

УДК 531.3+539.3

## ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ СЛОИСТЫХ БАЛОК В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Г. Л. Горынин, Ю. В. Немировский\*

Югорский государственный университет, 628012 Ханты-Мансийск

\* Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

E-mails: gsibadi@hmansy.wsnet.ru, shulgin@itam.nsc.ru

Пространственные уравнения теории упругости для слоистых балок решаются с помощью метода асимптотического расщепления без введения дополнительных гипотез и ограничений.

Ключевые слова: многослойные конструкции, продольно-поперечный изгиб.

**Введение.** Задача расчета многослойных конструкций является актуальной, так как современные технологические процессы позволяют создавать конструкционные элементы из существенно различающихся материалов. Методы расчета многослойных балок и пластин разработаны достаточно полно, обзор и анализ наиболее значимых работ можно найти, например, в [1, 2]. В большинстве работ основное внимание уделялось приближенному учету сдвига в поперечном сечении в плоскости приложенной нагрузки при пренебрежении поперечным обжатием слоев и другими сдвигами. Приведение соответствующих трехмерных уравнений к одно- и двумерным осуществлялось путем использования кусочно-линейных или степенных разложений поперечных касательных напряжений и перемещений по поперечной координате. Однако во многих случаях свойства материалов могут оказаться настолько различными, что остальными компонентами тензоров напряжений и деформаций нельзя пренебречь. Материалы отличаются друг от друга не только характеристиками жесткости, но и прочности. Поэтому для слоистых балок необходимо иметь достоверную информацию о полях напряжения в каждом слое. В данной работе для решения пространственных уравнений теории упругости в случае изгиба слоистых балок предлагается метод асимптотического расщепления, не требующий каких-либо существенных предположений и ограничений. Ранее данный метод применялся при решении частных задач в работах [3–5].

**1. Поперечный изгиб.** Рассмотрим балку с постоянным по длине произвольным поперечным сечением, симметричным относительно оси  $x$ , состоящую из произвольного числа слоев, выполненных из различных материалов (рис. 1). Начало координат поместим на верхней поверхности балки; слой пронумеруем сверху вниз ( $i$  — номер текущего слоя;  $s$  — число слоев).

Пусть  $u, v, w$  — перемещения точек в направлении осей  $x, y, z$  соответственно;  $b_-, b_+$  — ширина верхней и нижней поверхностей балки;  $u^*$  — характерное значение для перемещения  $u$ ;  $l, h$  — длина и высота балки;  $\lambda_i, \nu_i$  — упругие постоянные;  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  — компоненты линейного тензора деформации;  $\lambda_0$  — характерное значение упругой постоянной;  $q_-, q_+$  — поперечные нагрузки, приложенные к верхней и нижней поверхностям балки соответственно. Будем рассматривать только такие балки, для которых величина  $\varepsilon = h/l$  является малым параметром. Используем безразмерные переменные и функции:

$$x' = \frac{x}{h}, \quad y' = \frac{y}{h}, \quad z' = \frac{z}{l}, \quad u' = \frac{u}{u^*}, \quad w' = \frac{w}{u^*}, \quad v' = \frac{v}{u^*}, \quad \lambda'_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_0},$$

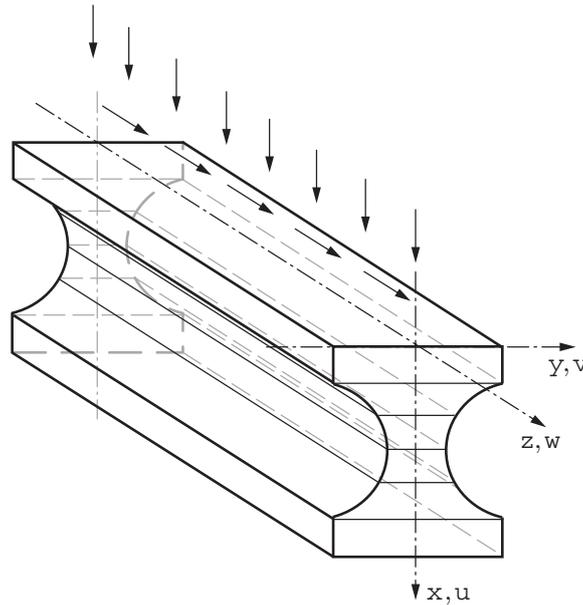


Рис. 1. Продольно-поперечный изгиб слоистой балки

$$\mu'_i = \frac{\mu_i}{\lambda_0}, \quad \sigma'_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\sigma_0}, \quad q'_+ = \frac{q_+}{q_0}, \quad q'_- = \frac{q_-}{q_0}, \quad \sigma_0 = \frac{\lambda_0 u^*}{h}.$$

Далее штрих у безразмерных величин опущен. Откажемся от гипотезы плоских сечений и для перемещений примем следующие аппроксимации в каждом слое:

$$\begin{aligned} w_i^{(n)}(\mathbf{r}, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^n U_{i,k}^z \frac{d^{(2k+1)} u_0^{(n)}}{dz^{(2k+1)}} \varepsilon^{2k+1}, & U_{i,0}^z &= -(x - c_0), & U_{i,0}^x &= 1, \\ u_i^{(n)}(\mathbf{r}, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^n U_{i,k}^x \frac{d^{2k} u_0^{(n)}}{dz^{2k}} \varepsilon^{2k}, & v_i^{(n)}(\mathbf{r}, \varepsilon) &= \sum_{k=1}^n U_{i,k}^y \frac{d^{2k} u_0^{(n)}}{dz^{2k}} \varepsilon^{2k}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки;  $u_i^{(n)}(\mathbf{r}, \varepsilon)$  — аппроксимация вектора перемещения;  $c_0$  — константа;  $n$  — порядковый номер аппроксимации;  $U_k^z(x, y)$ ,  $U_k^x(x, y)$ ,  $U_k^y(x, y)$  — характеристические функции векторного поля перемещений в поперечном сечении балки. Функцию прогиба  $u_0^{(n)}(z)$  определим следующим образом:

$$u_0^{(n)}(z) = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^s \int_{F_i} u_i^{(n)}(\mathbf{r}) dF, \quad \sum_{i=1}^s \int_{F_i} U_{i,k}^x(x, y) dF = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

где  $F$  — площадь поперечного сечения балки;  $F_i$  — площадь  $i$ -го слоя поперечного сечения балки.

Материал балки подчиняется закону Гука

$$(\sigma_{\alpha\beta})_i = \lambda_i \theta \delta_{\alpha\beta} + 2\mu_i \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \theta = \sum_{\gamma=1}^3 \varepsilon_{\gamma\gamma}, \quad \lambda_i = \frac{\nu_i E_i}{(1 - 2\nu_i)(1 + \nu_i)}, \quad \mu_i = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)}. \quad (2)$$

Подставим равенства (1) в закон Гука (2):

$$(\sigma_{\alpha\alpha})_i^{(n)} = \sum_{k=1}^n (\tau_{\alpha\alpha})_i^{(2k)} \frac{d^{2k} u_0^{(n)}}{dz^{2k}} \varepsilon^{2k} + (\lambda_i + 2\mu_i \delta_{\alpha z}) U_{i,n}^z \frac{d^{2n+2} u_0^{(n)}}{dz^{2n+2}} \varepsilon^{2n+2}, \quad \alpha \in [x, y, z],$$

$$(\sigma_{xy})_i^{(n)} = \sum_{k=1}^n (\tau_{xy})_i^{(2k)} \frac{d^{2k} u_0^{(n)}}{dz^{2k}} \varepsilon^{2k}, \quad (\sigma_{\beta z})_i^{(n)} = \sum_{k=1}^n (\tau_{\beta z})_i^{(2k+1)} \frac{d^{2k+1} u_0^{(n)}}{dz^{2k}} \varepsilon^{2k+1}, \quad \beta \in [x, y], \quad (3)$$

где  $\delta_{\alpha z}$  — символ Кронекера. В формулах (3) введены характеристические функции тензорного поля напряжений в поперечном сечении балки  $(\tau_{\alpha\beta})_i^{(j)}$ , которые связаны с характеристическими функциями векторного поля перемещений следующим образом:

$$\begin{aligned} (\tau_{zz})_i^{(2k+2)} &= (\lambda_i + 2\mu_i) U_{i,k}^z + \lambda_i \left( \frac{\partial U_{i,k+1}^x}{\partial x} + \frac{\partial U_{i,k+1}^y}{\partial y} \right), & (\tau_{xz})_i^{(1)} &= 0, & (\tau_{yz})_i^{(1)} &= 0, \\ (\tau_{xy})_i^{(2k)} &= \mu_i \left( \frac{\partial U_{i,k}^y}{\partial x} + \frac{\partial U_{i,k}^x}{\partial y} \right), & (\tau_{\beta z})_i^{(2k+1)} &= \mu_i \left( U_{i,k}^\beta + \frac{\partial U_{i,k}^z}{\partial \beta} \right), & \beta, \gamma \in [x, y], & \gamma \neq \beta, \\ (\tau_{\beta\beta})_i^{(2k+2)} &= \left( \lambda_i \left( U_{i,k}^z + \frac{\partial U_{i,k+1}^\gamma}{\partial \gamma} \right) + (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial U_{i,k+1}^\beta}{\partial \beta} \right), & i &= 1, \dots, s, & k &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Предположим, что поперечные нагрузки на верхней и нижней поверхностях имеют вид

$$\begin{aligned} q_- &= \sum_{k=1}^n q_-^{(2k)} \frac{d^{2k} u_0^{(n)}}{dz^{2k}} \varepsilon^{2k}, & q_+ &= \sum_{k=1}^n q_+^{(2k)} \frac{d^{2k} u_0^{(n)}}{dz^{2k}} \varepsilon^{2k}, & q_-^{(2)} &= q_+^{(2)} = 0, \\ q &= b_- q_- + b_+ q_+, & q &= \sum_{k=1}^n q^{(2k)} \frac{d^{2k} u_0^{(n)}}{dz^{2k}} \varepsilon^{2k}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $q_-^{(2k)}$ ,  $q_+^{(2k)}$ ,  $q^{(2k)}$  ( $k = 2, \dots, n$ ) — константы;  $q$  — суммарная поперечная нагрузка.

Уравнения равновесия запишем в виде

$$L_{x,i}(\mathbf{u}, \varepsilon) = 0, \quad L_{y,i}(\mathbf{u}, \varepsilon) = 0, \quad L_{z,i}(\mathbf{u}, \varepsilon) = 0. \quad (5)$$

Краевые условия имеют следующий вид:

— на верхней поверхности при  $x = 0$

$$J_{x,1}(\mathbf{u}, \varepsilon) = 0, \quad J_{y,1}(\mathbf{u}, \varepsilon) = 0, \quad J_{z,1}(\mathbf{u}, \varepsilon) = 0,$$

— на нижней поверхности при  $x = 1$

$$J_{x,s}(\mathbf{u}, \varepsilon) = 0, \quad J_{y,s}(\mathbf{u}, \varepsilon) = 0, \quad J_{z,s}(\mathbf{u}, \varepsilon) = 0, \quad (6)$$

— на боковой поверхности

$$B_{x,i}(\mathbf{u}, \varepsilon) = 0, \quad B_{y,i}(\mathbf{u}, \varepsilon) = 0, \quad B_{z,i}(\mathbf{u}, \varepsilon) = 0.$$

Условия сопряжения на границе между слоями балки:

$$\begin{aligned} \Phi_{x,i}(\mathbf{u}, \varepsilon) &= 0, & \Phi_{y,i}(\mathbf{u}, \varepsilon) &= 0, & \Phi_{z,i}(\mathbf{u}, \varepsilon) &= 0, \\ S_{x,i}(\mathbf{u}, \varepsilon) &= 0, & S_{y,i}(\mathbf{u}, \varepsilon) &= 0, & S_{z,i}(\mathbf{u}, \varepsilon) &= 0, & x = h_i, & i = 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (7)$$

В формулах (5)–(7) введены следующие дифференциальные операторы, действующие на вектор перемещения  $\mathbf{u}$ :

$$\begin{aligned} L_{\beta,i}(\mathbf{u}, \varepsilon) &= \frac{\partial (\sigma_{\beta x})_i}{\partial x} + \frac{\partial (\sigma_{\beta y})_i}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial (\sigma_{\beta z})_i}{\partial z}, & J_{x,1}(\mathbf{u}, \varepsilon) &= (\sigma_{xx})_1 + q_-, \\ J_{y,1}(\mathbf{u}, \varepsilon) &= (\sigma_{xy})_1, & J_{z,1}(\mathbf{u}, \varepsilon) &= (\sigma_{xz})_1, & J_{x,s}(\mathbf{u}, \varepsilon) &= (\sigma_{xx})_s - q_+, & J_{y,s}(\mathbf{u}, \varepsilon) &= (\sigma_{xy})_s, \\ J_{z,s}(\mathbf{u}, \varepsilon) &= (\sigma_{xz})_s, & B_{\beta,i}(\mathbf{u}, \varepsilon) &= (\sigma_{\beta x})_i n_x + (\sigma_{\beta y})_i n_y, & \Phi_{x,i}(\mathbf{u}, \varepsilon) &= (u)_{i-1} - (u)_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{y,i}(\mathbf{u}, \varepsilon) &= (v)_{i-1} - (v)_i, & \Phi_{z,i}(\mathbf{u}, \varepsilon) &= (w)_{i-1} - (w)_i, & S_{x,i}(\mathbf{u}, \varepsilon) &= (\sigma_{xx})_{i-1} - (\sigma_{xx})_i, \\ S_{y,i}(\mathbf{u}, \varepsilon) &= (\sigma_{xy})_{i-1} - (\sigma_{xy})_i, & S_{z,i}(\mathbf{u}, \varepsilon) &= (\sigma_{zx})_{i-1} - (\sigma_{zx})_i, & \beta &\in [x, y, z].\end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Задачу о нахождении поля перемещений  $\mathbf{u}$ , удовлетворяющего уравнениям (2), (5)–(7) внутри балки и на ее границе, будем называть полукраевой, так как существуют участки границы балки (ее торцы), на которых краевые условия временно не поставлены.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть дано дифференциальное уравнение  $L(\mathbf{u}(\mathbf{r}), \varepsilon) = 0$ . Функциональную последовательность  $\{\mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{r})\}_{n=1}^{\infty}$  будем называть формальным асимптотическим решением этого уравнения, если существует монотонно возрастающая функция  $m(n)$  такая, что для всех  $n$  выполняется равенство  $L(\mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{r}), \varepsilon) = O(\varepsilon^{m(n)})$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Если аналогичное равенство выполняется для части или всех краевых условий, то будем говорить о формальном асимптотическом решении полукраевой или краевой задачи соответственно.

Потребуем выполнения равенств для характеристических функций тензорного поля напряжений и связанных с ними характеристических функций векторного поля перемещений:

— внутри поперечного сечения

$$\frac{\partial (\tau_{\beta x})_i^{(2k)}}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{\beta y})_i^{(2k)}}{\partial y} + (\tau_{\beta z})_i^{(2k-1)} = 0, \quad \frac{\partial (\tau_{zx})_i^{(2k+1)}}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{zy})_i^{(2k+1)}}{\partial y} + (\tau_{zz})_i^{(2k)} = 0; \quad (8)$$

— на верхней и нижней поверхностях балки

$$\begin{aligned}(\tau_{zx})_1^{(2k+1)} &= 0, & (\tau_{xy})_1^{(2k)} &= 0, & (\tau_{xx})_1^{(2k)} &= -q_-^{(2k)}, & k &= 1, \dots, n, & x &= 0, \\ (\tau_{xx})_s^{(2k)} &= q_+^{(2k)}, & (\tau_{zx})_s^{(2k+1)} &= 0, & (\tau_{xy})_s^{(2k)} &= 0, & k &= 1, \dots, n, & x &= 1;\end{aligned} \quad (9)$$

— на боковой поверхности балки

$$(\tau_{\beta x})_i^{(2k)} n_x + (\tau_{\beta y})_i^{(2k)} n_y = 0, \quad \beta \in [x, y], \quad (\tau_{zy})_i^{(2k+1)} n_y + (\tau_{zx})_i^{(2k+1)} n_x = 0; \quad (10)$$

— на границе между слоями балки

$$\begin{aligned}(\tau_{zx})_{i-1}^{(2k+1)} &= (\tau_{zx})_i^{(2k+1)}, & (\tau_{xy})_{i-1}^{(2k)} &= (\tau_{xy})_i^{(2k)}, & U_{i-1,k}^\alpha &= U_{i,k}^\alpha, \\ \alpha \in [x, y, z], & \beta \in [x, y], & x &= h_i, & i &= 2, \dots, s, & k &= 1, \dots, n.\end{aligned} \quad (11)$$

Для одновременного выполнения первых двух дифференциальных равенств в (4) достаточно потребовать пропорциональности верхней и нижней нагрузок:

$$q_+^{(2k)} = k_q q_-^{(2k)}, \quad q_+ = k_q q_-. \quad (12)$$

Если проинтегрировать по сечению уравнения (8) с учетом равенств (9)–(11), то получим необходимое условие разрешимости краевой задачи (8)–(11)

$$q^{(2k)} = -I_{(2k-2)}, \quad I_{(2k)} = \int_F (x - c_0) (\tau_{zz})^{(2k)} dF. \quad (13)$$

Если сложить первые два равенства в (4), умноженные на  $b_-$  и  $b_+$  соответственно, то получим дифференциальное уравнение, которое в силу пропорциональности нагрузок эквивалентно исходным равенствам (4):

$$\sum_{k=2}^n I_{(2k-2)} \frac{d^{2k} u_0^{(n)}}{dz^{2k}} \varepsilon^{2k} + q = 0. \quad (14)$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что формулы (1) дают формальное асимптотическое решение полукраевой задачи (5)–(7), если выполнено условие  $\varepsilon^4 d^{2n+2}u_0^{(n)}/dz^{2n+2} = O(1)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Последнее равенство достигается, если при решении дифференциального уравнения (14) исключать быстро осциллирующие решения при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Фактически это условие означает выделение четырехпараметрического семейства решений уравнения (14):

$$u_0^{(n)}(z, \varepsilon) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + F_{(4)}(z, \varepsilon), \quad (15)$$

где  $a_j$  — параметры;  $F_{(4)}(z, \varepsilon)$  — частное “неосциллирующее” решение уравнения.

Общее количество краевых условий для семейства решений (15) на торцах балки равняется четырем. Следовательно, на торцах балки можно использовать традиционные краевые условия, основанные на принципе Сен-Венана: равенство нулю средних перемещений  $u_0^{(n)}$  и изгибающего момента (шарнирное опирание); равенство нулю изгибающего момента и перерезывающей силы (свободный торец); равенство нулю продольных и поперечных перемещений в среднем (защемление).

Если поперечная нагрузка является многочленом, то непосредственной подстановкой можно доказать

**УТВЕРЖДЕНИЕ** (о точном решении полукраевой задачи). Пусть выполнены условия (12), (13), справедлива формула (15) и поперечная нагрузка  $q(z)$  является многочленом степени  $m_0$ . Тогда функции (1) дают четырехпараметрическое семейство точных решений полукраевой задачи (2), (5)–(7). Номер приближения  $n$  вычисляется по формуле  $n = [0,5(m_0 + 4)]$ , где  $[a]$  — целая часть числа  $a$ .

**ПРИМЕР 1** (однослойная балка прямоугольного поперечного сечения под действием сосредоточенных сил). Если на балку действуют только сосредоточенные силы, то в соответствии с приведенным выше утверждением второе приближение ( $n = 2$ ) дает точное решение и из уравнения (14) следуют равенства

$$\frac{d^j u_0(z)}{dz^j} = 0, \quad j \geq 4.$$

Если подставить эти равенства в формулы (1), (3), то уже первое приближение дает точное решение полукраевой задачи (2), (5)–(7). Из решения краевой задачи (8)–(11) при  $k = 1$  для однослойной балки прямоугольного сечения получим следующие характеристические функции тензора напряжений ( $b$  — ширина балки):

$$\begin{aligned} (\tau_{xx})^{(2)} = (\tau_{xy})^{(2)} = 0, \quad (\tau_{zz})^{(2)} = -E(x - c_0), \\ (\tau_{zy})^{(3)} = 4\mu\nu b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sh}[(2k-1)\pi y]}{\text{sh}[(2k-1)\pi 0,5b]} \frac{\cos((2k-1)\pi x)}{\pi^2(2k-1)^2} + \\ + 2\nu\mu y(x - 0,5) + E(0,5(x - 0,5)^2 - 0,125). \end{aligned} \quad (16)$$

С использованием (16) по формулам (1), (3) вычисляются перемещения и компоненты тензора напряжений. Если осреднить величину  $(\sigma_{zx})^{(1)}$  по ширине сечения, то из формул (3), (16) получим известную формулу Журавского распределения касательных напряжений по сечению.

Введем отношение касательных напряжений к их осредненным величинам

$$\Delta\sigma_{zx} = \frac{(\sigma_{zx})^{(1)}}{\langle(\sigma_{zx})^{(1)}\rangle} = \frac{(\tau_{zx})^{(3)}}{\langle(\tau_{zx})^{(3)}\rangle} \quad \left( \langle a \rangle = \frac{1}{b} \int_{-0,5b}^{0,5b} a(x, y) dy \right).$$

Таблица 1

$b$	$y$	$\Delta\sigma_{zx}$	$b$	$y$	$\Delta\sigma_{zx}$
0,5	0	0,983	2	0	0,856
	0,5b	1,033		0,5b	1,396
1	0	0,940	4	0	0,805
	0,5b	1,126		0,5b	1,987

Таблица 2

Вид закрепления балки	$\Delta u$						
	$\varepsilon = 0,1$		$\varepsilon = 0,125$		$\varepsilon = 0,167$		$\varepsilon = 0,25$
	$b = 1$	$b = 4$	$b = 1$	$b = 4$	$b = 1$	$b = 4$	$b = 1$
Консольная	1,007	1,021	1,012	1,033	1,021	1,060	1,046
Шарнирно опертая	1,030	1,086	1,046	1,134	1,082	1,236	1,184
Защемленная по краям	1,118	1,343	1,184	1,536	1,329	1,957	1,738

Максимальные значения  $\Delta\sigma_{zx}$  в сечении балки при  $x = 0,5$ ,  $\nu = 0,25$  представлены в табл. 1. Из определения этой величины следует, что она не зависит от способа закрепления балки и количества приложенных сосредоточенных нагрузок. Значения, приведенные в табл. 1, совпадают со значениями, полученными С. П. Тимошенко для консольной балки прямоугольного сечения [6], нагруженной сосредоточенной силой на конце (задача Сен-Венана). Следовательно, результат Тимошенко распространен на балки произвольного опирания с произвольным числом сосредоточенных нагрузок.

Введем отношение максимальных прогибов, полученных предлагаемым методом, к максимальным прогибам, полученным на основе гипотезы плоских сечений Бернулли  $u_B$ :

$$\Delta u = u_0^{(1)}/u_B.$$

Значения величины  $\Delta u$  для балок под действием единичной сосредоточенной нагрузки при  $\nu = 0,25$  приведены в табл. 2. Во всех рассмотренных примерах это отношение больше единицы.

Следует отметить, что учет действия сосредоточенных нагрузок, приложенных не на торцах, осуществляется путем разрезания балки по сечению, в плоскости которого действует сосредоточенная нагрузка. Затем осуществляется сопряжение этих двух частей с использованием интегральных условий на торцах, что возможно в силу принципа Сен-Венана. Поэтому вблизи точки действия сосредоточенной нагрузки всегда имеет место ошибка, что характерно для любой балочной теории. Ее учет и исправление возможны только на основе построения пограничных слоев [7].

**ПРИМЕР 2** (плоская деформация трехслойной балки). Рассмотрим трехслойную балку единичной ширины ( $b = 1$ ), нагруженную на верхней поверхности поперечной распределенной нагрузкой  $q_+$  ( $k_q = 0$ ). Считаем, что слои обладают характеристиками:  $E_2 = 1$ ,  $E_1 = E_3 = 4E_2$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,3$ ,  $h_2 = 0,33$ ,  $h_3 = 0,67$ . Характеристические функции вектора перемещения и тензора напряжений представлены на рис. 2, 3. Напряжения  $\sigma_{zz}$  на порядок превышают напряжения  $\sigma_{xx}$ , как это следует из эпюр характеристических функций  $\tau_{zz}$  и  $\tau_{xx}$ .

Решения, полученные на основе приведенного выше утверждения, для одно- и трехслойной консольных балок совпадают с решениями, полученными с помощью функций Эри (см. [6, 8]).

Таким образом, обжатием в данном случае можно пренебречь. Однако в общем случае расчета слоистых балок пренебрегать заранее теми или иными компонентами тензора

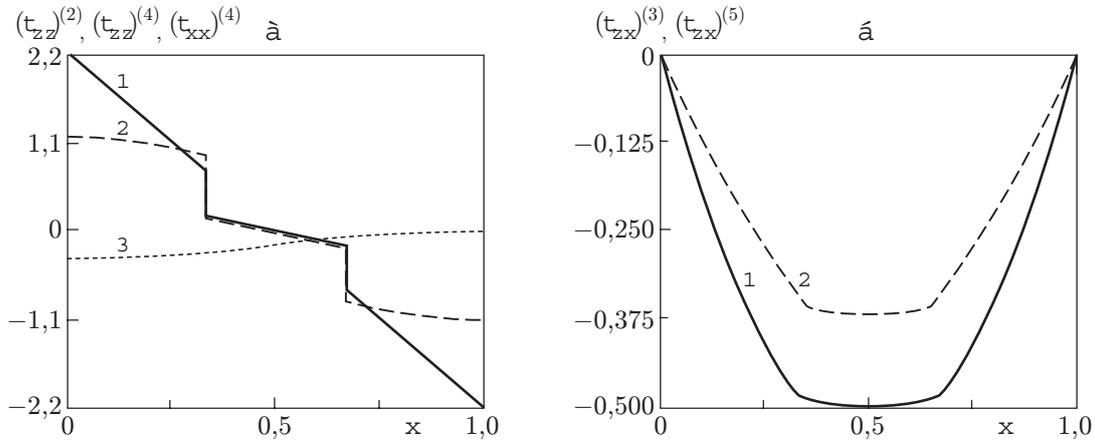


Рис. 2. Характеристические функции тензора напряжений для трехслойной балки ( $E_1 = E_3 = 4E_2$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,3$ ):  
 а — нормальные функции (1 —  $(\tau_{zz})^{(2)}$ , 2 —  $(\tau_{zz})^{(4)}$ , 3 —  $(\tau_{xx})^{(4)}$ ); б — касательные функции (1 —  $(\tau_{zx})^{(3)}$ , 2 —  $(\tau_{zx})^{(5)}$ )

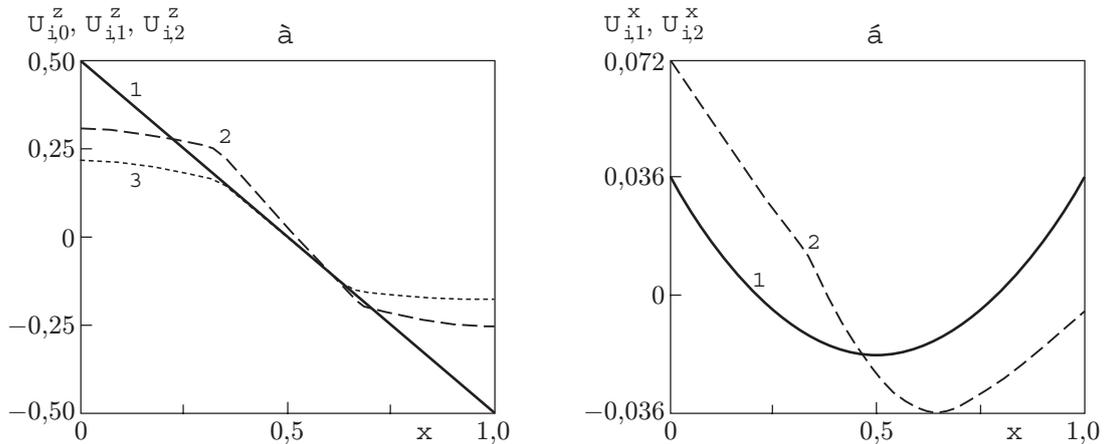


Рис. 3. Характеристические функции вектора перемещения для трехслойной балки ( $E_1 = E_3 = 4E_2$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,3$ ):  
 а — продольные функции (1 —  $U_{i,0}^z$ , 2 —  $U_{i,1}^z$ , 3 —  $U_{i,2}^z$ ); б — поперечные функции (1 —  $U_{i,1}^x$ , 2 —  $U_{i,2}^x$ )

напряжений нельзя, так как их величины могут зависеть от геометрических размеров слоев, механических характеристик конструктивных материалов и от порядка расположения материалов в конструкции.

**ПРИМЕР 3** (плоская деформация двухслойной консольной балки). Рассмотрим двухслойную консольную балку единичной ширины ( $b = 1$ ), нагруженную на верхней поверхности постоянной поперечной распределенной нагрузкой  $q_+$  ( $k_q = 0$ ). Считаем, что слои обладают характеристиками: нижний слой — сталь ( $E_2 = 200$  ГПа,  $\nu_1 = 0,33$ ); верхний слой — графит ( $E_1 = 5,9$  ГПа,  $\nu_1 = 0,3$ ) или бетон ( $E_1 = 20$  ГПа,  $\nu_1 = 0,2$ ). Толщина верхнего слоя принимает значения:  $\Delta h_1 = 0,05; 0,1; 0,2$ . В табл. 3 приведены значения  $|\sigma_{zz}/\sigma_{xx}|$ , вычисленные в начале координат (верхняя точка заделанного сечения), где величина осевых растягивающих напряжений  $\sigma_{zz}$  в верхнем слое заведомо максимальна. Очевидно, что когда это отношение близко к единице или меньше единицы, пренебрегать

Таблица 3

$\varepsilon$	$ \sigma_{zz}/\sigma_{xx} $					
	$\Delta h_1 = 0,05$		$\Delta h_1 = 0,1$		$\Delta h_1 = 0,2$	
	Графит	Бетон	Графит	Бетон	Графит	Бетон
0,100	0,5	2,6	0,7	3,2	1,3	4,8
0,125	0,2	1,5	0,3	1,9	0,7	2,9
0,167	0,1	0,7	0,03	0,9	0,2	1,5

обжатием нельзя. Из анализа табл. 3 следует, что необходимость учета обжатия зависит от свойств материалов, относительных толщин слоев  $\Delta h_1$  и продольного относительного размера балки  $\varepsilon$ . Вдали от заделанного торца величина осевых напряжений убывает, в то время как величина  $\sigma_{xx}$  не меняется, поэтому относительный вклад обжатия увеличивается.

**2. Продольно-поперечный изгиб.** Пусть на верхнюю и нижнюю поверхности балки кроме поперечной действует продольная распределенная нагрузка  $p_-, p_+$ . Примем для перемещений следующие аппроксимации в каждом слое:

$$w_i^{(n)} = \sum_{k=0}^n W_{i,k}^z \frac{d^{2k} w_0^{(n)}}{dz^{2k}} \varepsilon^{2k}, \quad u_i^{(n)} = \sum_{k=1}^n W_{i,k}^x \frac{d^{(2k-1)} w_0^{(n)}}{dz^{(2k-1)}} \varepsilon^{2k-1}, \quad W_{i,0}^z = 1, \\ v_i^{(n)} = \sum_{k=1}^n W_{i,k}^y \frac{d^{(2k-1)} w_0^{(n)}}{dz^{(2k-1)}} \varepsilon^{2k-1}, \quad \mathbf{u}_i^{(n)}(\mathbf{r}) = (u_i^{(n)}, v_i^{(n)}, w_i^{(n)}), \quad (17)$$

где  $w_0^{(n)}(z)$  — функция продольного смещения сечения;  $W_{i,k}^z(x, y)$ ,  $W_{i,k}^x(x, y)$ ,  $W_{i,k}^y(x, y)$  — характеристические функции вектора перемещений в поперечном сечении балки. Считаем, что значение функции продольного смещения  $w_0^{(n)}(z)$  равняется среднему перемещению точек поперечного сечения в продольном направлении, что равносильно равенствам

$$\sum_{i=1}^s \int_{F_i} W_{i,k}^z(x, y) dF = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Используя в законе Гука представления для перемещений (17), получим

$$(\sigma_{\alpha\alpha})_i^{(n)} = \sum_{k=1}^n (\tau_{\alpha\alpha})_i^{(2k-1)} \frac{d^{2k-1} w_0^{(n)}}{dz^{2k-1}} \varepsilon^{2k-1} + (\lambda_i + 2\mu_i \delta_{\alpha z}) W_{i,n}^z \frac{d^{2n+1} w_0^{(n)}}{dz^{2n+1}} \varepsilon^{2n+1}, \\ (\sigma_{xy})_i^{(n)} = \sum_{k=1}^n (\tau_{xy})_i^{(2k-1)} \frac{d^{2k-1} w_0^{(n)}}{dz^{2k-1}} \varepsilon^{2k-1}, \quad (\sigma_{\beta z})_i^{(n)} = \sum_{k=1}^n (\tau_{\beta z})_i^{(2k)} \frac{d^{2k} w_0^{(n)}}{dz^{2k}} \varepsilon^{2k}, \quad (18) \\ \alpha \in [x, y, z], \quad \beta \in [x, y].$$

В формулах (18) использованы характеристические функции тензора напряжений  $(\tau_{\alpha\beta})_i^{(j)}$ , которые связаны с характеристическими функциями вектора перемещений:

$$(\tau_{zz})_i^{(2k-1)} = (\lambda_i + 2\mu_i) W_{i,k-1}^z + \lambda_i \left( \frac{\partial W_{i,k}^x}{\partial x} + \frac{\partial W_{i,k}^y}{\partial y} \right), \quad (\tau_{z\beta})_i^{(2k)} = \mu_i \left( \frac{\partial W_{i,k}^z}{\partial \beta} + W_{i,k}^\beta \right), \\ (\tau_{\beta\beta})_i^{(2k+1)} = \left( \lambda_i \left( W_{i,k}^z + \frac{\partial W_{i,k+1}^\gamma}{\partial \gamma} \right) + (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial W_{i,k+1}^\beta}{\partial \beta} \right), \quad (\tau_{z\beta})_i^0 = 0,$$

$$(\tau_{xy})_i^{(2k-1)} = \mu_i \left( \frac{\partial W_{i,k}^y}{\partial x} + \frac{\partial W_{i,k}^x}{\partial y} \right), \quad \beta, \gamma \in [x, y], \quad \gamma \neq \beta, \quad i = 1, \dots, s, \quad k = 1, \dots, n.$$

Предположим, что нагрузки на верхней и нижней поверхностях имеют вид

$$\begin{aligned} p_- &= \sum_{k=1}^n p_-^{(2k)} \frac{d^{2k} w_0^{(n)}}{dz^{2k}} \varepsilon^{2k}, \quad p_+ = \sum_{k=1}^n p_+^{(2k)} \frac{d^{2k} w_0^{(n)}}{dz^{2k}} \varepsilon^{2k}, \quad p = b_- p_- + b_+ p_+, \\ q_- &= \sum_{k=1}^n q_-^{(2k-1)} \frac{d^{2k-1} w_0^{(n)}}{dz^{2k-1}} \varepsilon^{2k-1}, \quad q_+ = \sum_{k=1}^n q_+^{(2k-1)} \frac{d^{2k-1} w_0^{(n)}}{dz^{2k-1}} \varepsilon^{2k-1}, \quad q = b_- q_- + b_+ q_+. \end{aligned} \quad (19)$$

В дифференциальных операторах (7) учтем влияние продольной нагрузки:

$$J_{z,1}(\mathbf{u}, \varepsilon) = (\sigma_{xz})_1 + p_-, \quad J_{z,s}(\mathbf{u}, \varepsilon) = (\sigma_{xz})_s - p_+. \quad (20)$$

Тогда для продольно-поперечного изгиба балки также справедлива полукраевая задача (2), (5)–(7). Потребуем выполнения следующих равенств для характеристических функций тензора напряжений и связанных с ними характеристических функций вектора перемещений:

— на верхней и нижней поверхностях балки

$$\begin{aligned} (\tau_{zx})_1^{(2k)} &= -p_-^{(2k)}, \quad (\tau_{xy})_1^{(2k-1)} = 0, \quad (\tau_{xx})_1^{(2k-1)} = -q_-^{(2k-1)} \quad \text{при } x = 0, \\ (\tau_{zx})_s^{(2k)} &= p_+^{(2k)}, \quad (\tau_{xy})_s^{(2k-1)} = 0, \quad (\tau_{xx})_s^{(2k-1)} = q_+^{(2k-1)} \quad \text{при } x = 1; \end{aligned} \quad (21)$$

— на боковой поверхности балки

$$(\tau_{\beta x})_i^{(2k-1)} n_x + (\tau_{\beta y})_i^{(2k-1)} n_y = 0, \quad (\tau_{zy})_i^{(2k)} n_y + (\tau_{zx})_i^{(2k)} n_x = 0, \quad k = 1, \dots, n; \quad (22)$$

— на границах между слоями

$$(\tau_{zx})_{i-1}^{(2k)} = (\tau_{zx})_i^{(2k)}, \quad (\tau_{x\beta})_{i-1}^{(2k-1)} = (\tau_{x\beta})_i^{(2k-1)}, \quad W_{i-1,k}^\alpha = W_{i,k}^\alpha; \quad (23)$$

— во внутренних точках поперечного сечения балки

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\tau_{\beta x})_i^{(2k-1)}}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{\beta y})_i^{(2k-1)}}{\partial y} + (\tau_{\beta z})_i^{(2k-2)} = 0, \quad \frac{\partial (\tau_{zx})_i^{(2k)}}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{zy})_i^{(2k)}}{\partial y} + (\tau_{zz})_i^{(2k-1)} = 0, \\ \alpha \in [x, y, z], \quad \beta \in [x, y], \quad k = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (24)$$

Для одновременного выполнения четырех дифференциальных равенств в (19) достаточно потребовать пропорциональности верхней и нижней нагрузок:

$$q_+^{(2k-1)} = k_q q_-^{(2k-1)}, \quad q_+ = k_q q_-, \quad p_+^{(2k)} = k_p p_-^{(2k)}.$$

Если проинтегрировать по сечению уравнения (24) с учетом равенств (21)–(23), то получим необходимое условие разрешимости краевой задачи (21)–(24):

$$q_+^{(2k-1)} = -\frac{G^{(2k-2)}}{b_+ + k_q b_-}, \quad p_+^{(2k)} = -\frac{A^{(2k-1)}}{b_+ + k_p b_-},$$

$$G^{(2k)} = \sum_{i=1}^s \int_{F_i} (\tau_{xz})_i^{(2k)} dF, \quad A^{(2k-1)} = \sum_{i=1}^s \int_{F_i} (\tau_{zz})_i^{(2k-1)} dF, \quad k = 1, \dots, n. \quad (25)$$

Линейная комбинация первых двух равенств в (19) дает дифференциальное уравнение на функцию продольного смещения

$$\sum_{k=1}^n A^{(2k-1)} \frac{d^{2k} w_0^{(n)}}{dz^{2k}} \varepsilon^{2k} + p = 0. \quad (26)$$

Из выражений (19), (25) следует равенство, которому должна удовлетворять поперечная нагрузка:

$$q = - \sum_{k=2}^n G_{(2k-2)} \frac{d^{2k-1} w_0^{(n)}}{dz^{2k-1}} \varepsilon^{2k-1}, \quad (27)$$

т. е. суммарная в сечении поперечная нагрузка, в отличие от суммарной в сечении продольной нагрузки, не является произвольно заданной. Эту поперечную нагрузку, зависящую от продольной, обозначим  $q^p$ .

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что формулы (17) задают формальное асимптотическое решение полукраевой задачи (2), (5)–(7), (20) при выполнении условия  $\varepsilon^2 d^{2n+1} w_0^{(n)} / dz^{2n+1} = O(1)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Последнее равенство достигается, если при решении дифференциального уравнения (26) исключать быстро осциллирующие решения при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Фактически это условие означает выделение двухпараметрического семейства решений уравнения (26):

$$w_0^{(n)}(z, \varepsilon) = a_0 + a_1 z + F_{(2)}(z, \varepsilon), \quad (28)$$

где  $a_j$  — параметры;  $F_{(2)}(z, \varepsilon)$  — частное “неосциллирующее” решение уравнения. Общее количество краевых условий для решений (28) на торцах балки равняется двум. Следовательно, на торцах балки следует использовать традиционные краевые условия, основанные на принципе Сен-Венана: равенство нулю средних перемещений  $w_0^{(n)}$  (закрепленный торец) и равенство нулю продольного усилия (свободный торец).

**3. Общий случай продольно-поперечного изгиба.** Пусть на балку одновременно действуют произвольные продольная и поперечная нагрузки  $p$ ,  $q$ . В силу произвольности нагрузок решение нельзя искать в виде (17). Приложенную нагрузку можно рассматривать как суперпозицию двух нагрузок. Первая нагрузка — это продольно-поперечная нагрузка специального типа: продольная нагрузка  $p$  — произвольная, поперечная нагрузка  $q^p$  имеет вид (27). Вторая нагрузка — это приведенная поперечная нагрузка, вычисляемая по формуле  $q^h = q - q^p$ . Это случай чистого поперечного изгиба, он решается на основе представления (1). В силу линейности уравнений теории упругости и их следствий полученные решения для первой и второй нагрузок складываются.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Болотин В. В.** Прочность, устойчивость и колебания многослойных пластин // Расчеты на прочность: Сб. ст. М.: Машиностроение, 1965. Вып. 11. С. 31–63.
2. **Андреев А. Н., Немировский Ю. В.** Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 2001.
3. **Горынин Г. Л., Немировский Ю. В.** Расчет напряженного состояния слоистых балок произвольного поперечного очертания // Сб. тр. III Всерос. конф. “Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики”, Томск, 2–4 окт. 2002 г. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. С. 16–22.
4. **Немировский Ю. В., Горынин Г. Л.** Асимптотическое решение краевой задачи изгиба удлиненных упругих тел // Сб. тр. 5-й Всерос. конф. “Краевые задачи и математическое моделирование”, Новокузнецк, 29 нояб. — 1 дек. 2002 г. Новокузнецк: Изд-во Новокузнец. фил. Кем. ун-та, 2002. С. 48–54.
5. **Nemirovsky U. V., Gorynin G. L.** The theory of the layered beams under the action of cross loading // Advanced studies in mechanical engineering. Yeungnam: Yeungnam Univ., 2002. P. 9–16.

6. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975.
7. Горынин Г. Л., Немировский Ю. В. Пограничный слой в слоистом стержне // Науч. вестн. Новосиб. гос. техн. ун-та. 2004. № 1(16). С. 21–36.
8. Раппопорт Р. М. Расчет балок, составленных из материалов с различными механическими характеристиками // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1948. № 5. С. 52–74.

*Поступила в редакцию 18/IV 2003 г.,  
в окончательном варианте — 14/I 2004 г.*

---