \quad (2.20)$$

$$[\Phi_{ij}] = 0, \quad [\lambda(\Phi_k \delta_{ij} + \Phi_{j|k|})] \nu_i = 0; \quad (2.21)$$

$$[\nu_{ij}] = 0, \quad [\lambda \nu_{j|k|i}] \nu_i = 0. \quad (2.22)$$

**3.** Рассмотрим идеализированный однонаправленный композит, волокна которого имеют круговое поперечное сечение радиуса  $\alpha R$ , а оси их проходят через центры ячеек периодичности  $Y$  перпендикулярно плоскости  $x_1, x_2$ . Ограничимся двумя случаями правильной укладки волокон, образующих в поперечном сечении правильную квадратную (рис. 1,а) или правильную треугольную (рис. 1,б) решетку, их ячейками периодичности в локальной системе координат  $y_1, y_2$  служат единичный квадрат или ромб с единичной стороной и острым углом в  $60^\circ$  (рис. 2,а,б).

В дальнейшем будем считать, что матрица  $Y_1$  и волокно  $Y_2$  являются однородными, причем тепловыделение происходит только в волокнах, т. е.  $\lambda(\mathbf{y}) = \lambda_1 = \text{const}$ ,  $\varepsilon_*''(\mathbf{y}) = 0$  ( $\mathbf{y} \in Y_1$ ),  $\lambda(\mathbf{y}) = \lambda_2 = \text{const}$ ,  $\varepsilon_*''(\mathbf{y}) = \varepsilon_2'' = \text{const}$  ( $\mathbf{y} \in Y_2$ ).

Ввиду полной аналогии локальных задач электродинамики (2.3) и теплопроводности (2.11), (2.20) решения описываются одними и теми же гармоническими функциями  $\Phi_1(y_1, y_2)$  и  $\Phi_2(y_1, y_2)$ , построенными в [6]. Например, для волокна  $Y_2$

$$\Phi_1^{(2)} = R \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1}^{(2)} (r/R)^{2k+1} \cos(2k+1)\theta, \quad (3.1)$$

$$\Phi_2^{(2)} = R \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_{2k+1}^{(2)} (r/R)^{2k+1} \sin(2k+1)\theta,$$

где  $A_{2k+1}^{(2)}$  — постоянные, вычисленные приближенно в [6] и зависящие от радиуса волокна  $R$ , объемного содержания волокон  $v = |Y_2|/|Y|$ , а также от безразмерного параметра  $\varkappa = (\varepsilon_{*1} - \varepsilon_{*2})/(\varepsilon_{*1} + \varepsilon_{*2})$  для задачи электродинамики или от  $\varkappa = (\lambda_1 - \lambda_2)/(\lambda_1 + \lambda_2)$  для

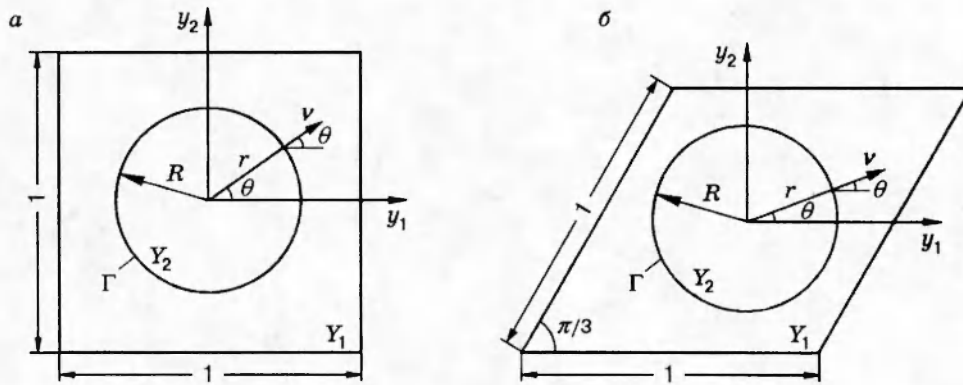


Рис. 2

задачи теплопроводности.

Используя соотношения (3.1), можно вычислить по формуле (2.4) удельную мощность тепловыделения  $\langle D^{(v)} \rangle$ . После интегрирования получим, что среди  $\langle \Delta_{ij} \rangle$  отличны от нуля только

$$\langle \Delta_{11} \rangle = \langle \Delta_{22} \rangle = \varepsilon_2'' v \Delta, \quad \langle \Delta_{33} \rangle = \varepsilon_2'' v \quad (\Delta = 1 + A_1^{(2)} + A_1^{(2)} + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_{2n+1}^{(2)} \bar{A}_{2n+1}^{(2)}).$$

Поэтому

$$\langle D^{(0)} \rangle = (1/2) \chi^2 \omega \varepsilon_2'' v (\Delta \langle E_1^{(0)} \rangle^2 + \Delta \langle E_2^{(0)} \rangle^2 + \langle E_3^{(0)} \rangle^2).$$

Если воспользоваться решениями [6] для правильных упаковок волокон, то для  $\Delta$  имеем приближенное выражение

$$\Delta = 1 + (2k-1) g_k^2 R^{4k} B + O(R^{8k}),$$

где

$$\bar{B} = \frac{\varkappa^2(1+\varkappa)}{(1+\varkappa v)^2} + \frac{\varkappa^2(1+\varkappa)}{(1+\bar{\varkappa}v)^2} + \frac{\varkappa \bar{\varkappa}(1+\varkappa)(1+\varkappa)}{(1+\varkappa v)(1+\bar{\varkappa}v)};$$

$k = 2$  для квадратной и  $k = 3$  для треугольной укладки волокон; значения констант  $g_k$  приведены в [7];  $\varkappa = (\varepsilon_{*1} - \varepsilon_{*2}) / (\varepsilon_{*1} + \varepsilon_{*2})$  (по  $k$  не суммировать).

Эффективные коэффициенты теплопроводности композита  $\hat{\lambda}_{ij}$  можно записать, исходя из результатов [6] и упомянутой аналогии:

$$\hat{\lambda}_{11} = \hat{\lambda}_{22} = \lambda_1 \left( \frac{1-\varkappa v}{1+\varkappa v} - A \frac{\varkappa^3 v^{2k+1}}{(1+\varkappa v)^2} \right) + O(v^{4k}), \quad \hat{\lambda}_{33} = \lambda_1(1-v) + \lambda_2 v, \quad \hat{\lambda}_{ij} = 0 \quad (i \neq j).$$

Здесь  $\varkappa = (\lambda_1 - \lambda_2) / (\lambda_1 + \lambda_2)$ ;  $A = 0,612$  и  $k = 2$  для квадратной, а  $A = 0,151$  и  $k = 3$  для треугольной укладки волокон.

4. Перейдем к оценке локальных перепадов температуры внутри элементарной ячейки композита в макроравномерном температурном поле (2.19).

Рассмотрим композит с правильной квадратной укладкой волокон, нагреваемый полем с электрической составляющей  $\mathbf{E}$ , направленной поперек волокон в направлении  $x_1$ :

$$T = T_0(t) + \frac{1}{2} \alpha^2 \chi^2(t) \omega \nu_{11}(\mathbf{y}) \langle E_1^{(0)} \rangle^2 + \dots \quad (4.1)$$

Для решения поставленной задачи требуется построить функцию  $\nu_{11}(\mathbf{y})$ , которая в матрице  $Y_1$  является двоякопериодической функцией, согласно (2.17), удовлетворяющей

уравнению Пуассона с постоянной правой частью

$$\lambda_1 \Delta \nu_{11}^{(1)} = A_1 = \text{const} \quad \left( A_1 = \frac{\rho_1 c_1}{\langle \rho c \rangle} \langle \Delta_{11} \rangle = \frac{\rho_1 c_1 v \varepsilon_2'' \Delta}{\langle \rho c \rangle} \right). \quad (4.2)$$

В волокне  $Y_2$   $\nu_{11}$  — регулярная функция, удовлетворяющая уравнению Пуассона с переменной правой частью

$$\lambda_2 \Delta \nu_{11}^{(2)} = A_2 - \varepsilon_2'' \varphi_2(r, \theta), \quad (4.3)$$

где  $A_2 = (\rho_2 c_2 v \varepsilon_2'' \Delta) / \langle \rho c \rangle$ ;

$$\varphi_2 = 1 + \Phi_{1|1}^{(2)} + \overline{\Phi_{1|1}^{(2)}} + \Phi_{1|1}^{(2)} \overline{\Phi_{1|1}^{(2)}} + \Phi_{1|2}^{(2)} \overline{\Phi_{1|2}^{(2)}}; \quad (4.4)$$

функция  $\Phi_1^{(2)}$  определяется формулой (3.2).

На границе раздела  $\Gamma$  ( $r = R$ ) должны выполняться условия (2.22), которые в данном случае сводятся к

$$\nu_{11}^{(1)} = \nu_{11}^{(2)}, \quad \lambda_z \frac{\partial \nu_{11}^{(2)}}{\partial r} = \lambda_z \frac{\partial \nu_{11}^{(1)}}{\partial r}. \quad (4.5)$$

К (4.2)–(4.5) следует добавить условие

$$\langle \nu_{11} \rangle = 0. \quad (4.6)$$

Если в (4.4) подставить представления (3.1), то получим

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & 1 + A_1^{(2)} + \overline{A_1^{(2)}} + A_1^{(2)} \overline{A_1^{(2)}} + 9A_3^{(2)} \overline{A_3^{(2)}} (r/R)^4 + 3(A_3^{(2)} + \overline{A_3^{(2)}} + A_1^{(2)} \overline{A_3^{(2)}} + \\ & + \overline{A_1^{(2)}} A_3^{(2)}) (r/R)^2 \cos 2\theta + 7(A_7^{(2)} + \overline{A_7^{(2)}} + A_1^{(2)} \overline{A_7^{(2)}} + \overline{A_1^{(2)}} A_7^{(2)}) (r/R)^6 \cos 6\theta + \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для композита с квадратной укладкой волокон выражение (4.7) с учетом вычисленных в [6] коэффициентов можно записать как

$$\varphi_2 = a + bR^8 + dR^8 (r/R)^4 - 3Ag_2 R^4 (r/R)^2 \cos 2\theta - 7Ag_4 R^8 (r/R)^6 \cos 6\theta + O(R^{12}) \quad (4.8)$$

(коэффициенты  $a, b, d, A$  в окончательное выражение (4.11) для  $T$  не входят, и поэтому формулы для них здесь не приведены).

Общее двоякопериодическое решение уравнения Пуассона (4.2) строится в виде суммы частного двоякопериодического решения уравнения Пуассона и произвольной двоякопериодической гармонической функции

$$\lambda_1 \nu_{11}^{(1)} = \frac{1}{4} A_1 (zz - \frac{2}{\pi} \text{Re } \nu(z)) + \sum_{k=0}^{\infty} D_{2k+2} \text{Re} \frac{P^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \quad (4.9)$$

где  $\nu(z) = \int \zeta(z) dz$ ;  $\zeta(z)$  и  $P(z)$  — функции Вейерштрасса. Регулярное решение уравнения Пуассона (4.3), записанное с учетом (4.8), имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_2 \nu_{11}^{(2)} = & \frac{1}{4} (A_2 - \varepsilon_2'' (a + bR^8)) r^2 - \frac{1}{36} \varepsilon_2'' d R^4 r^6 + \frac{1}{4} \varepsilon_2'' g_2 A R^2 r^4 \cos 2\theta + \\ & + \frac{1}{4} \varepsilon_2'' g_4 A R^2 r^8 \cos 6\theta + O(R^{12}) + \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k} (r/R)^{2k} \cos 2k\theta. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Подстановка (4.9) и (4.10) в условия (4.5) и (4.6) и приравнивание коэффициентов при  $\cos 2k\theta$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) приводят к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $D_2, D_4, \dots, C_0, C_2, C_4, \dots$ , зависящих от малого параметра  $R$  ( $0 < R < 1/2$ ). Анализ этой системы показывает, что все они с уменьшением  $R$

убывают не медленнее, чем  $R^4$ , за исключением коэффициента  $C_0$ , который неограниченно возрастает:  $C_0 = [-A_1/(2\pi)](\lambda_2/\lambda_1) \ln R$ . Если ограничиться только этим старшим членом разложения в (4.10), то  $\nu_{11}^{(2)} = [-A_1/(2\pi\lambda_1)] \ln R + \dots$ . В таком случае из (4.1) получим, что температура волокна выражается как

$$T = T_0(t) + \frac{\varepsilon_2'' \gamma}{4\lambda_1} \chi^2(t) \omega \alpha^2 R^2 \ln \frac{1}{R} \langle E_1^{(0)} \rangle^2 + \dots \quad (4.11)$$

Здесь

$$\gamma = \rho_1 c_1 / \langle \rho c \rangle = \rho_1 c_1 / (\rho_1 c_1 (1 - \pi R^2) + \rho_2 c_2 \pi R^2).$$

Из анализа (4.9) следует, что в матрице распределение температуры имеет вид

$$T = T_0(t) + \frac{\varepsilon_2'' \gamma}{4\lambda_1} \chi^2(t) \omega \alpha^2 R^2 \ln \frac{1}{r} \langle E_1^{(0)} \rangle^2 + \dots$$

5. Для примера рассмотрим полимерный композиционный материал из углеродного волокна с эпоксидной смолой в качестве связующего. Объемное содержание волокна в композите  $v = 0,6$ . Параметры волокна: плотность  $\rho_2 = 1700 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ , теплоемкость  $c_2 = 1,07 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ , радиус  $\alpha R = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ , фактор диэлектрических потерь  $\varepsilon_2'' = 4,1 \cdot 10^{-5} \text{ См} \cdot \text{с}/\text{м}$ . Характеристики эпоксидной смолы: плотность  $\rho_1 = 2168 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ , теплоемкость  $c_1 = 0,5 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ , теплопроводность  $\lambda_1 = 0,21 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ . Композит нагревается в электромагнитном поле со средней напряженностью электрической составляющей  $E = 100 \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$  и частотой  $\omega = 2,45 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ . Амплитуда поля не меняется во времени.

Подстановка перечисленных значений в (4.11) дает неоднородность температуры волокна  $\Delta T = 1,31 \cdot 10^{-5} \text{ К}$ . Это значение исчезающе мало в сравнении со средней температурой  $T_0(t)$ , которая по технологии термообработки должна составлять  $50 \div 70 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Увеличение радиуса волокна до  $\alpha R = 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$  повышает неоднородность температуры ячейки периодичности до  $\Delta T = 1,9 \text{ К}$ . Такая неоднородность заметна, но технологически еще приемлема, так как составляет  $0,3\%$  от нижней границы допустимого диапазона температур. В этих же условиях увеличение напряженности поля, например, в 2 раза (что соответствует повышению подводимой СВЧ-энергии в 4 раза и эквивалентному повышению скорости нагрева) увеличивает неоднородность до  $\Delta T = 7,6 \text{ К}$ , что превышает  $10\%$  от верхнего предела допустимого диапазона и технологически лежит на грани приемлемого, т. е. дальнейшее повышение подводимой мощности недопустимо.

Экспериментальная проверка полученных величин перегрева проведена следующим образом. Однонаправленный композит углеродного волокна на неотвержденной эпоксидной смоле (с вышеперечисленными характеристиками) радиусом волокон  $0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$  и общей толщиной  $(2 \div 3) \cdot 10^{-3} \text{ м}$  в виде пластины размером  $0,2 \times 0,1 \text{ м}$  располагали на раскрыве рупора СВЧ-излучателя. Напряженность поля измеряли специальным датчиком. При облучении полем с напряженностью в диапазоне от  $50$  до  $200 \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$  отмечены однородная подсушка и полимеризация по всей ширине пластины. При превышении напряженности  $> 200 \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$  имеют место коробление пластины композита и локальные прожоги в ее толще.

Эти результаты свидетельствуют о применимости представленной математической модели для прогнозирования температурных полей при СВЧ-нагреве композитных материалов и для определения допустимых режимов СВЧ-воздействия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международной ассоциации содействия сотрудничеству с учеными независимых государств бывшего Советского Союза (грант INTAS-93-2600).



## ЛИТЕРАТУРА

1. Гуртовник И. Г., Спортсмен В. Н. Стеклопластики радиотехнического назначения. М.: Химия, 1987.
2. Крысин В. Н., Крысин М. В. Технологические процессы формования, намотки и склеивания конструкций. М.: Машиностроение, 1989.
3. Подстригач Я. С., Колодий Б. И. Температурные поля и напряжения при индукционном нагреве упругого слоя // Тепловые напряжения в элементах конструкций. 1970. Вып. 10. С. 208-214.
4. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука, 1984.
5. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
6. Зобнин А. И., Кудрявцев Б. А., Партон В. З. Уравнения Максвелла для неоднородной среды периодической структуры // Изв. АН АрмССР. Механика. 1990. Т. 43, № 1. С. 19-26.
7. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970.

*Поступила в редакцию 16/X 1995 г.*

---