

$= 0,45$, $\Theta_t = 0,36$) профиль скорости в кольцевом канале заметно деформируется. Распределение температуры на выходе из кольцевого канала (сечение $4 - m$) показано на рис. 4, б ($1 - \Theta = 0,36$, $2 - \Theta = 0,18$). При $\Theta_w = 0,18$, $\Theta_t = 0,36$, $\lambda = 1$ сепаратриса занимает положение 5 (см. рис. 1, направление течения показано сплошной линией), при $\Theta_w = 0,18$, $\Theta_t = 0,36$, $\lambda = 2,16$ — положение 6 (направление течения показано штриховой линией). Влияние неизотермичности течения на положение сепаратрисы несущественно.

Численный эксперимент, проведенный для оценки влияния расстояния между ФГ на картину течения, показал, что при уменьшении этого расстояния на δ сепаратриса смещается на $\sim \delta/2$ в сторону лучшего соответствия опытным данным. Исследовалось также влияние положения ФГ на расчетное положение сепаратрисы. Установлено, что расчетное положение сепаратрисы инвариантно относительно изменения положения ФГ при задании на них соответствующего профиля скорости. Выбранное положение ФГ (hk , op , см. рис. 1) представляется более приемлемым при изучении влияния неизотермичности на картину течения и удобным с точки зрения численной реализации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смагулов Ш., Оруханов М. К. Приближенный метод решения уравнений гидродинамики в многосвязных областях // ДАН СССР. — 1981. — Т. 260, № 5.
2. Госмен А. Д., Пан В. М., Ранчел А. К. и др. Численные методы исследования течений вязкой жидкости. — М.: Мир, 1972.
3. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980.
4. Berman A. S. Laminar flow in an annulus with porous walls // J. Appl. Phys. — 1958. — V. 29, N 1.

Поступила 22/X 1986 г.

УДК 624.131

АКУСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СЛОИСТОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

М. Г. Марков, А. Ю. Юматов

(Калинин)

Изучение распространения упругих волн в неоднородных насыщенных пористых средах представляет интерес как с точки зрения приложений в технике и геофизике, так и в теоретическом плане. Последовательное описание процессов распространения упругих волн в насыщенных пористых средах возможно в рамках теории Френкеля — Био [1—4]. Уравнения этой теории в пренебрежении эффектами термоупругости имеют вид

$$(1) \quad \begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} &= b \frac{\partial}{\partial t} (v_i - u_i) - \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}, \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} &= b \frac{\partial}{\partial t} (u_i - v_i) - \frac{\partial s}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

где u_i , v_i — компоненты векторов смещения скелета и флюида; ρ_{11} — эффективная плотность скелета, движущегося в заполнителе; ρ_{22} — эффективная плотность заполнителя, движущегося в пористой среде; $\rho_{12} < 0$ — присоединенная плотность жидкости; $P_{ij} = Ae\delta_{ij} + 2Ne_{ij} + Qe\delta_{ij}$; $s = Qe + Re$; $e = \text{div}u$; $\varepsilon = \text{div}v$; $e_{ij} = (1/2)(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$; A , N , Q , R — константы упругих связей пористой среды; коэффициент b характеризует трение за счет движения жидкости: $b = \mu\Phi^2/K_{пр}$ (μ — вязкость флюида, Φ — объемная пористость, $K_{пр}$ — коэффициент проницаемости).

Система (1) после введения двух скалярных потенциалов φ_1 и φ_2 продольных волн и векторного потенциала поперечной волны соотношениями

$$(2) \quad \mathbf{u} = \nabla\varphi_1 + \nabla\varphi_2 + \text{rot}\Psi;$$

$$(3) \quad \mathbf{v} = M_1\nabla\varphi_1 + M_2\nabla\varphi_2 + M_t\text{rot}\Psi$$

сводится для гармонических волн к системе двух скалярных уравнений Гельмгольца

$$(4) \quad \Delta\varphi_i + k_i^2\varphi_i = 0 \quad (i = 1, 2)$$

и векторному уравнению

$$(5) \quad \Delta\Psi + k_t^2\Psi = 0.$$

Здесь $M_i = (\gamma_{12} - \xi_i\sigma_{12} + i\gamma)/(-\gamma_{22} + \xi_i\sigma_{22} + i\gamma)$ ($i = 1, 2$); $k_i^2 = \xi_i(\omega/v_0)^2$; $v_0 = \sqrt{H/\rho}$; $H = A + 2N + 2Q + R$; $\rho = \rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22}$, а ξ_i — корни квадратного уравнения

$$(6) \quad \xi_i^2(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2) - \xi_i(\sigma_{11}\gamma_{22} + \sigma_{22}\gamma_{11} - 2\sigma_{12}\gamma_{12} - i\gamma) + \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 - i\gamma = 0,$$

в котором $\gamma_{11} = \rho_{11}/\rho$; $\gamma_{12} = \rho_{12}/\rho$; $\gamma_{22} = \rho_{22}/\rho$; $\gamma = -b/\rho\omega$; $\sigma_{11} = (A + 2N)/H$; $\sigma_{12} = Q/H$; $\sigma_{22} = R/H$. Волновое число поперечной волны k_t находится из соотношения $k_t^2 = \omega^2\rho/N[\gamma_{11} + \gamma_{12} + i\gamma(M_t - 1)]$ ($M_t = -(\gamma_{12} + i\gamma)/(\gamma_{22} - i\gamma)$).

Дисперсионное уравнение (6) имеет два различных корня, определяющих волновые числа продольных волн первого и второго рода [2, 3], которые распространяются в однородной среде независимо. Продольная волна первого рода соответствует приблизительно синфазному движению скелета и флюида, распространяется быстро и с небольшим затуханием. В противоположность этому в продольной волне второго рода движение скелета и флюида приблизительно противофазно. Поэтому ее затухание обычно велико, а регистрация требует специальных экспериментов. Образование продольных волн второго рода вблизи границ раздела приводит к диссипации энергии упругих колебаний и изменению характеристик отраженных и преломленных продольных волн первого рода и поперечных волн [3].

В [5] с использованием матричного метода Томсона — Хаскелла [6, 7] проведены расчеты коэффициентов отражения и прохождения сейсмической волны через систему, содержащую n различных пористых пластов.

В настоящей работе проведен расчет эффективных волновых чисел упругих волн, распространяющихся в пористой среде, представленной бесконечной структурой периодически чередующихся слоев с различными свойствами. Для однофазной упругой среды задача о распространении плоских упругих волн вдоль или поперек напластования решена в [8]. В дальнейшем результаты [8] обобщены в [9], где изучено распространение плоских квазипродольных и квазипоперечных волн в многослойных периодических структурах. Применим формализм, развитый в [9], для изучения акустических свойств периодически слоистой пористой среды.

Рассмотрим двумерную структуру, свойства которой периодически меняются вдоль оси z и одинаковы вдоль оси x . Распространение волн в каждом из слоев будет описываться уравнениями (4), (5), решение которых имеет вид

$$(7) \quad \varphi_i^{(m)} = B_{i1}^{(m)} \exp \left\{ i \left[\xi_i x + \alpha_i^{(m)} \left(z - \frac{h_m + h_{m+1}}{2} \right) \right] \right\} +$$

$$+ B_{i2}^{(m)} \exp \left\{ i \left[\xi_i x - \alpha_i^{(m)} \left(z - \frac{h_m + h_{m+1}}{2} \right) \right] \right\} \quad (i = 1, 2),$$

$$\Psi = \Psi_{\mathbf{n}_y} = C_1^{(m)} \exp \left\{ i \left[\xi x + \beta_m \left(z - \frac{h_m + h_{m+1}}{2} \right) \right] \right\} \mathbf{n}_y + \\ + C_2^{(m)} \exp \left\{ i \left[\xi x - \beta_m \left(z - \frac{h_m + h_{m+1}}{2} \right) \right] \right\} \mathbf{n}_{y\bar{x}}$$

где m и h_m — номер и толщина слоя; \mathbf{n}_y — единичный вектор направления y ; $B_{ik}^{(m)}, C_k^{(m)}$ — константы, определяемые из граничных условий; ξ — компонента волнового вектора в направлении x ; $\alpha_i^{(m)} = \sqrt{k_i^{(m)2} - \xi^2}$; $\beta_m = \sqrt{k_i^{(m)2} - \xi^2}$; множитель $\exp(-i\omega t)$ для краткости опущен.

На границах слоев должны выполняться краевые условия

$$(8) \quad \Gamma_{nn} = \Gamma'_{nn}, \quad \Phi's = \Phi's', \quad \Gamma_{n\tau} = \Gamma'_{n\tau}, \quad u_n = u'_n, \\ (1 - \Phi)u_n + \Phi v_n = (1 - \Phi')u'_n + \Phi'v'_n, \quad u_\tau = u'_\tau.$$

Здесь $\Gamma_{nn}, \Gamma_{n\tau}$ — нормальная и тангенциальная компоненты тензора полных напряжений, связанного с тензором напряжений Био P_{ij} соотношением $\Gamma_{ij} = P_{ij} + \delta_{ij}s$; первое и третье условия выражают непрерывность нормальных и тангенциальных компонент тензора напряжений, второе описывает равенство давлений в жидкости на границе раздела, четвертое и пятое выражают непрерывность нормальных смещений скелета и полных смещений соответственно, шестое описывает непрерывность тангенциальных смещений скелета на границе раздела.

На границе, разделяющей m -й и $(m-1)$ -й слой, имеет место матричное равенство, вытекающее из граничных условий (8):

$$(9) \quad D_{m-1}Z_{m-1}X_{m-1} = D_mZ_m^{-1}X_{m\bar{x}}$$

где X_m — вектор, содержащий постоянные, введенные соотношением (7); Z_m — диагональная матрица, ненулевые элементы которой $Z_m = \|\exp(i\alpha_1^{(m)}h_m/2), \exp(-i\alpha_1^{(m)}h_m/2), \exp(i\alpha_2^{(m)}h_m/2), \exp(-i\alpha_2^{(m)}h_m/2), \exp(i\beta_m h_m/2), \exp(-i\beta_m h_m/2)\|$, а элементы матрицы D_m имеют вид

$$D_{m11} = 2N^{(m)}\xi^2 - k_1^{(m)2} [A^{(m)} + 2N^{(m)} + Q^{(m)} + M_1^{(m)}(Q^{(m)} + R^{(m)})], \quad D_{m12} = \\ = D_{m11}, \quad D_{m13} = 2N^{(m)}\xi^2 - k_2^{(m)2} [A^{(m)} + 2N^{(m)} + Q^{(m)} + M_2^{(m)}(Q^{(m)} + R^{(m)})], \\ D_{m14} = D_{m13}, \quad D_{m15} = -2N^{(m)}\xi\beta_m, \quad D_{m16} = -D_{m15}, \\ D_{m21} = -k_1^{(m)2}(Q^{(m)} + M_1^{(m)}R)/\Phi_m, \quad D_{m22} = D_{m21}, \quad D_{m23} = -k_2^{(m)2}(Q^{(m)} + \\ + M_2^{(m)}R)/\Phi_m, \quad D_{m24} = D_{m23}, \quad D_{m25} = 0, \quad D_{m26} = 0, \quad D_{m31} = -2N^{(m)}\xi\alpha_1^{(m)}, \\ D_{m32} = 2N^{(m)}\xi\alpha_1^{(m)}, \quad D_{m33} = -2N^{(m)}\xi\alpha_2^{(m)}, \quad D_{m34} = 2N^{(m)}\xi\alpha_2^{(m)}, \\ D_{m35} = N^{(m)}(2\beta_m^2 - k_i^{(m)2}), \quad D_{m36} = N^{(m)}(2\beta_m - k_i^{(m)2}), \\ D_{m41} = D_{m42} = D_{m43} = D_{m44} = \xi, \quad D_{m45} = -\beta_m, \quad D_{m46} = \beta_m, \\ D_{m51} = -D_{m52} - \alpha_1^{(m)}, \quad D_{m53} = -D_{m54} - \alpha_2^{(m)}, \quad D_{m55} = \xi, \quad D_{m56} = \xi, \\ D_{m61} = \alpha_1^{(m)}(1 - \Phi_m + M_1^{(m)}\Phi_m), \quad D_{m62} = -D_{m61}, \quad D_{m63} = \alpha_2^{(m)}(1 - \Phi_m + M_2^{(m)}\Phi_m), \\ D_{m64} = -D_{m63}, \quad D_{m65} = \xi(1 - \Phi_m + M_1^{(m)}\Phi_m), \quad D_{m66} = \xi(1 - \Phi_m + M_2^{(m)}\Phi_m).$$

Применяя последовательно формулу (9) к границам различных слоев, имеем матричное равенство $X_m = Z_m D_m^{-1} D_{m-1} Z_{m-1}^{-1} D_{m-2}^{-1} \dots D_0 Z_0 X_0$, из которого, следуя [6], легко получить дисперсионное уравнение для волн в периодически слоистой пористой среде:

$$(10) \quad |\exp(iLa)E - T_{m-1}T_{m-2} \dots T_0| = 0,$$

где E — единичная матрица; L — период структуры; a — искомое эффективное волновое число; $T_m = D_m Z_m^2 D_m^{-1}$.

В отличие от дисперсионных уравнений для периодически слоистой упругой среды (10) имеет не 4, а 6 независимых корней, соответствующих распространению в направлении возрастания и убывания координаты z

двух квазипродольных волн и одной квазипоперечной. В случае падения волн нормально слоям уравнение (10) распадается на два независимых уравнения, одно из которых определяет волновые числа эффективных продольных волн первого и второго рода, а второе — поперечной волны. Необходимо подчеркнуть, что распространение эффективных продольных волн первого и второго рода в периодически слоистой насыщенной пористой среде не является независимым из-за их взаимной трансформации на границах слоев и поэтому описывается единым дисперсионным уравнением.

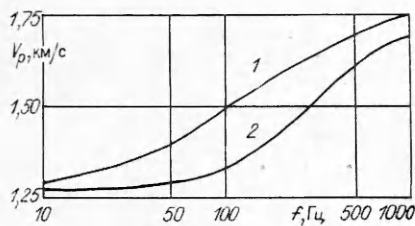
Решение дисперсионного уравнения (10) может быть найдено численными методами. Наибольший практический интерес представляет расчет эффективного волнового числа продольной волны первого рода, поэтому далее везде вместо термина «эффективная продольная волна первого рода» используется термин «эффективная продольная волна». В качестве первого примера приведем результаты расчета для случая, когда слои различаются только заполнителем пор, а эффективная продольная волна распространяется в направлении нормали к границам слоев. Аналогичные расчеты проведены в [10], где рассматривались одномерные деформации элемента пористой среды, содержащей слои с различными свойствами, без использования строгой теории [1–4].

Свойства скелета в наших расчетах соответствовали приведенным в [7] (скорости продольной и поперечной волн в сухом скелете $V_p = 1310$ м/с, $V_s = 870$ м/с, плотность вещества скелета $\rho_c = 2650$ кг/м³, пористость $\Phi = 30\%$, слои заполнены водой и метаном, $K_{пр} = 1$ мкм², модуль сжатия $K = 3,34 \cdot 10^{11}$ дин/см²), толщина слоев $h_1 = h_2 = 10$ см, присоединенная масса принята равной нулю ($\rho_{12} = 0$). На рис. 1 приведены зависимости скорости эффективной продольной волны от частоты. Кривая 1 взята из [10], 2 — расчеты данной работы. Полученные результаты свидетельствуют, что скорость эффективной продольной волны обладает значительной дисперсией. Кроме того, эффективная продольная волна, распространяющаяся в слоистой среде, насыщенной послойно газом и жидкостью, имеет высокий коэффициент затухания, превышающий более чем на порядок затухание продольной волны в каждом из слоев (рис. 2). Это явление обусловлено перекачкой энергии продольных волн первого рода на границах слоев в быстрозатухающие продольные волны второго рода.

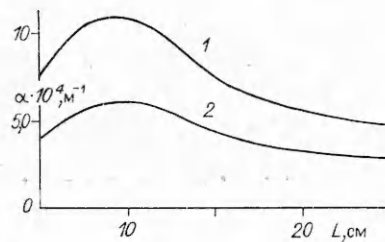
Сравнение результатов расчетов (кривые 2 рис. 1, 2) с результатами [10] (кривые 1 рис. 1, 2) показывает, что максимальное расхождение между ними составляет приблизительно 30%. По-видимому, такое расхождение объясняется тем, что авторы [10] неоправданно пренебрегли движением скелета при расчете фильтрационных перетоков флюида на границах слоев. В рамках теории Френкеля — Био, использованной в данной работе, влияние колебаний скелета на фильтрацию флюида в порах учитывается автоматически.

В качестве второго примера рассмотрим чередование слоев, отличающихся пористостью и проницаемостью и насыщенных одним и тем же флюидом. Расчеты проведены для среды с $\rho_c = 2700$ кг/м³, $V_p = 6400$ м/с, $V_s = 3700$ м/с, что соответствует, например, известняку в условиях естественного залегания; поры заполнены водой. Упругие константы в системе (1) рассчитывались методом [11]. Проведенные расчеты свидетельствуют о слабом (в пределах долей процента) влиянии фильтрационных перетоков жидкости, возникающих на границах пластов, на скорость эффективной продольной волны, так что эту скорость можно определять с использованием более простой модели упругой слоистой среды.

На рис. 3 представлена зависимость коэффициента затухания эффективной продольной волны от периода структуры L . Расчеты проводились для случая, когда продольная волна распространялась нормально к границе слоев, частота упругих волн $f = 500$ Гц, $\Phi = 5\%$ и $K_{пр} = 0,01$ мкм². Пористость и проницаемость второго слоя составляли 25; 20% и 1; 0,5 мкм² (кривые 1 и 2). Несмотря на то что слои тонкие для эф-



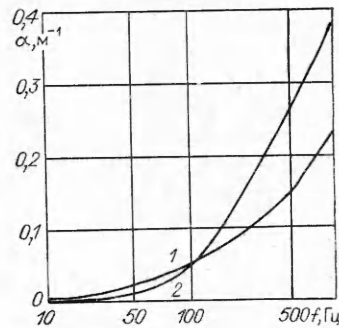
Р и с. 1



Р и с. 3

фффективной продольной волны ($|k_1 L| \ll 1$), затухание ее немонотонно зависит от L . Этому может быть дано следующее объяснение: с увеличением L все большая доля энергии продольных волн второго рода успевает поглотиться, не дойдя до следующей границы, что приводит к росту затухания (левая часть графика). Степень затухания при дальнейшем росте L связана с уменьшением числа границ, на которых происходит диссипация энергии продольных волн первого рода за счет образования продольных волн второго рода.

Таким образом, распространение упругих волн в периодически слоистой насыщенной пористой среде обладает рядом существенных особенностей, обусловленных движением флюида относительно скелета на границах слоев. Эти особенности не могут быть учтены в рамках теории вязкоупругих сред, наиболее адекватный их учет возможен в рамках модели Френкеля—Био.



Р и с. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз.— 1944.— Т. 8, № 4.
2. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solids // J. Acoust. Soc. Amer.— 1956.— V. 28, N 2.
3. Механика насыщения пористых сред/В. Н. Николаевский, К. С. Басниев, А. Т. Горбунов и др.— М.: Недра, 1970.
4. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред.— М.: Наука, 1978.
5. Барзам В. А. Расчет динамических характеристик сейсмических волн в слоистых пористых насыщенных средах // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли.— 1984.— № 10.
6. Thomson W. T. Transmission of elastic waves through a stratified solid material // J. Appl. Phys.— 1950.— V. 21, N 2.
7. Haskell N. A. The dispersion of surface waves in multilayered media // Bull. Seism. Soc. Amer.— 1953.— V. 43, N 1.
8. Рытов С. М. Упругие свойства мелкослоистой среды // Акуст. журн.— 1956.— Т. 2, № 1.
9. Сибиряков Б. П., Максимов Л. А., Татарников М. А. Анизотропия и дисперсия упругих волн в слоистых периодических структурах.— Новосибирск: Наука, 1980.
10. Уайт Д. Е., Михайлова Н. Г., Ляховицкий Ф. М. Распространение сейсмических волн в слоистых средах, насыщенных жидкостью и газом // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли.— 1975.— № 10.
11. Марков М. Г., Юматов А. Ю. Преломление упругих волн на трещине, расположенной в насыщенной пористой среде // ПМ.— 1984.— Т. 20, № 8.

Поступила 4/VI 1986 г.