откуда следует, что если

$$\dot{z}_0 > |z_0| y_0^{-1}/3, \tag{3.11}$$

то существует y_1 такое, что $2\dot{z}(y_1) > y_1^{-3/2}$. Таким образом, доказана неустойчивость решения $z_2 = y^{-1/2}$ уравнения (1.18).

Для доказательства того, что $z_2 = y^{-1/2}$ является единственным решением (1.18), удовлетворяющим (3.6) в случае $c_1 = c_2 = 0$, достаточно показать теперь, что для любого решения (1.18) со свойствами (3.6), (3.7), отличного от $z = y^{-1/2}$, найдется $y_0 > y_2$ (0,04) такое, что при $y = y_0$ для одной из функций z, $\bar{z} = (yz_2)^{-1} - y^{-1/2}$ выполнены неравенства (3.9), (3.11). Очевидно, что $\bar{z} = z_3 - y^{-1/2}$ удовлетворяет тому же уравнению, что и z, если $c_1 = c_2 = 0$, и для $\bar{z}$ верны все утверждения, доказанные выше для z.

Для любой непрерывной функции $z_2(y)$ верно одно из следующих трех утверждений:

1) для любого y_1 найдется $y_0 > y_1$ такое, что $z_2(y_0) = y_0^{-1/2}$;
2) существует y_1 такое, что $z_2 < y^{-1/2}$ при всех $y > y_1$;
3) существует y_1 такое, что $z_2 > y^{-1/2}$ при всех $y > y_1$.

В случае 1 условие (3.11) выполнено, если $\dot{z}(y_0) > 0$, так как $z(y_0) = 0$, а $|\dot{z}(y_0)| > 0$, поскольку в противном случае решение совпадало бы с $z_2 = y^{-1/2}$. Если $\dot{z}(y_0) < 0$, то неравенства (3.9), (3.11) выполнены для $\bar{z}$.

Рассмотрим теперь случай 2. Предположим, что для всех $y > y_1 > y_2$ (0,04) выполнено

$$\dot{z} \leqslant zy^{-1}/3, \tag{3.12}$$

тогда, интегрируя (3.12) и учитывая, что $z < 0$, получаем

$$z(y) \leqslant z(y_1) y_1^{1/3} y^{-1/3},$$

что противоречит положительности величины $z_2 = z + y^{-1/2}$ при достаточно больших y. Таким образом, показано, что существует $y_0 > y_2$ (0,04) такое, что

$$\dot{z}(y_0) > z(y_0) y_0^{-1}/3,$$

откуда следует (3.11) и первое из неравенств (3.9). Второе неравенство (3.9) вытекает из предположения $z_2 < 0$.

Случай 3 сводится к 2, если вместо z_2 рассмотреть z_3.

Автор выражает благодарность В. В. Пухначеву за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Чандрасекхар С.** Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973.
2. **Овсянников Л. В.** Об одном классе неустановившихся движений несжимаемой жидкости.— В кн.: Труды пятой сессии Ученого Совета по народнохозяйственному использованию взрыва. Фрунзе: ИЛИМ, 1965.
3. **Налимов В. И., Пухначев В. В.** Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей. Новосибирск: НГУ, 1975.
4. **Лаврентьева О. М.** О движении жидкого эллипсоида.— ДАН СССР, 1980, т. 253, № 4.

Поступила 10/III 1983 г.

УДК 539.374

ОДНО ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

С. И. СЕНАШОВ

(Красноярск)

Пусть $r\theta z$ — цилиндрическая система координат, σ_r, σ_θ, σ_z, $\tau_{r\theta}$, τ_{rz}, $\tau_{\theta z}$ — компоненты тензора напряжений, u, v, w — компоненты вектора скорости, k — предел текучести при чистом сдвиге.

Уравнения идеальной пластичности с условием текучести Мизеса имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}=0,$$

$$\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}=0,$$

$$(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+(\sigma_\theta-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_r)^2+6\left(\tau_{r\theta}^2+\tau_{rz}^2+\tau_{\theta z}^2\right)=6k^2,$$

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial r}=2\sigma_r-\sigma_\theta-\sigma_z,\quad \lambda\left(\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)=2\sigma_\theta-\sigma_z-\sigma_r,$$

$$\lambda\frac{\partial w}{\partial z}=2\sigma_z-\sigma_r-\sigma_\theta,\quad \lambda\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)=2\tau_{\theta z},$$

$$\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right)=2\tau_{rz},\quad \lambda\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=2\tau_{r\theta},$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru)+\frac{\partial v}{\partial\theta}+r\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

$$\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_z=3p.$$

Предположим, что

(2) $$\tau_{rz}=\tau_{r\theta}=0.$$

Ищем решение уравнений (1) в виде

(3) $$u=u^*(r)\operatorname{sh}\xi,\ v=v^*(r)\operatorname{ch}\xi,\ w=w^*(r)\operatorname{ch}\xi,\ p=p(r),\ \xi=z+\beta\theta,$$

где u^*, v^*, w^* — функции только r; β — произвольная постоянная. Тогда из условия несжимаемости и уравнений (2) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций u^*, v^*, w^*:

(4) $$u^*+\frac{dw^*}{dr}=0,\quad r\frac{d}{dr}\left(\frac{v^*}{r}\right)+\frac{\beta}{r}u^*=0,\quad \frac{d}{dr}(ru^*)+\beta v^*+rw^*=0,$$

а для определения давления p остается уравнение

(5) $$d\sigma_r/dr+(\sigma_r-\sigma_\theta)/r=0.$$

Система уравнений (4) сводится к уравнению Бесселя

$$r^2u^{*\prime\prime}+ru^{*\prime}-(r^2+\beta^2+1)u^*=0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

(6) $$u^*=C_1I_\nu(r)+C_2K_\nu(r),\ \nu=\sqrt{\beta^2+1},$$

где I_ν — функция Бесселя мнимого аргумента; K_ν — функция Макдональда; C_1, C_2 — произвольные постоянные. Если положить в (6) $C_2=0$, то поле скоростей имеет вид

(7) $$u=C_1I_\nu(r)\operatorname{sh}\xi,$$

$$v=-\left[rC_1\beta\int I_\nu(r)\frac{dr}{r^2}\right]\operatorname{ch}\xi,\quad w=-C_1\operatorname{ch}\xi\int I_\nu(r)\,dr.$$

При этом компоненты тензора напряжений равны

(8) $$\sigma_r=C+\int\frac{F(\varphi-1)}{r}dr,\quad \tau_{\theta z}=\psi F,$$

$$\sigma_\theta=\sigma_r+(\varphi-1)F,\ \sigma_z=\sigma_r-(2+\varphi)F,\ F=\sqrt{2}k(1+\varphi^2+(1+\varphi)^2+$$
$$+(1/2)\psi^2)^{-1/2},$$
$$\varphi=(u^*+\beta v^*)/ru^{*\prime},\ \psi=(\beta w^*+rv^*)/ru^{*\prime}.$$

Решение (7), (8) можно использовать для описания пластического течения цилиндра ($0<r\leqslant R$, $-l\leqslant z\leqslant l$), нагруженного по торцам напряжением, распределенным по закону

$$\sigma_z=-(2+\varphi)F+\int_0^r\frac{F(\varphi-1)}{r}dr,$$

и крутящим моментом

$$M = 2\pi \int_0^R \tau_{\theta z} r^2 dr.$$

Предполагая боковую поверхность свободной от напряжений, определим постоянную C из условия $\sigma_r(R) = 0$.

Если в формуле (6) $C_2 \neq 0$, то построенное решение можно использовать для описания пластического течения трубы, находящейся под действием растягивающих усилий, крутящего момента и внутреннего давления.

Если в формулах (8) положить $\beta = 0$, то компоненты тензора напряжений совпадут с найденными в [1] для случая осесимметричной деформации.

Найденное решение можно использовать и для описания течения пластически неоднородной среды, для этого достаточно положить в фомулах (1), (8) $k = K(r)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аннин Б. Д.** Современные модели пластических тел. Новосибирск: НГУ, 1975.

Поступила 22/XI 1983 г.

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

В № 1 за 1984 г. замечены следующие опечатки:

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
158	3-я снизу	$\frac{\partial v_r}{\partial r} \mid \frac{v_r}{r} \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0.$	$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0.$
162	6-я снизу	$d/dt = \dot{R}_1 dR_1,$	$dt = \dot{R}_1^{-1} dR_1,$

Зав. редакцией *Н. С. Калашникова*
Художественный редактор *М. Г. Рудакова*
Технический редактор *А. В. Сурганова*
Корректоры *Г. Д. Смоляк, Н. М. Горбачева*

Сдано в набор 09.04.84. Подписано к печати 29.06.84. МН-02041. Формат 70 × 108¹/₁₆. Высокая печать. Усл. печ. л. 14. Усл. кр.-отт. 14,5. Уч.-изд. л. 16. Тираж 1663 экз. Заказ 139.

Издательство «Наука», Сибирское отделение, 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.
4-я типография издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.