

УДК 532.59: 532.547; 517.958

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ПО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ СЛОЯ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ С НЕОДНОРОДНОЙ КОНЦЕНТРАЦИЕЙ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ

В. А. Баринов, Н. Н. Бутакова

Тюменский государственный университет, 625003 Тюмень

Поставлена краевая задача о волнах на поверхности слоя двухфазной среды при неоднородном (экспоненциальном) распределении дисперсной фазы. Получено асимптотическое решение линейной задачи в виде затухающих прогрессивных волн. Найдены фазовая скорость, частота и декремент затухания волны. Определено возмущение концентрации примеси, которое в отличие от случая равномерного распределения проявляется уже в линейном приближении. Проведены численные расчеты для конкретных сред.

Ключевые слова: двухфазная среда, волны, свободная поверхность, линейная задача.

**Введение.** В [1] приведено решение линейной, а в [2, 3] нелинейной задачи о распространении волн на свободной поверхности слоя двухфазной смеси при равномерном распределении дисперсной фазы. В этих работах найдена зависимость параметров волны от начальной (невозмущенной) концентрации примеси, а в [2, 3] — и ее волновое возмущение. Показано, что в случае постоянной невозмущенной концентрации ее возмущение — величина более высокого порядка малости по сравнению с другими. Настоящая работа посвящена постановке и решению задачи о плоских волнах на поверхности слоя двухфазной среды с экспоненциальным распределением по глубине концентрации дисперсной фазы. Используемая здесь многоскоростная модель движения является более общей, чем в указанных выше работах, так как в уравнениях движения учитывается не только межфазное трение, но и сила присоединенных масс.

**1. Математическая модель.** Рассматривается слой двухфазной смеси постоянной глубины, находящийся на твердом горизонтальном основании. Сверху слой ограничен свободной поверхностью. Несущая фаза ( $i = 1$ ) представляет собой идеальную несжимаемую жидкость, вязкость которой проявляется только на межфазной границе, дисперсная ( $i = 2$ ) — недеформируемые частицы. Движение такой среды в отсутствие тепло- и массообмена описывается системой уравнений [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial t^*} + \nabla(\rho_i \mathbf{v}_i^*) &= 0, \\ \rho_i \frac{d\mathbf{v}_i^*}{dt^*} &= -\alpha_i \nabla P_i + (-1)^i \alpha_1 \alpha_2 \left[ \frac{\rho_1^0}{2} \left( \frac{d\mathbf{v}_1^*}{dt^*} - \frac{d\mathbf{v}_2^*}{dt^*} \right) + R(\mathbf{v}_1^* - \mathbf{v}_2^*) \right] + \rho_i \mathbf{g}, \\ \rho_i &= \rho_i^0 \alpha_i, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \rho_i^0 = \text{const}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\alpha_i$ ,  $\mathbf{v}_i^*$ ,  $P_i$ ,  $\rho_i$ ,  $\rho_i^0$  — объемная концентрация, вектор скорости, давление, приведенная и истинная плотности  $i$ -й фазы соответственно; звездочкой (где это необходимо) отмечены размерные величины;  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения; коэффициент  $R$  характеризует силу вязкого трения Стокса (например, для сферических частиц радиуса  $a$   $R = 9\eta/(2a^2)$  [4], где  $\eta$  — динамическая вязкость жидкости).

Введем декартову систему координат так, чтобы невозмущенная свободная поверхность совпадала с плоскостью  $z^* = 0$ , а дно — с плоскостью  $z^* = -l^*$  ( $l^*$  — глубина слоя); ось  $z^*$  направлена вертикально вверх. Положим, что в отсутствие волны среда находится в покое и дисперсная фаза экспоненциально распределена по глубине слоя смеси, т. е.  $\alpha_2^0(z^*) = \alpha_0 \exp(\theta\delta^*z^*)$ . Здесь  $\alpha_0$  — концентрация частиц на невозмущенной поверхности  $z^* = 0$ ;  $\delta^*$  — положительный эмпирический коэффициент, зависящий от физических параметров среды; коэффициент  $\theta = 1$  при  $\rho_2^0 < \rho_1^0$  и  $\theta = -1$  при  $\rho_2^0 > \rho_1^0$ . Экспериментальные наблюдения распределения примеси по глубине покоящегося слоя смеси [5] показывают достаточную точность такой модели. Для того чтобы система (1.1) описывала волновое движение смеси, необходимо ввести волновые возмущения концентрации и давления [1]

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta^*z^*) - \alpha', & \alpha_2 &= \alpha_0 \exp(\theta\delta^*z^*) + \alpha', \\ P_i &= P_a - \rho_i^0 g z^* + p', & i &= 1, 2.\end{aligned}\quad (1.2)$$

Здесь  $\alpha'$  — волновое возмущение концентрации дисперсной фазы;  $p'$  — возмущение давления. Подставляя (1.2) в (1.1), получаем систему уравнений для описания волнового движения смеси

$$\begin{aligned}-\frac{\partial\alpha'}{\partial t^*} + (1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta^*z^*) - \alpha')\nabla \cdot \mathbf{v}_1^* - \alpha_0\theta\delta^* \exp(\theta\delta^*z^*)v_{1z}^* - \mathbf{v}_1^* \cdot \nabla\alpha' &= 0, \\ \frac{\partial\alpha'}{\partial t^*} + (\alpha_0 \exp(\theta\delta^*z^*) + \alpha')\nabla \cdot \mathbf{v}_2^* + \alpha_0\theta\delta^* \exp(\theta\delta^*z^*)v_{2z}^* + \mathbf{v}_2^* \cdot \nabla\alpha' &= 0, \\ \left(\rho_1^0 + \frac{\rho_1^0}{2}(\alpha_0 \exp(\theta\delta^*z^*) + \alpha')\right)\frac{d\mathbf{v}_1^*}{dt^*} - & \\ - \frac{\rho_1^0}{2}(\alpha_0 \exp(\theta\delta^*z^*) + \alpha')\frac{d\mathbf{v}_2^*}{dt^*} - R(\alpha_0 \exp(\theta\delta^*z^*) + \alpha')(\mathbf{v}_2^* - \mathbf{v}_1^*) + \nabla p' &= 0, \\ \left(\rho_2^0 + \frac{\rho_1^0}{2}(1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta^*z^*) - \alpha')\right)\frac{d\mathbf{v}_2^*}{dt^*} - & \\ - \frac{\rho_1^0}{2}(1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta^*z^*) - \alpha')\frac{d\mathbf{v}_1^*}{dt^*} + R(1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta^*z^*) - \alpha')(\mathbf{v}_2^* - \mathbf{v}_1^*) + \nabla p' &= 0.\end{aligned}\quad (1.3)$$

На свободной поверхности  $z^* = \xi(t^*, x^*, y^*)$  выполняются кинематическое и динамическое граничные условия [1]

$$\alpha_1 v_{1n}^* + \alpha_2 v_{2n}^* = V_n, \quad P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 = P_a,$$

где  $\alpha_1 v_{1n}^* + \alpha_2 v_{2n}^*$  и  $V_n$  — нормальные проекции объемной скорости смеси и свободной поверхности. С учетом (1.2) граничные условия в случае плоскопараллельного волнового движения примут вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial\xi}{\partial t^*} - (1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta^*\xi) - \alpha')v_{1z}^* - (\alpha_0 \exp(\theta\delta^*\xi) + \alpha')v_{2z}^* + & \\ + \frac{\partial\xi}{\partial x^*} [(1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta^*\xi) - \alpha')v_{1x}^* + (\alpha_0 \exp(\theta\delta^*\xi) + \alpha')v_{2x}^*] &= 0, \quad (1.4)\end{aligned}$$

$$p - [\rho_1^0(1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta^*\xi) - \alpha') + \rho_2^0(\alpha_0 \exp(\theta\delta^*\xi) + \alpha')]g\xi = 0, \quad z^* = \xi(t^*, x^*).$$

Считая, что поток массы через твердую поверхность горизонтального основания отсутствует и смесь “проскальзывает” вдоль нее, на дне ( $z^* = -l^*$ ) получаем условия непротекания [4]

$$v_{iz}^* = 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.5)$$

Уравнения (1.3) и граничные условия (1.4), (1.5) составляют математическую модель волнового движения дисперсной смеси с неоднородным распределением второй фазы в покоящемся слое.

**2. Постановка краевой задачи.** Пусть по свободной поверхности слоя в положительном направлении оси  $x^*$  распространяется волна длиной  $\lambda$ . Длина волны много больше характерного размера дисперсных частиц ( $\lambda \gg a$ ). Для прогрессивных волн принимается [6], что переменная  $x^*$  может входить в решение только в комбинации  $x^* - c^*t^*$ , где  $c^*$  — фазовая скорость волны, подлежащая определению. Введем следующие безразмерные переменные и величины:

$$\begin{aligned} t = kc^*t^*, \quad x = kx^*, \quad z = kz^*, \quad l = kl^*, \quad \mu_i = \rho_i^0/\rho^0, \quad r = R/(\rho^0kc_0), \\ \delta = \delta^*/k, \quad \gamma = \alpha'/\alpha_0, \quad \zeta = k\xi, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^*/c_0, \quad p = p'/(\rho^0c_0^2), \quad c = c^*/c_0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\rho^0 = (1 - \alpha_0)\rho_1^0 + \alpha_0\rho_2^0$  — плотность покоящейся смеси на невозмущенной свободной поверхности;  $c_0$  — фазовая скорость волны, соответствующая равномерному распределению примеси в покоящемся слое в линейном приближении;  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число. Подставляя (2.1) в систему (1.3)–(1.5), получаем следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} -\alpha_0c \frac{\partial \gamma}{\partial t} + (1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta z) - \alpha_0\gamma) \left( \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right) - \alpha_0\theta\delta \exp(\theta\delta z)v_{1z} - \alpha_0 \left( v_{1x} \frac{\partial \gamma}{\partial x} + v_{1z} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) = 0, \\ \alpha_0c \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \alpha_0(\exp(\theta\delta z) + \gamma) \left( \frac{\partial v_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} \right) + \alpha_0\theta\delta \exp(\theta\delta z)v_{2z} + \alpha_0 \left( v_{2x} \frac{\partial \gamma}{\partial x} + v_{2z} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) = 0, \\ \left( \mu_1 + \frac{\mu_1}{2} (\alpha_0 \exp(\theta\delta z) + \alpha_0\gamma) \right) c \frac{\partial v_{1s}}{\partial t} - \frac{\mu_1}{2} (\alpha_0 \exp(\theta\delta z) + \alpha_0\gamma) c \frac{\partial v_{2s}}{\partial t} - \\ - r(\alpha_0 \exp(\theta\delta z) + \alpha_0\gamma)(v_{2s} - v_{1s}) + \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\mu_1}{2} (\alpha_0 \exp(\theta\delta z) + \alpha_0\gamma) \left( v_{2x} \frac{\partial v_{2s}}{\partial x} + v_{2z} \frac{\partial v_{2s}}{\partial z} \right) + \\ + \left( \mu_1 + \frac{\mu_1}{2} (\alpha_0 \exp(\theta\delta z) + \alpha_0\gamma) \right) \left( v_{1x} \frac{\partial v_{1s}}{\partial x} + v_{1z} \frac{\partial v_{1s}}{\partial z} \right) = 0, \\ \left( \mu_2 + \frac{\mu_1}{2} (1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta z) - \alpha_0\gamma) \right) c \frac{\partial v_{2s}}{\partial t} - \frac{\mu_1}{2} (1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta z) - \alpha_0\gamma) c \frac{\partial v_{1s}}{\partial t} + \\ + r(1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta z) - \alpha_0\gamma)(v_{2s} - v_{1s}) + \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\mu_1}{2} (1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta z) - \alpha_0\gamma) \left( v_{1x} \frac{\partial v_{1s}}{\partial x} + v_{1z} \frac{\partial v_{1s}}{\partial z} \right) + \\ + \left( \mu_2 + \frac{\mu_1}{2} (1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta z) - \alpha_0\gamma) \right) \left( v_{2x} \frac{\partial v_{2s}}{\partial x} + v_{2z} \frac{\partial v_{2s}}{\partial z} \right) = 0, \\ s = x, z. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Безразмерные кинематическое и динамическое условия на свободной поверхности  $z = \zeta(t, x)$  записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} c \frac{\partial \zeta}{\partial t} - (1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta\zeta))v_{1z} - \alpha_0 \exp(\theta\delta\zeta)v_{2z} + \\ + \frac{\partial \zeta}{\partial x} [(1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta\zeta))v_{1x} + \alpha_0 \exp(\theta\delta\zeta)v_{2x}] - \\ - \alpha_0\gamma(v_{2z} - v_{1z}) + \alpha_0\gamma \frac{\partial \zeta}{\partial x} (v_{2x} - v_{1x}) = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$p - (\mu_1(1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta\zeta)) + \mu_2\alpha_0 \exp(\theta\delta\zeta))\nu_0^2\zeta + \alpha_0(\mu_1 - \mu_2)\nu_0^2\gamma\zeta = 0, \quad \nu_0^2 = g/(kc_0^2).$$

На дне ( $z = -l$ ) имеем

$$v_{iz} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.4)$$

Уравнения и граничные условия (2.2)–(2.4) составляют нелинейную краевую задачу для определения скоростей волнового движения фаз, формы свободной поверхности, возмущений давления и концентрации.

**3. Решение линейной задачи.** Рассмотрим линейный вариант задачи (2.2)–(2.4). Полагаем, что амплитуда волны мала по сравнению с длиной. Тогда кинематическое и динамическое граничные условия (2.3), заданные на неизвестной поверхности  $z = \zeta(t, x)$ , можно свести к условиям на фиксированной поверхности  $z = 0$ . Для этого все неизвестные функции, входящие в них, следует разложить в ряд Тейлора в окрестности  $z = 0$  (в частности,  $\exp(\theta\delta\zeta) = 1 + \theta\delta\zeta + \delta^2\zeta^2/2 + \dots$ ). Кроме того, для поверхностных волн малой амплитуды скорости волнового движения фаз и волновые возмущения одного порядка с величиной  $\zeta$ , т. е. малы [6]. Учитывая малость входящих в (2.2)–(2.4) неизвестных величин, в уравнениях (2.2) и разложенных в ряд в окрестности  $z = 0$  граничных условиях (2.3) оставим только линейные по отношению к ним слагаемые. В результате получаем линейную задачу

$$\begin{aligned} -\alpha_0 c \frac{\partial \gamma}{\partial t} + (1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta z)) \left( \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right) - \alpha_0 \theta \delta \exp(\theta\delta z) v_{1z} &= 0, \\ c \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \exp(\theta\delta z) \left( \frac{\partial v_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} \right) + \theta \delta \exp(\theta\delta z) v_{2z} &= 0, \\ \left( \mu_1 + \frac{\mu_1}{2} \alpha_0 \exp(\theta\delta z) \right) c \frac{\partial v_{1s}}{\partial t} - \frac{\mu_1}{2} \alpha_0 \exp(\theta\delta z) c \frac{\partial v_{2s}}{\partial t} - r \alpha_0 \exp(\theta\delta z) (v_{2x} - v_{1x}) + \frac{\partial p}{\partial s} &= 0, \\ \left( \mu_2 + \frac{\mu_1}{2} (1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta z)) \right) c \frac{\partial v_{2s}}{\partial t} - \frac{\mu_1}{2} (1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta z)) c \frac{\partial v_{1s}}{\partial t} + \\ + r (1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta z)) (v_{2s} - v_{1s}) + \frac{\partial p}{\partial s} &= 0, \quad s = x, z, \\ c \frac{\partial \zeta}{\partial t} = (1 - \alpha_0) v_{1z} + \alpha_0 v_{2z}, \quad p - \nu_0^2 \zeta = 0, \quad \nu_0^2 = \frac{g}{kc_0^2}, \quad z = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Условия на дне (2.4) останутся в том же виде.

Исключая неизвестные функции, систему уравнений (3.1) можно свести к задаче для определения возмущения давления  $p(t, x, z)$

$$\begin{aligned} c^2 \mu_1 (\rho(z) + 2\mu_2) (\mu_1 + 2\mu(z)) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta p + 4cr (\mu_1 \rho(z) + \mu(z) \rho(z) + \mu_1 \mu_2) \frac{\partial}{\partial t} \Delta p + 4r^2 \rho(z) \Delta p &= \\ = \rho'(z) \left[ 3c^2 \mu_1 (\mu_1 + 2\mu_2) \frac{\partial^3 p}{\partial t^2 \partial z} + 4cr (2\mu_1 + \mu_2) \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial z} + 4r^2 \frac{\partial p}{\partial z} \right], & \\ \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} + \frac{2r}{c\mu_1(1+2\mu_2)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{(\mu_1 + 2\mu^0)\nu_0^2}{c^2\mu_1(1+2\mu_2)} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial z} + \frac{2r\nu_0^2}{c^3\mu_1(1+2\mu_2)} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \quad z = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad z = -l, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \mu_1 + \alpha_0 \exp(\theta\delta z) (\mu_2 - \mu_1), \quad \mu(z) = \mu_2 - \alpha_0 \exp(\theta\delta z) (\mu_2 - \mu_1), \\ \mu^0 &= \mu(0), \quad \Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2. \end{aligned}$$

Неизвестную фазовую скорость волны  $c$  следует искать из условия на свободной поверхности (3.2) при определении  $p$ . После этого скорости волнового движения, возмущение концентрации, а также форма свободной поверхности могут быть найдены из уравнений (3.1).

Решение линейной задачи должно удовлетворять ряду требований. Наличие относительного движения фаз вызывает затухание волнового движения. В отсутствие дисперсной фазы ( $\alpha_0 = 0$ ) или при одинаковых истинных плотностях фаз ( $\rho_1^0 = \rho_2^0$ ) решение задачи должно переходить в известные волновые решения для жидкостей [6]. Поэтому в случае распространения по свободной поверхности смеси прогрессивной волны решение задачи (3.2) следует искать в виде

$$p = \exp(-bt)[M(z) \sin(x-t) + N(z) \cos(x-t)] / \operatorname{sh} l, \quad (3.3)$$

где  $b = \beta / (kc^*)$  — безразмерный декремент затухания ( $\beta$  — размерный декремент).

Подставляя (3.3) в (3.2) и приравнявая к нулю коэффициенты при  $\sin(x-t)$  и  $\cos(x-t)$ , получаем систему дифференциальных уравнений и граничных условий. Уравнения для определения неизвестных функций  $M(z)$  и  $N(z)$  имеют вид

$$\begin{aligned} & [4r^2 \rho(z) - 4bcr(\mu_1 \rho(z) + \mu(z)\rho(z) + \mu_1 \mu_2) + \\ & \quad + c^2(b^2 - 1)\mu_1(\rho(z) + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu(z))](M''(z) - M(z)) + \\ & \quad + 2c[2r(\mu_1 \rho(z) + \mu(z)\rho(z) + \mu_1 \mu_2) - cb\mu_1(\rho(z) + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu(z))](N''(z) - N(z)) = \\ & = [4r^2 - 4bcr(2\mu_1 + \mu_2) + 3c^2(b^2 - 1)\mu_1(\mu_1 + 2\mu_2)]\rho'(z)M'(z) + \\ & \quad + 2c[2r(2\mu_1 + \mu_2) - 3cb\mu_1(\mu_1 + 2\mu_2)]\rho'(z)N'(z), \quad (3.4) \\ & 2c[2r(\mu_1 \rho(z) + \mu(z)\rho(z) + \mu_1 \mu_2) - cb\mu_1(\rho(z) + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu(z))](M''(z) - M(z)) - \\ & \quad - [4r^2 \rho(z) - 4bcr(\mu_1 \rho(z) + \mu(z)\rho(z) + \mu_1 \mu_2) + \\ & \quad + c^2(b^2 - 1)\mu_1(\rho(z) + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu(z))](N''(z) - N(z)) = \\ & = 2c[2r(2\mu_1 + \mu_2) - 3cb\mu_1(\mu_1 + 2\mu_2)]\rho'(z)M'(z) - \\ & \quad - [4r^2 - 4bcr(2\mu_1 + \mu_2) + 3c^2(b^2 - 1)\mu_1(\mu_1 + 2\mu_2)]\rho'(z)N'(z). \end{aligned}$$

При  $z = 0$  должны выполняться условия

$$\begin{aligned} & M(z)[c^3 b(3 - b^2)\mu_1(1 + 2\mu_2) + 2c^2 r(b^2 - 1)] + M'(z)\nu_0^2(2r - cb(\mu_1 + 2\mu^0)) + \\ & \quad + N(z)[c^3(3b^2 - 1)\mu_1(1 + 2\mu_2) - 4c^2 br] + N'(z)\nu_0^2 c(\mu_1 + 2\mu^0) = 0, \quad (3.5) \\ & M(z)[c^3(3b^2 - 1)\mu_1(1 + 2\mu_2) - 4c^2 br] + M'(z)\nu_0^2 c(\mu_1 + 2\mu^0) - \\ & \quad - N(z)[c^3 b(3 - b^2)\mu_1(1 + 2\mu_2) + 2c^2 r(b^2 - 1)] - N'(z)\nu_0^2(2r - cb(\mu_1 + 2\mu^0)) = 0. \end{aligned}$$

При  $z = -l$  имеем

$$M'(z) = 0, \quad N'(z) = 0. \quad (3.6)$$

Решение системы (3.4) будем искать в виде рядов по малому параметру. В качестве малого параметра возьмем  $\delta$ , тем самым предполагая, что распределение примеси в покоящемся слое близко к равномерному. Неизвестные, входящие в (3.4)–(3.6), ищем в виде

$$M(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k M_k(z), \quad N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k N_k(z), \quad b = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k b_k, \quad c = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta^k c_k. \quad (3.7)$$

Если в (3.4)–(3.6) положить  $\delta = 0$ , то получаем задачу с однородной концентрацией примеси в покоящемся слое [1]. Следовательно, решение задачи в нулевом приближении имеет вид

$$M_0(z) = K_0 \operatorname{ch}(z+l), \quad N_0(z) = L_0 \operatorname{ch}(z+l),$$

$$\begin{aligned}
c_0^2 &= \frac{\mu_1 + 2\mu^0}{\mu_1(1 + 2\mu_2)} \nu_1^2 \operatorname{th} l + \tilde{\beta} \left( 3\tilde{\beta} - \frac{4r_1}{\mu_1(1 + 2\mu_2)} \right), \\
\tilde{\beta} &= \left[ -\frac{\chi}{2} + \sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \frac{\psi^3}{27}} \right]^{1/3} + \left[ -\frac{\chi}{2} - \sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \frac{\psi^3}{27}} \right]^{1/3} + \frac{2r_1}{3\mu_1(1 + 2\mu_2)}, \\
\psi &= (3\mu_1(1 + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu^0)\nu_1^2 \operatorname{th} l - 4r_1^2)/(12\mu_1^2(1 + 2\mu_2)^2), \\
\chi &= r_1[4r_1^2 + 9\mu_1(1 + 2\mu_2)(\mu_1 - \mu + 3\mu_1\mu_2)\nu_1^2 \operatorname{th} l]/(54\mu_1^3(1 + 2\mu_2)^3), \\
r_1 &= c_0 r = R/(\rho^0 k), \quad \tilde{\beta} = c_0 b_0 = \beta_0/k, \quad \nu_1^2 = c_0^2 \nu_0^2 = g/k,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

где  $K_0, L_0$  — произвольные постоянные;  $\beta_0$  — размерный декремент затухания, соответствующий линейной задаче. Формулы (3.8) отличаются от приведенных в [1] слагаемыми, обусловленными силой присоединенных масс. Если в исходных уравнениях (1.1) пренебречь этой силой, то (3.8) полностью совпадают с результатами работы [1].

Чтобы получить уравнения и граничные условия для нахождения решения в первом приближении, необходимо (3.7) подставить в (3.4)–(3.6). Малый параметр  $\delta$  явно входит в уравнения (3.4), поэтому величины, входящие в них, следует предварительно разложить в ряд по степеням  $\delta$ . Подставляя (3.7) в (3.4)–(3.6) и учитывая (3.8), для неизвестных величин  $M_1(z)$  и  $N_1(z)$  получаем следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned}
& [4r^2 - 4b_0 r(\mu_1 + \mu^0 + \mu_1\mu_2) + (b_0^2 - 1)\mu_1(1 + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu^0)](M_1''(z) - M_1(z)) + \\
& \quad + 2[2r(\mu_1 + \mu^0 + \mu_1\mu_2) - b_0\mu_1(1 + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu^0)](N_1''(z) - N_1(z)) = \\
& = \theta\alpha_0(\mu_2 - \mu_1)\{[4r^2 - 4b_0 r(2\mu_1 + \mu_2) + (b_0^2 - 1)\mu_1(1 + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu^0)]K_0 + \\
& \quad + 2[2r(2\mu_1 + \mu_2) - b_0\mu_1(1 + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu^0)]L_0\} \operatorname{sh}(z + l) = 0, \\
& 2[2r(\mu_1 + \mu^0 + \mu_1\mu_2) - b_0\mu_1(1 + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu^0)](M_1''(z) - M_1(z)) - \\
& \quad - [4r^2 - 4b_0 r(\mu_1 + \mu^0 + \mu_1\mu_2) + (b_0^2 - 1)\mu_1(1 + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu^0)](N_1''(z) - N_1(z)) = \\
& = \theta\alpha_0(\mu_2 - \mu_1)\{2[2r(2\mu_1 + \mu_2) - b_0\mu_1(1 + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu^0)]K_0 - \\
& \quad - [4r^2 - 4b_0 r(2\mu_1 + \mu_2) + (b_0^2 - 1)\mu_1(1 + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu^0)]L_0\} \operatorname{sh}(z + l) = 0.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

При  $z = 0$  должны выполняться условия

$$\begin{aligned}
& M_1(z)[b_0(3 - b_0^2)\mu_1(1 + 2\mu_2) + 2r(b_0^2 - 1)] + M_1'(z)\nu_0^2(2r - b_0(\mu_1 + 2\mu^0)) + \\
& \quad + N_1(z)[(3b_0^2 - 1)\mu_1(1 + 2\mu_2) - 4b_0 r] + N_1'(z)\nu_0^2(\mu_1 + 2\mu^0) + \\
& \quad + b_1\{[(4b_0 r - 3(b_0^2 - 1)\mu_1(1 + 2\mu_2)) \operatorname{ch} l - \nu_0^2(\mu_1 + 2\mu^0) \operatorname{sh} l]K_0 + \\
& \quad \quad + 2[3b_0\mu_1(1 + 2\mu_2) - 2r] \operatorname{sh} l L_0\} + \\
& \quad + c_1\{[(4r(b_0^2 - 1) + 3b_0(3 - b_0^2)\mu_1(1 + 2\mu_2)) \operatorname{ch} l - \nu_0^2 b_0(\mu_1 + 2\mu^0) \operatorname{ch} l]K_0 + \\
& \quad \quad + [(3(3b_0^2 - 1)\mu_1(1 + 2\mu_2) - 8rb_0) \operatorname{ch} l + \nu_0^2(\mu_1 + 2\mu^0) \operatorname{sh} l]L_0\} = 0, \quad z = 0, \\
& M_1(z)[(3b_0^2 - 1)\mu_1(1 + 2\mu_2) - 4b_0 r] + M_1'(z)\nu_0^2(\mu_1 + 2\mu^0) - \\
& \quad - N_1(z)[b_0(3 - b_0^2)\mu_1(1 + 2\mu_2) + 2r(b_0^2 - 1)] - N_1'(z)\nu_0^2(2r - b_0(\mu_1 + 2\mu^0)) + \\
& \quad + b_1\{2[3b_0\mu_1(1 + 2\mu_2) - 2r] \operatorname{sh} l K_0 - \\
& \quad - [(4b_0 r - 3(b_0^2 - 1)\mu_1(1 + 2\mu_2)) \operatorname{ch} l - \nu_0^2(\mu_1 + 2\mu^0) \operatorname{sh} l]L_0\} +
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$+ c_1 \{ [(3(3b_0^2 - 1)\mu_1(1 + 2\mu_2) - 8rb_0) \operatorname{ch} l + \nu_0^2(\mu_1 + 2\mu^0) \operatorname{sh} l] K_0 - \\ - [(4r(b_0^2 - 1) + 3b_0(3 - b_0^2)\mu_1(1 + 2\mu_2)) \operatorname{ch} l - \nu_0^2 b_0(\mu_1 + 2\mu^0) \operatorname{ch} l] L_0 \} = 0, \quad z = 0.$$

На дне имеем следующие условия:

$$M_1'(z) = 0, \quad N_1'(z) = 0, \quad z = -l. \quad (3.11)$$

Решение системы линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами (3.9), удовлетворяющее условию на дне (3.11), имеет вид

$$M_1(z) = K_1 \operatorname{ch}(z + l) + (Y_1 K_0 + Y_2 L_0)(z \operatorname{ch}(z + l) - \operatorname{sh}(z + l)), \\ N_1(z) = L_1 \operatorname{ch}(z + l) + (-Y_2 K_0 + Y_1 L_0)(z \operatorname{ch}(z + l) - \operatorname{sh}(z + l)), \quad (3.12)$$

где коэффициенты  $K_1$  и  $L_1$  произвольны, а  $Y_1$  и  $Y_2$  определяются выражениями

$$Y_1 = \theta \alpha_0 (\mu_2 - \mu_1) \{ [4r^2 - 4b_0 r (2\mu_1 + \mu_2) + 3(b_0^2 - 1)\mu_1(\mu_1 + 2\mu_2)] \times \\ \times [4r^2 - 4b_0 r (\mu_1 + \mu^0 + \mu_1 \mu_2) + (b_0^2 - 1)\mu_1(1 + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu^0)] + \\ + 4[2r(2\mu_1 + \mu_2) - 3b_0 \mu_1(\mu_1 + 2\mu_2)][2r(\mu_1 + \mu^0 + \mu_1 \mu_2) - b_0 \mu_1(1 + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu^0)] \} / (2D_1), \\ Y_2 = \theta \alpha_0 (\mu_2 - \mu_1) \{ [4r^2 - 4b_0 r (\mu_1 + \mu^0 + \mu_1 \mu_2) + (b_0^2 - 1)\mu_1(1 + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu^0)] \times \\ \times [2r(2\mu_1 + \mu_2) - 3b_0 \mu_1(\mu_1 + 2\mu_2)] - \\ - [4r^2 - 4b_0 r (2\mu_1 + \mu_2) + 3(b_0^2 - 1)\mu_1(\mu_1 + 2\mu_2)] \times \\ \times [2r(\mu_1 + \mu^0 + \mu_1 \mu_2) - b_0 \mu_1(1 + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu^0)] \} / D_1, \quad (3.13)$$

$$D_1 = (4r^2 - 4b_0 r \mu_1(1 + 2\mu_2) + (b_0^2 + 1)\mu_1^2(1 + 2\mu_2)^2)(4r^2 - 4b_0 r (\mu_1 + 2\mu^0) + (b_0^2 + 1)(\mu_1 + 2\mu^0)^2).$$

Как известно [7], для того чтобы разложение было равномерно пригодным, отношения  $M_n(z)/M_{n-1}(z)$ ,  $N_n(z)/N_{n-1}(z)$  должны быть ограничены для всей области изменения  $z$ . В данном случае это условие выполнено, если справедливо условие  $l < \delta^{-1}$ . Коэффициент  $\delta$  можно выразить через концентрацию примеси на поверхности ( $\alpha_0$ ) и на дне ( $\alpha_l = \alpha(-l) = \alpha_0 \exp(-\theta \delta l)$ ). Из последнего равенства находим  $\delta = l^{-1} \ln(\alpha_0/\alpha_l)^\theta$ . Тогда неравенство  $l < \delta^{-1}$  можно переписать как  $\ln(\alpha_0/\alpha_l)^\theta < 1$ , откуда получаем ограничения на область применимости модели

$$\alpha_0/\alpha_l < e \quad \text{при} \quad \rho_2^0 < \rho_1^0, \quad \alpha_l/\alpha_0 < e \quad \text{при} \quad \rho_2^0 > \rho_1^0.$$

Таким образом, данная модель будет хорошо описывать волновой процесс, если концентрация дисперсной фазы изменяется по глубине слоя менее чем в  $e$  раз.

Подставляя (3.12) в условия (3.10) и учитывая решение линейной задачи (3.7), получаем, что нетривиальное относительно  $K_0$  и  $L_0$  решение существует, только если имеют место равенства

$$b_1 [(4b_0 r - 3(b_0^2 - 1)\mu_1(1 + 2\mu_2)) \operatorname{ch} l - \nu_0^2(\mu_1 + 2\mu^0) \operatorname{sh} l] + \\ + c_1 [(4r(b_0^2 - 1) + 3b_0(3 - b_0^2)\mu_1(1 + 2\mu_2)) \operatorname{ch} l - \nu_0^2 b_0(\mu_1 + 2\mu^0) \operatorname{ch} l] + \\ + \nu_0^2 \operatorname{th} l [(2r - b_0(\mu_1 + 2\mu^0))Y_1 - (\mu_1 + 2\mu^0)Y_2] = 0, \\ 2b_1 [3b_0 \mu_1(1 + 2\mu_2) - 2r] + c_1 [(3(3b_0^2 - 1)\mu_1(1 + 2\mu_2) - 8rb_0) \operatorname{cth} l + \nu_0^2(\mu_1 + 2\mu^0)] + \\ + \nu_0^2 \operatorname{th} l [(\mu_1 + 2\mu^0)Y_1 + (2r - b_0(\mu_1 + 2\mu^0))Y_2] = 0.$$

Из этой системы линейных неоднородных уравнений находим  $b_1$  и  $c_1$ :

$$b_1 = \nu_0^2 \{ Y_1 [-\operatorname{th}^2 l (16b_0 r^2 + 2r[\mu_1 + 6\mu_1 \mu_2 - 4\mu^0 - b_0^2(11\mu_1 + 18\mu_1 \mu_2 + 4\mu^0)] + \\ + 6b_0(b_0^2 + 1)\mu_1(1 + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu^0)) + 2\nu_0^2 r(\mu_1 + 2\mu^0) \operatorname{th}^3 l] + \\ + Y_2 [-\operatorname{th}^2 l (8(b_0^2 - 1)r^2 + 2b_0 r [7\mu_1 + 18\mu_1 \mu_2 - 4\mu^0 - b_0^2(5\mu_1 + 6\mu_1 \mu_2 + 4\mu^0)] + \\ + 3(b_0^4 - 1)\mu_1(1 + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu^0)) + \nu_0^2 (2b_0 r - (b_0^2 + 1)(\mu_1 + 2\mu^0))(\mu_1 + 2\mu^0) \operatorname{th}^3 l] \} / D_2,$$

$$\begin{aligned}
c_1 = \nu_0^2 \{ & Y_1 [\text{th}^2 l (8r^2 - 12b_0 r (\mu_1 + 2\mu_2) + 3(b_0^2 + 1)(\mu_1^2 + 2\mu_1 \mu^0 + 2\mu_1^2 \mu_2 + 4\mu^0 \mu_1 \mu_2)) - \\ & - \nu_0^2 (\mu_1 + 2\mu^0)^2 \text{th}^3 l] + Y_2 [\text{th}^2 l (8b_0 r^2 + 2r[\mu_1 + 6\mu_1 \mu_2 - 4\mu^0 - b_0^2 (5\mu_1 + 6\mu_1 \mu_2 + 4\mu^0)] + \\ & + 3b_0 (b_0^2 + 1) \mu_1 (1 + 2\mu_2) (\mu_1 + 2\mu^0)) - \nu_0^2 (2r - b_0 (\mu_1 + 2\mu^0)) (\mu_1 + 2\mu^0) \text{th}^3 l] \} / D_2, \\ D_2 = \nu_0^4 (\mu_1 + 2\mu^0)^2 \text{th}^2 l - & 2(\mu_1 + 2\mu^0) [4b_0 r + 3(1 - b_0^2) \mu_1 (1 + 2\mu_2)] \text{th} l + \\ & + (b_0^2 + 1) [16r^2 - 24b_0 r \mu_1 (1 + 2\mu_2) + 9(b_0^2 + 1) \mu_1^2 (1 + 2\mu_2)^2].
\end{aligned} \quad (3.14)$$

Таким образом, размерные декремент затухания  $\beta$  и фазовая скорость волны  $c^*$  с точностью до  $\delta^1$  равны

$$\beta = kc^*b = kc_0b_0 + \delta kc_0(b_1 + b_0c_1), \quad c^* = c_0(1 + \delta c_1).$$

Подставляя (3.8), (3.12) в (3.7), а затем в (3.3), находим возмущение давления

$$\begin{aligned}
p = \exp(-bt) \{ & (K_0 \sin(x-t) + L_0 \cos(x-t)) \text{ch}(z+l) + \\ & + \delta [(K_1 \sin(x-t) + L_1 \cos(x-t)) \text{ch}(z+l) + \\ & + ([Y_1 K_0 + Y_2 L_0] \sin(x-t) + (-Y_2 K_0 + Y_1 L_0) \cos(x-t)) (z \text{ch}(z+l) - \text{sh}(z+l))] \} / \text{sh} l,
\end{aligned} \quad (3.15)$$

где постоянные  $Y_1, Y_2$  определены формулами (3.13), а  $K_i$  и  $L_i$  могут быть найдены из дополнительных начальных данных. Форму свободной поверхности с точностью до  $\delta^1$  определяем из условия (3.2):

$$\begin{aligned}
\zeta = \text{cth} l \exp(-bt) [ & K_0 \sin(x-t) + L_0 \cos(x-t) + \\ & + \delta \{ (K_1 - \text{th} l (Y_1 K_0 + Y_2 L_0)) \sin(x-t) + (L_1 - \text{th} l (-Y_2 K_0 + Y_1 L_0)) \cos(x-t) \} ] / \nu_0^2.
\end{aligned}$$

Если в начальный момент времени  $t = 0$  гребень волны проходит через ось  $z$  и высота волны равна  $L$ , то

$$K_0 = 0, \quad L_0 = \nu_0^2 L \text{th} l, \quad K_1 = \nu_0^2 L^2 Y_2 \text{th}^2 l, \quad L_1 = \nu_0^2 L Y_1 \text{th}^2 l. \quad (3.16)$$

Следовательно,  $\zeta$  можно переписать так:

$$\zeta = L \exp(-bt) \cos(x-t).$$

Выражение для возмущения давления (3.15) с учетом (3.16) примет вид

$$\begin{aligned}
p = L \nu_0^2 \exp(-bt) \{ & \cos(x-t) \text{ch}(z+l) + \\ & + \delta (Y_2 \sin(x-t) + Y_1 \cos(x-t)) [( \text{th} l + z) \text{ch}(z+l) - \text{sh}(z+l)] \} / \text{ch} l.
\end{aligned} \quad (3.17)$$

Подставляя (3.17) и соотношение  $c = 1 + \delta c_1$  в уравнения (3.1), интегрируя их и отбрасывая слагаемые порядка выше  $\delta$ , можно найти скорости фаз и возмущение концентрации  $\gamma$ . Выражения, определяющие скорости, громоздки, а получение их не представляет сложности. Поэтому приводить их не будем. Возмущение концентрации имеет вид

$$\begin{aligned}
\gamma = L \frac{\nu_0^2}{\text{ch} l} \frac{2\delta \exp(-bt)}{\alpha_0 (\mu_2 - \mu_1) (b_0^2 + 1)^2} \text{sh}(z+l) \times \\ \times [(2b_0 Y_1 + (b_0^2 - 1) Y_2) \sin(x-t) + ((b_0^2 - 1) Y_1 - 2b_0 Y_2) \cos(x-t)]. \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Из (3.18) следует, что возмущение концентрации по параметру  $\delta$  на порядок ниже возмущения давления и формы свободной поверхности. Но в отличие от задачи с однородной концентрацией [1] функция  $\gamma$  отлична от нуля уже в первом приближении по амплитудному параметру.



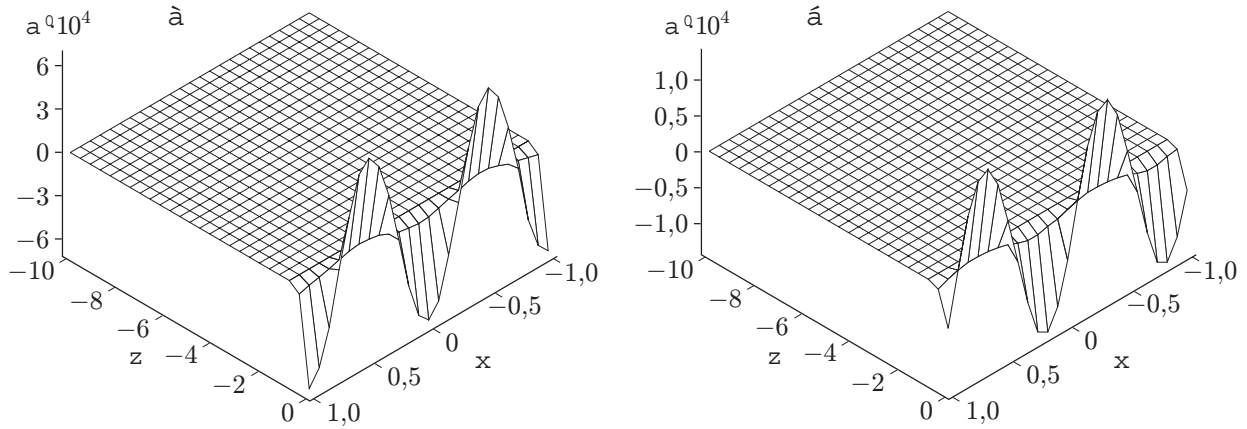


Рис. 1. Возмущение концентрации дисперсной фазы при  $\rho_2^0 = 500 \text{ кг/м}^3$ :  
 а —  $t = 0$ ; б —  $t = 300 \text{ с}$

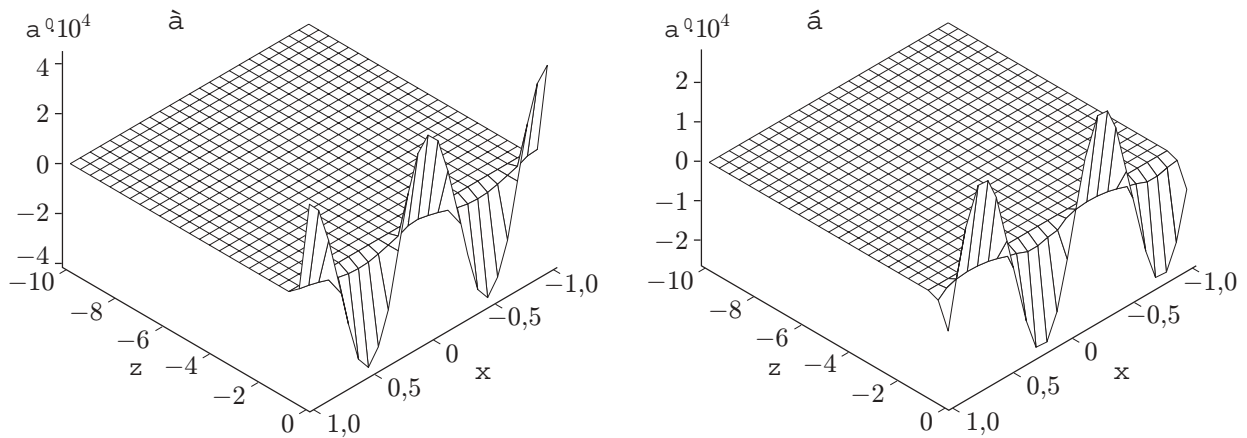


Рис. 2. Возмущение концентрации дисперсной фазы при  $\rho_2^0 = 1500 \text{ кг/м}^3$ :  
 а —  $t = 0$ ; б —  $t = 300 \text{ с}$

Для иллюстрации полученных результатов были проведены расчеты для дисперсной смеси воды с более легкими и более тяжелыми частицами при следующих параметрах:  $l^* = 10 \text{ м}$ ,  $\lambda = 1 \text{ м}$ ,  $\rho_1^0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\eta = 1,004 \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}$ ,  $a = 0,25 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,  $\alpha_0 = 0,1$ ,  $\delta^* = 0,05 \text{ 1/м}$ . Тогда при  $\rho_2^0 = 500 \text{ кг/м}^3$  концентрация дисперсной фазы в покоем слое  $\alpha_2^0 = \alpha_0 \exp(0,05z^*)$ , если  $\rho_2^0 = 1500 \text{ кг/м}^3$ , то  $\alpha_2^0 = \alpha_0 \exp(-0,05z^*)$ . На рис. 1,а представлено возмущение концентрации дисперсной фазы в момент времени  $t = 0$  для смеси жидкости с частицами плотности  $\rho_2^0 = 500 \text{ кг/м}^3$ . Возмущение носит волновой характер и является периодическим по  $x$  с периодом, равным длине волны. С увеличением глубины возмущение затухает и становится практически незаметным на глубине 1 м ( $z^* = -1$ ). Возмущение концентрации быстро затухает со временем (рис. 1,б). Аналогичные зависимости при  $\rho_2^0 = 1500 \text{ кг/м}^3$  представлены на рис. 2. Сравнивая рис. 1,а и рис. 2,а, видим, что прохождение волны оказывает большее влияние на распределение частиц в случае  $\rho_2^0 < \rho_1^0$ . Однако, как следует из сравнения рис. 1,б и рис. 2,б, в этом случае возмущения концентрации дисперсной фазы гаснут быстрее.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Баринов В. А., Бутакова Н. Н.** Волны на свободной поверхности двухфазной среды // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 4. С. 27–35.
2. **Баринов В. А., Бутакова Н. Н.** Нелинейные волны на свободной поверхности дисперсной смеси // Тр. Средне-Волж. мат. о-ва. 2002. Т. 3/4, № 1. С. 47–53.
3. **Баринов В. А., Бутакова Н. Н.** Нелинейные волны на свободной поверхности дисперсной смеси // Материалы Всероссийской конф. “Теория и приложения задач со свободными границами”, Бийск, 2–6 июля 2002 г. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2002. С. 10–12.
4. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1.
5. **Botsh В.** Hydraulische Kennwerte für Nachklärbecken: Definitionen und Vergleich mit Angaben des Arbeitsblattes ATV-A B1 // Korrespond. Abwasser. 1998. Bd 45, N 7. S. 1289–1300.
6. **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
7. **Найфэ А. Х.** Методы возмущений. М.: Мир, 1976.

*Поступила в редакцию 24/XII 2002 г.,  
в окончательном варианте — 5/XI 2003 г.*

---