

УДК 532.59

О ВЛИЯНИИ ФОРМЫ ГЕНЕРАТОРА НА СТРУКТУРУ ПУЧКОВ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ОДНОРОДНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Н. А. Сердцева, Н. В. Гаврилов, Е. В. Ерманюк

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mails: gavrilov@hydro.nsc.ru, ermanyuk@hydro.nsc.ru

Экспериментально исследована задача о генерации внутренних волн колебаниями цилиндров с поперечным сечением различной формы. Показано, что на больших расстояниях от генератора профиль амплитуды возмущений градиента плотности с удовлетворительной точностью может быть рассчитан с использованием теории для эквивалентного кругового цилиндра. Установлено, что на малых расстояниях от генератора его форма оказывает существенное влияние на профиль генерируемых волн.

Ключевые слова: стратифицированная жидкость, внутренние волны, вязкое затухание, цифровой шпирен-метод.

Введение. Структура пучков внутренних волн, генерируемых колебаниями круговых и эллиптических цилиндров в однородно стратифицированной жидкости, исследована достаточно подробно теоретически и экспериментально [1–6]. Вблизи генератора внутренних волн распределение амплитуд смещений частиц жидкости в поперечном сечении волнового пучка имеет бимодальную форму [2, 4], характеризующуюся наличием двух локальных максимумов. Максимумы находятся в окрестностях характеристических линий, касательных к контуру тела, при заданном отношении частоты колебаний и частоты плавуемости. На больших расстояниях от генератора волн наблюдается одномодальное распределение с максимумом в центре волнового пучка. При типичных условиях эксперимента переход от бимодального распределения к одномодальному наблюдается на расстоянии, равном нескольким характерным размерам генератора волн. С увеличением расстояния одномодальное распределение приближается к распределению, соответствующему автомодельному решению [7]. Таким образом, с увеличением расстояния вдоль пучка имеет место потеря памяти формы генератора волн. На больших расстояниях существенное влияние на распределение возмущений оказывают вязкость жидкости, характерный размер генератора и мощность излучения. Эффект потери памяти формы тела наблюдается в следах за буксируемыми телами. В частности, в случае ламинарного плоского течения однородной жидкости [8] быстро достигается автомодельное распределение дефекта скорости поперек следа за цилиндром произвольной геометрии, параметрически зависящее лишь от гидродинамического сопротивления, вязкости жидкости и скорости ее движения. В настоящей работе представлены результаты экспериментального исследования плоской задачи о рождении волновых движений в пучках внутренних волн при различной форме генерато-

ров. Показано, что при выполнении определенных соотношений генератор произвольной формы может быть заменен эквивалентным круговым цилиндром.

1. Основные соотношения. Рассмотрим плоскую задачу о генерации внутренних волн установившимися гармоническими колебаниями цилиндра с частотой ω и амплитудой A_0 в безграничной однородно стратифицированной жидкости с частотой плавуности $N = [(-g/\rho) d\rho/dy]^{1/2}$ (g — ускорение свободного падения, $\rho(y)$ — распределение плотности в декартовой системе координат xOy , ось y направлена вверх). Известно, что в такой системе угол наклона волновых пучков по отношению к вертикали определяется дисперсионным соотношением $\theta = \arccos \Omega$, где $\Omega = \omega/N$ [1]. Схема задачи показана на рис. 1. В линейной постановке модель идеальной жидкости предсказывает существование сингулярностей вдоль характеристических линий, касательных к поверхности цилиндра. Расстояние между характеристическими линиями равно $2c$, причем в общем случае $c = c(\Omega)$. Мощность, затрачиваемая на излучение внутренних волн, определяется по формуле $P_0 = C_{p0} A_0^2 \rho S_0 N^3$, где S_0 — площадь поперечного сечения цилиндра; C_{p0} — коэффициент мощности излучения [9].

Заменяем цилиндр произвольной формы эквивалентным круговым цилиндром, имеющим радиус c и мощность излучения $P_e = C_{pe} A_e^2 \rho S_e N^3$. Заметим, что коэффициенты C_p связаны с коэффициентами демпфирования C_λ соотношением $C_p = C_\lambda \Omega^2 / 2$ [9]. Приравняв P_0 к P_e , получаем выражение для амплитуды колебаний эквивалентного цилиндра

$$A_e = A_0 \sqrt{(C_{\lambda 0} S_0) / (C_{\lambda e} S_e)}. \tag{1}$$

Отношение $C_{\lambda 0} / C_{\lambda e}$ равно соотношению между мнимыми частями коэффициентов присоединенной массы для исходного и эквивалентного цилиндров [10, 11].

Учет вязкости позволяет избавиться от сингулярностей вдоль характеристических линий. Асимптотическое решение для волн, генерируемых эллиптическим цилиндром, получено в [4]. Для пучка волн, излучаемого в первый квадрант декартовой системы координат в случае вертикальных колебаний эллиптического цилиндра с горизонтальной полуосью a и вертикальной полуосью b , безразмерное возмущение градиента плотности, выраженное

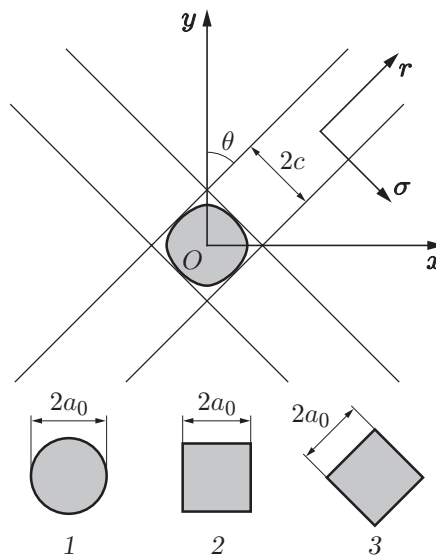


Рис. 1. Схема пучков внутренних волн в однородно стратифицированной жидкости: 1–3 — формы поперечных сечений генераторов внутренних волн: 1 — круг радиусом $a_0 = 1$ см; 2, 3 — квадрат с длиной стороны $2a_0$ (2 — $2a_0 = 2$ см, 3 — $2a_0 = 4$ см)

через возмущение частоты плавучести в квадрате, имеет вид [6]

$$\zeta = \frac{\Delta N^2}{N^2} = \cos \theta \sin \theta \left(\frac{\alpha}{c\omega} \right) \int_0^{\infty} k J_1(k) \exp \left(-k^3 \lambda \frac{r}{c} - ik \frac{\sigma}{c} \right) dk, \quad (2)$$

где $\alpha = (1/2)A_0 e^{i\varphi}(a^2/c^2)[(b/c) \sin \theta - i \cos \theta] \cos \theta$; $c^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta$; оси координат \mathbf{r} и $\boldsymbol{\sigma}$ направлены вдоль пучка и перпендикулярно ему (см. рис. 1). Амплитуду колебаний величины ζ обозначим через ζ_A . Убывание ζ_A вдоль оси пучка (при $\sigma = 0$) определяется выражением

$$\zeta_A(r, 0) = \cos \theta \sin \theta \left(\frac{aA_0}{2c^2} \right) \int_0^{\infty} k J_1(k) \exp \left(-\frac{k^3 \lambda r}{c} \right) dk. \quad (3)$$

В случае эллиптического цилиндра, совершающего вертикальные колебания, $C_{\lambda 0} = (a/b)\sqrt{1-\Omega^2}$, $S_0 = \pi ab$ [3, 4, 10], в случае эквивалентного кругового цилиндра $C_{\lambda e} = \sqrt{1-\Omega^2}$, $S_e = \pi c^2$. При этом соотношение (1) принимает вид $A_e = A_0 a/c$. Численные расчеты, выполненные с учетом (1), показывают, что при фиксированном расстоянии от центра цилиндра между мгновенными профилями $\zeta(\sigma, t)$ для эллиптического и эквивалентного кругового цилиндра имеется небольшой фазовый сдвиг, а профили амплитуд

$$\zeta_A(\sigma) = \left(\frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [\zeta(\sigma, t)]^2 dt \right)^{1/2}$$

совпадают. Как следствие при замене эллиптического цилиндра на эквивалентный круговой цилиндр в соответствии с (1) формула (3) не меняется. Ниже экспериментально исследуется применимость данного подхода для оценки профилей возмущений $\zeta_A(\sigma)$ в пучках волн, генерируемых цилиндрами с квадратным поперечным сечением.

2. Методика эксперимента. Опыты проводились в гидродинамическом лотке с размерами $160 \times 20 \times 50$ см, заполненном линейно стратифицированной жидкостью до высоты $H = 44$ см. Линейная стратификация создавалась путем послойной заливки раствора сахара в воде с заданным перепадом плотности между слоями. В течение 2 сут за счет диффузии устанавливался линейный профиль плотности. Опыты проводились при $N = 1 \text{ с}^{-1}$. Кинематическая вязкость жидкости составляла $\nu = 0,013 \text{ см}^2/\text{с}$. В качестве генераторов волн использовались цилиндры с поперечными сечениями в виде круга радиусом $a_0 = 1$ см или квадрата с длиной стороны $2a_0 = 2; 4$ см (см. рис. 1). Для измерений параметров внутренних волн использовалась версия [12] цифрового шпирен-метода [5]. Метод основан на компьютерном анализе видимых смещений элементов контрастной черно-белой картины (случайного распределения черных точек на белом фоне), наблюдаемой сквозь толщу стратифицированной жидкости. Вертикальные смещения элементов картины прямо пропорциональны возмущениям вертикального градиента плотности [5], которые в свою очередь пропорциональны возмущениям частоты плавучести в квадрате ΔN^2 . В качестве характеристики возмущений в данной работе используется безразмерная величина $\zeta = \Delta N^2/N^2$. Амплитуда возмущений ζ_A оценивалась экспериментально по данным 12 измерений ζ за период колебаний [6, 12]. Амплитуда колебаний цилиндров в опытах составила $A_0 = 3$ мм. Измерения проводились в стационарном режиме излучения внутренних волн через 15 периодов после начала колебаний. Оценка времени существования переходных процессов выполнена в работах [12–14].

3. Результаты опытов. Проведена серия тестовых экспериментов по исследованию полей внутренних волн, генерируемых горизонтальными колебаниями кругового цилиндра. Соответствующее распределение $\zeta_A(\sigma)$ поперек волнового пучка при фиксированном

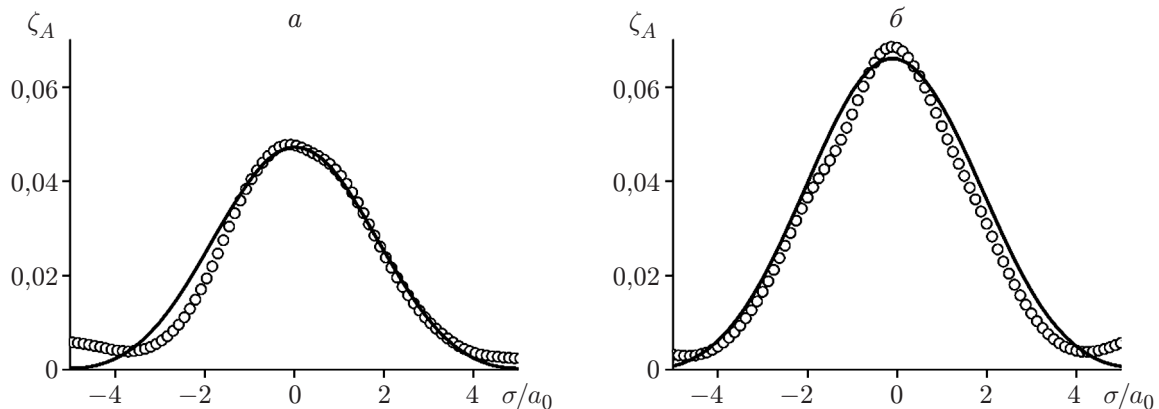


Рис. 2. Распределение безразмерной амплитуды возмущений градиента плотности поперек волнового пучка в случае генератора 1 (см. рис. 1) при $A_0/a_0 = 0,3$ и различных значениях числа Рейнольдса и частоты колебаний:
a — $Re = 40$, $\Omega = 0,52$, *б* — $Re = 64$, $\Omega = 0,84$; линии — результаты расчета, точки — экспериментальные данные

$r = r_0$ может быть рассчитано с помощью формулы (2) при $a = b = a_0$. В случае горизонтальных и вертикальных колебаний кругового цилиндра при фиксированных значениях амплитуды и частоты теоретические распределения $\zeta_A(\sigma)$ совпадают [4]. Одномодальное распределение $\zeta_A(\sigma)$, полученное теоретически и экспериментально, приведено на рис. 2 ($Re = a_0^2\omega/\nu$). Видно, что теоретические оценки и экспериментальные данные хорошо согласуются между собой и с результатами [5].

На рис. 3, 4 представлены распределения $\zeta_A(\sigma)$ одномодального типа для цилиндров с квадратным поперечным сечением (генераторов 2, 3 на рис. 1). Видно, что во всех рассмотренных случаях расчетные значения являются хорошей приближенной оценкой распределения амплитуд возмущений $\zeta_A(\sigma)$ поперек пучка. Для определения отношения $C_{\lambda 0}(\Omega)/C_{\lambda e}(\Omega)$ в случае генераторов волн 2, 3 (см. рис. 1) использовались результаты работы [11].

Приближенное решение, построенное в работе [4] для случая вязкой однородно стратифицированной жидкости, описывает пограничные слои, нарастающие вдоль характеристических линий (см. рис. 1) по мере удаления от источника возмущений и модифицирующие невязкий “скелет” решения [3]. При малых значениях r толщина пограничных слоев мала, поэтому особенности геометрии тела оказывают существенное влияние на профили возмущений градиента плотности. Соответственно можно ожидать, что с увеличением числа Рейнольдса Re и уменьшением расстояния вдоль пучка r различие между экспериментально полученными профилями $\zeta_A(\sigma)$ для произвольного цилиндра и результатами расчетов с использованием формул (1), (2) для эквивалентного кругового цилиндра будет существенным (рис. 5). На рис. 5 видно, что в этом случае результаты расчетов с использованием теории для эквивалентного кругового цилиндра являются лишь грубой оценкой амплитуды возмущений градиента плотности и ширины пучка. Наблюдаемые в окрестности генератора эффекты (в случае кругового цилиндра [15]), для описания которых требуется суперпозиция всех четырех пучков внутренних волн, в настоящей работе не рассматривались.

Закключение. В работе исследована возможность получения приближенного описания структуры пучков внутренних волн, генерируемых гармоническими колебаниями цилиндров с произвольным поперечным сечением в вязкой однородно стратифицированной жидкости, с помощью теории для эквивалентного кругового цилиндра. В качестве усло-

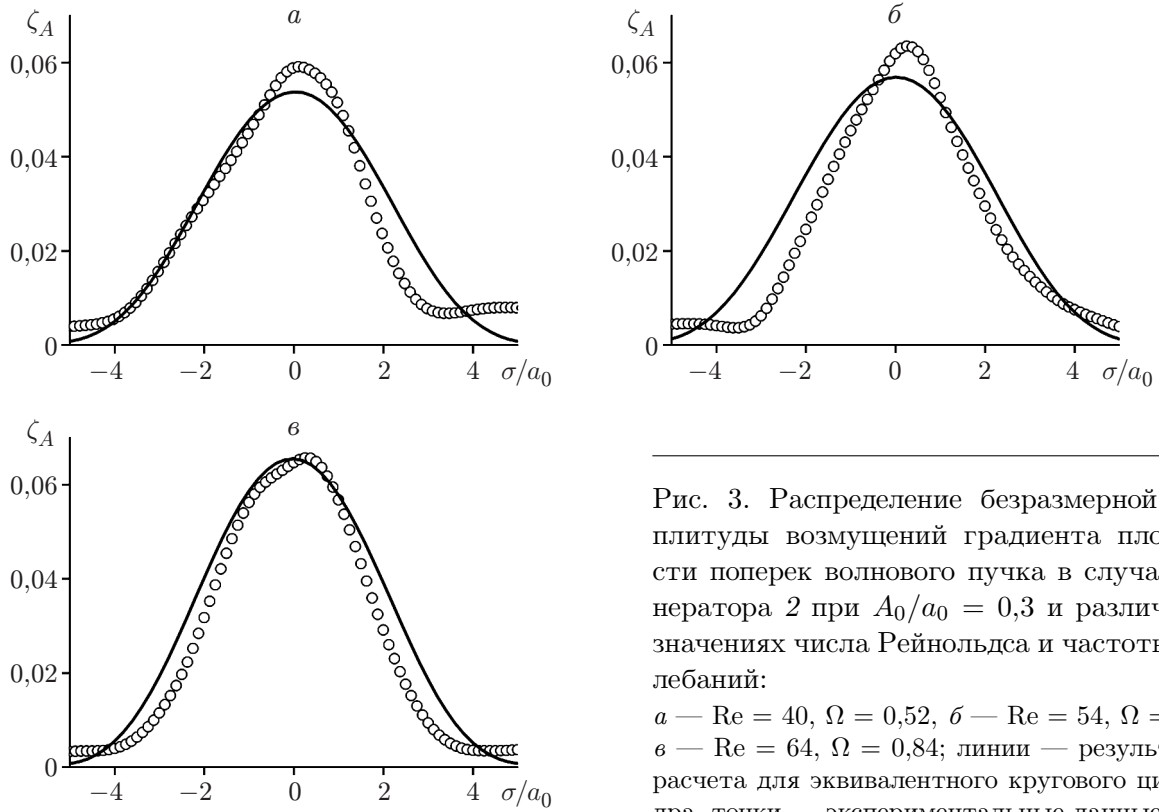


Рис. 3. Распределение безразмерной амплитуды возмущений градиента плотности поперек волнового пучка в случае генератора 2 при $A_0/a_0 = 0,3$ и различных значениях числа Рейнольдса и частоты колебаний:

a — $Re = 40$, $\Omega = 0,52$, $б$ — $Re = 54$, $\Omega = 0,7$, $в$ — $Re = 64$, $\Omega = 0,84$; линии — результаты расчета для эквивалентного кругового цилиндра, точки — экспериментальные данные

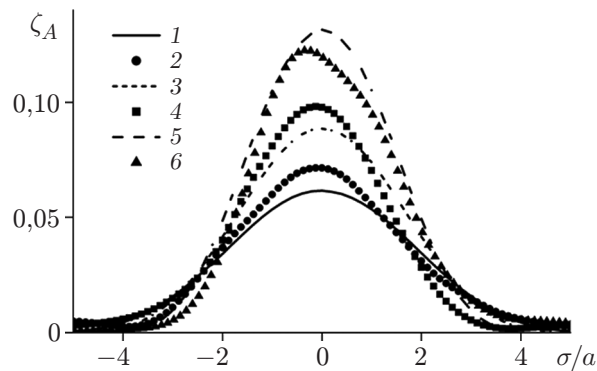


Рис. 4. Распределение безразмерной амплитуды возмущений градиента плотности поперек волнового пучка в случае генератора 3 при $A_0/a_0 = 0,3$, $Re = 54$, $\Omega = 0,7$ и различных значениях r :

1, 3, 5 — результаты расчета, 2, 4, 6 — экспериментальные данные; 1, 2 — $r = 20a_0$, 3, 4 — $r = 12a_0$, 5, 6 — $r = 6a_0$

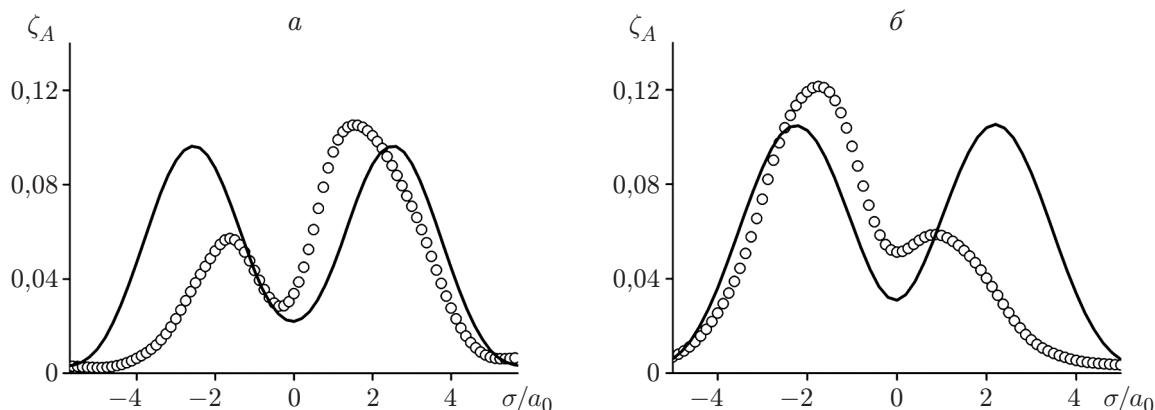


Рис. 5. Распределение безразмерной амплитуды возмущений градиента плотности поперек волнового пучка в случае генераторов 2 (а) и 3 (б) при $\Omega = 0,84$, $r/a = 12$, $A_0/a_0 = 0,15$, $Re = 258$:

линии — результаты расчета, точки — экспериментальные данные

вия эквивалентности принято равенство характерных размеров цилиндров и мощностей излучения внутренних волн. Показано, что с использованием данного условия можно получить достаточно точную оценку распределения амплитуд возмущений градиента плотности поперек пучка внутренних волн на достаточно большом расстоянии от генератора, когда распределение возмущений является одномодальным, а пучок можно считать изолированным.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Mowbray D. E., Rarity B. S. H.** A theoretical and experimental investigation of the phase configuration of internal waves of small amplitude in a density stratified fluid // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 28. P. 1–16.
2. **Макаров С. А., Неклюдов В. И., Чашечкин Ю. Д.** Пространственная структура пучков двумерных монохроматических внутренних волн в экспоненциально стратифицированной жидкости // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1990. Т. 26, № 7. С. 744–754.
3. **Hurley D. G.** The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders. Part 1. Inviscid solution // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 351. P. 105–118.
4. **Hurley D. G., Keady G.** The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders. Part 2. Approximate viscous solution // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 351. P. 119–139.
5. **Sutherland B. R., Dalziel S. B., Hughes G. O., Linden P. F.** Visualization and measurement of internal waves by “synthetic schlieren”. Part 1. Vertically oscillating cylinder // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 390. P. 93–126.
6. **Sutherland B. R., Linden P. F.** Internal wave excitation by a vertically oscillating elliptical cylinder // *Phys. Fluids.* 2002. V. 14, N 2. P. 721–731.
7. **Thomas N. Y., Stevenson T. N.** A similarity solution for viscous internal waves // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 54. P. 495–506.
8. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
9. **Ermanyuk E. V., Gavrilov N. V.** Force on a body in a continuously stratified fluid. Part 1. Circular cylinder // *J. Fluid Mech.* 2002. V. 451. P. 421–443.
10. **Ermanyuk E. V.** The rule of affine similitude for the force coefficients of a body oscillating in a uniformly stratified fluid // *Exp. Fluids.* 2002. V. 32. P. 242–251.

11. **Ерманюк Е. В., Гаврилов Н. В.** О колебаниях цилиндров в линейно стратифицированной жидкости // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 4. С. 15–26.
12. **Ermanyuk E. V., Gavrilov N. V.** On internal waves generated by large-amplitude circular and rectilinear oscillations of a circular cylinder in a uniformly stratified fluid // J. Fluid Mech. 2008. V. 613. P. 329–356.
13. **Voisin B.** Limit states of internal wave beams // J. Fluid Mech. 2003. V. 496. P. 243–293.
14. **Ерманюк Е. В., Гаврилов Н. В.** О длительности переходных процессов при формировании пучков внутренних волн // Докл. АН. 2005. Т. 404, № 6. С. 771–774.
15. **Zhang H. P., King B., Swinney H. L.** Experimental study of internal gravity waves generated by supercritical topography // Phys. Fluids. 2007. V. 19. 096602.

Поступила в редакцию 25/III 2010 г.
