

УДК 539.3

МОДИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЫ ГОДУНОВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИМПУЛЬСНОГО НАГРУЖЕНИЯ МЯГКИХ ГРУНТОВ

В. Г. Баженов, В. Л. Котов

Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета, 603950 Нижний Новгород

Приводится модификация этапа “предиктор” метода распада разрывов Годунова для задач нелинейного деформирования мягких грунтовых сред. Поведение грунтов описывается моделью Григоряна с учетом нелинейных диаграмм объемного деформирования, сдвиговой прочности и пластичности. Формулируются допущения, при которых вспомогательная задача о распаде разрыва в грунтах сводится к известной задаче, имеющей единственное решение. Приведены примеры численных расчетов.

Введение. В настоящее время для численного моделирования процессов нестационарного деформирования грунтовых сред применяется метод распада разрывов [1] для решения задач газовой динамики. К несомненным достоинствам данного метода можно отнести совместное использование подходов Лагранжа и Эйлера к описанию движения сплошной среды, что существенно расширяет класс решаемых задач. В то же время имеется мало работ по данной тематике для грунтов с учетом их сдвиговой прочности, что обусловлено, в первую очередь, трудностью решения задачи о распаде произвольного разрыва. В [1–3] для сред с более изученными свойствами, в частности для жидкостей и газов, подробно изложено решение задачи о распаде разрыва и построено обобщенное решение задачи для системы нелинейных уравнений. Там же показано, что в общем случае задача о распаде разрыва имеет неединственное решение. В работе [4] построены разрывные решения одномерных уравнений динамики упругопластических сред в переменных Лагранжа. В [4, 5] исследуется схема распада разрывов для одномерных вязкоупругих и упругопластических задач. В работе [6] метод конечных объемов Годунова развит применительно к решению двумерных задач упругопластического деформирования металлов с использованием линеаризованного варианта расчета задачи о распаде произвольного разрыва. В [7] применяется комбинированный подход к решению задач нестационарного деформирования сжимаемых, в том числе грунтовых сред, учитывающий нелинейность диаграммы объемного сжатия вещества при больших напряжениях. В [6] аналогичный подход применяется при решении задач при малых напряжениях. В работах [6, 7] в качестве определяющих используются соотношения типа соотношений пластического течения Прандтля — Рейсса с условием текучести Мизеса, а также законы сохранения массы и импульса (модель Григоряна).

При изучении разрывных решений наиболее известным методом обобщения определяющих уравнений моделей деформируемых сред является замена исходных дифференциальных уравнений эквивалентной системой интегральных законов сохранения. При такой

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 01-01-00556, 02-01-06420) и в рамках программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (код проекта 00-15-99029) и программы Министерства образования Российской Федерации по фундаментальным исследованиям в области естествознания (грант № Е00-12.0-99).

замене система уравнений приводится к дивергентной форме и интегрируется по произвольной пространственной области. Как показано в [8], модель Прандтля — Рейсса является неприводимой к дивергентному виду, следовательно, ее невозможно преобразовать в полную систему интегральных законов сохранения. Известно также обобщение уравнений теории течения с динамическим упрочнением, основанное на имеющем форму закона сохранения кинематическом уравнении, связывающем скорость градиента полного перемещения с градиентами скоростей частиц [9, 10]. В работах [11, 12] на основе гиперболических вариационных неравенств исследуются вопросы построения обобщенных решений, содержащих разрывы скоростей, напряжений и параметров упрочнения. Доказаны существование и единственность обобщенного решения, приведена классификация допустимых разрывных решений типа упругопластических волн.

Несмотря на достигнутые успехи, решение задачи в случае нелинейной и необратимой диаграммы объемного сжатия среды и возможной сдвиговой прочности и пластичности, как это предполагается в модели Григоряна, представляет собой сложную и до сих пор не решенную математическую проблему. При численной реализации основных соотношений механики сплошной среды и модели Григоряна в рамках схемы Годунова первого порядка точности представляется допустимым пренебрежение некоторыми из указанных свойств в силу большой аппроксимационной вязкости.

В настоящей работе приводятся основные соотношения, позволяющие строить решение задачи о распаде произвольного разрыва в мягких грунтовых или пористых средах с учетом нелинейности диаграммы объемного сжатия и сдвиговой прочности. Сформулированы предположения, позволяющие свести поставленную задачу к известной, имеющей единственное автомодельное решение. Исследуются обоснованность введенных допущений и применимость линеаризованного метода расчета распада разрыва в задачах взрывного нагружения грунтовых сред в более широком, чем указано в [7], диапазоне давлений.

1. Основные уравнения. Постановка задачи динамического деформирования грунтовой среды дается в переменных Эйлера в декартовой или цилиндрической системе координат xu (y — ось симметрии). Основные уравнения следуют из соотношений механики сплошной среды, выражающих законы сохранения массы и импульса:

$$\begin{aligned} \rho_{,t} + (\rho u_x)_{,x} + (\rho u_y)_{,y} &= -\nu(\rho u_x)/x, \\ (\rho u_x)_{,t} + (\rho u_x^2 - \sigma_{xx})_{,x} + (\rho u_x u_y - \sigma_{xy})_{,y} &= -\nu(\rho u_x^2 - \sigma_{xx} - \sigma_{\theta\theta})/x, \\ (\rho u_y)_{,t} + (\rho u_x u_y - \sigma_{xy})_{,x} + (\rho u_y^2 - \sigma_{yy})_{,y} &= -\nu(\rho u_x u_y - \sigma_{xy})/x. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ρ — плотность; u_x, u_y — компоненты вектора скорости в направлении осей x и y соответственно; σ_{ij} ($i, j = x, y, \theta$) — компоненты тензора напряжений Коши; символ после запятой обозначает частную производную по соответствующей переменной; в плоской задаче параметр $\nu = 0$, в осесимметричной $\nu = 1$. Для описания сдвиговых свойств мягкого грунта используется модель Григоряна [13]

$$\frac{DS_{ij}}{dt} + \lambda S_{ij} = 2\mu e_{ij} \quad (i, j = 1, 2), \quad (1.2)$$

где e_{ij} — компоненты девиатора тензора скоростей деформации; S_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений; DS_{ij}/dt — производная Яуманна по времени; μ — модуль сдвига. Если реализуется условие пластичности, то $\lambda > 0$, при чисто упругом деформировании $\lambda = 0$. Система замыкается баротропным уравнением, связывающим давление p и плотность, в виде $p = f(\rho)$. Таким образом, система уравнений (1.1), (1.2) является замкнутой относительно вектора неизвестных $\{\rho, u_x, u_y, s_{xx}, s_{xy}, s_{yy}\}$.

2. Численное решение. Метод Годунова численного решения системы уравнений типа (1.1), (1.2) и его модификации подробно описаны в [6, 7]. В данной работе проведено

исследование этапа “предиктор” известного численного метода на основе общей схемы, приведенной в [3]. Основными элементами этапа “предиктор” являются решение задачи о распаде разрыва на каждом ребре ячейки разностной сетки и определение потоков искомых величин через соответствующие грани. Система квазилинейных уравнений, для которой в данной работе дается постановка задачи о распаде разрыва, является плоским ($\nu = 0$) одномерным ($\partial/\partial z \equiv 0$) упругим ($\lambda = 0$) аналогом полной двумерной системы уравнений (1.1), (1.2) в системе координат, связанной с ребром ячейки разностной сетки. Решение строится при следующих допущениях:

- 1) влияние волн сдвига на параметры продольных волн мало;
- 2) разрывные решения (ударные волны) выделяются только для плотности и нормальной скорости.

Допущение 1 означает замену в соотношениях (1.2) производной Яуманна пространственной полной производной. Такая замена допустима при малых поворотах ребер ячеек разностной сетки на временном шаге $\Delta t/2$ с учетом большой аппроксимационной вязкости схемы первого порядка. При этом число уравнений уменьшается на одно, так как последнее уравнение в (1.2) интегрируется, в результате чего получается известное соотношение для одноосного деформированного состояния $s_{zz} = -s_{rr}/2$. Искомая система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + u\rho_{,r} + \rho u_{,r} = 0, \quad \dot{u} + uu_{,r} - \sigma_{,r}/\rho = 0, \quad \dot{\sigma} + u\sigma_{,r} - \rho a^2 u_{,r} = 0, \\ \dot{v} + uv_{,r} - \tau_{,r}/\rho = 0, \quad \dot{\tau} + u\tau_{,r} - \rho b^2 v_{,r} = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Обозначим через \mathbf{U} вектор параметров $\{\rho, u, \sigma, v, \tau\}$, u, v — компоненты вектора скорости, σ, τ — компоненты тензора напряжений в системе координат, связанной с ребром сетки $r = r_0$. Линией разрыва r_0 в данном случае является граница между “левой” ячейкой разностной сетки с параметрами $\mathbf{U}_{(1)}$ и “правой” ячейкой с параметрами $\mathbf{U}_{(2)}$:

$$r < r_0: \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}_{(1)}, \quad r > r_0: \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}_{(2)}; \quad (2.2)$$

$$a^2 = c^2 + \frac{4\mu}{3\rho}, \quad b^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad c^2 = \frac{dp}{d\rho}. \quad (2.3)$$

Обобщенное решение системы уравнений (2.1) может иметь конечное число кусочно-гладких линий разрыва (не более пяти по числу характеристик), вне которых оно является классическим решением задачи Коши:

$$\xi_1 = u - a, \quad \xi_2 = u - b, \quad \xi_3 = u, \quad \xi_4 = u + b, \quad \xi_5 = u + a. \quad (2.4)$$

Характеристики (2.4) на плоскости (r, t) являются прямыми линиями и разбивают характеристическую плоскость на шесть зон. Номера зон, в которых ищется решение, соответствуют номерам характеристик и обозначаются римскими цифрами. Слева от первой характеристики и справа от пятой характеристики находятся зоны, в которых переменные совпадают с начальными данными (2.2). Каждой характеристике $\xi = \xi_k(\mathbf{U})$ с номером k согласно теории обобщенных решений систем квазилинейных уравнений [3] может соответствовать центрированная волна разрежения (ВР) k -го типа, ударная волна (УВ) k -го типа либо контактный разрыв (КР).

Автомодельное решение $\mathbf{U}(y)$ системы квазилинейных уравнений (2.1) в области его гладкости сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{U}}{dy} = \frac{\mathbf{r}^k(\mathbf{U})}{\mathbf{r}^k(\mathbf{U}) \operatorname{grad} \xi_k(\mathbf{U})}, \quad (2.5)$$

где $y = r/t$ — автомодельная переменная; $\mathbf{r}^k(\mathbf{U})$ — правый собственный вектор матрицы системы уравнений (2.1); оператор grad определен в [3]. Неизвестные величины в зоне I обозначим прописными буквами с индексом I: $R^I, U^I, V^I, \Sigma^I, T^I$. Используя первое

уравнение в (2.5), исключим выражение $\mathbf{r}^I(\mathbf{U}) \operatorname{grad} \xi_1(\mathbf{U})$ из остальных дифференциальных уравнений и получим систему пяти уравнений, в которых независимой переменной является плотность ρ :

$$\frac{dU}{d\rho} = -\frac{a(\rho)}{\rho} \quad \text{или} \quad U^I = u_1 - \int_{\rho_1}^{R^I} \frac{a_1(\zeta)}{\zeta} d\zeta.$$

Нормальное напряжение на разрыве Σ можно представить в виде $\Sigma = S - P$, где S , P — девиаторная компонента и давление:

$$\frac{d\Sigma}{d\rho} = -a^2(\rho) \quad \text{или} \quad \Sigma^I = \sigma_1 - \int_{\rho_1}^{R^I} a_1^2(\zeta) d\zeta. \quad (2.6)$$

Выражение (2.6) с использованием выражения (2.3) для скорости продольной волны можно проинтегрировать:

$$\begin{aligned} \Sigma^I &= \sigma_1 - \int_{\rho_1}^{R^I} a_1^2(\zeta) d\zeta = s_1 - p_1 - \int_{\rho_1}^{R^I} a_1^2(\zeta) d\zeta = s_1 - p_1 - \int_{\rho_1}^{R^I} c_1^2(\zeta) d\zeta - \int_{\rho_1}^{R^I} \frac{4}{3} \frac{\mu_1}{\zeta} d\zeta = \\ &= s_1 - p_1 - p(R^I) + p_1 - (4\mu_1/3) \ln(R^I/\rho_1) = S^I - P^I. \end{aligned}$$

Здесь

$$S^I = s_1 - (4\mu_1/3) \ln(R^I/\rho_1). \quad (2.7)$$

Полученное выражение для компоненты девиатора тензора напряжений содержится также в [14, 15]. Компоненты сдвиговых скорости и напряжения остаются равными начальным значениям в “левой” ячейке:

$$\frac{dV}{d\rho} = 0 \quad \text{или} \quad V^I = v_1, \quad \frac{dT}{d\rho} = 0 \quad \text{или} \quad T^I = \tau_1.$$

В случае распространения УВ для нахождения величин в зоне I следует воспользоваться соотношениями на разрыве, которые получаются из интегральных аналогов первых двух уравнений системы (2.1):

$$\oint \rho dr - \rho u dt = 0, \quad \oint \rho u dr - (\rho u^2 - \sigma) dt = 0. \quad (2.8)$$

Обозначив скорость перемещения поверхности разрыва (или УВ) в направлении нормали через $D = dr/dt$ и проинтегрировав уравнения (2.8) по некоторому контуру, охватывающему поверхность разрыва, аналогично [1–3] получим условия динамической совместности на разрывах

$$[\rho]D - [\rho u] = 0, \quad [\rho u]D - [\rho u^2 - \sigma] = 0. \quad (2.9)$$

Квадратные скобки обозначают разность соответствующих величин слева и справа от разрыва (по отношению к вектору нормали). Используя (2.9) для величин слева и справа от характеристики ξ_1 , получим следующее выражение:

$$U^I = u_1 - \sqrt{(\sigma_1 - \Sigma^I)/(1/\rho_1 - 1/R^I)}.$$

Связь давления P^I с плотностью R^I задается уравнением состояния. Изменение компоненты девиатора S^I происходит в соответствии с (2.7). Таким образом, через точку,

определяемую соотношением (2.2), проходят две гладкие кривые, представляющие собой решение уравнений (2.5), (2.9) в пространстве переменных $\mathbf{U} = \{R, U, \Sigma, V, T\}$ [3]. Одна кривая представляет собой семейство состояний, которые могут быть соединены с состоянием (2.2) посредством ВР k -го типа, другая — семейство состояний, которые могут быть связаны с состоянием (2.2) посредством УВ k -го типа. Эти две кривые в точке, определяемой соотношением (2.2), имеют касание второго порядка, т. е. в малой окрестности точки, определяемой соотношением (2.4), кривые ударного перехода близки к кривым, описывающим переходы по волнам разрежения [3]. Выбор части той или иной кривой в качестве решения определяется условием устойчивости [3], которое для ВР в зоне I задается неравенством $\xi_1(\mathbf{U}) > \xi_1(\mathbf{U}_{(1)})$. С учетом сказанного выше выражение для скорости U^I и напряжения Σ^I в зоне I запишется в виде

$$U^I = \begin{cases} u_1 - \int_{\rho_1}^{R^I} \frac{a_1(\zeta)}{\zeta} d\zeta & (\text{ВР}), \\ u_1 - \sqrt{(\sigma_1 - \Sigma^I)/(1/\rho_1 - 1/R^I)} & (\text{УВ}), \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\Sigma^I = s_1 - P^I(R^I) - (4\mu_1/3) \ln(R^I/\rho_1).$$

Формулы для нормальной скорости U^V и напряжения Σ^V в зоне V получаются аналогично.

В зонах II, IV характеристической плоскости определяются сдвиговые характеристики среды. Так как в используемой модели среды Григоряна предполагается отсутствие эффекта дилатансии (т. е. изменения плотности в сдвиговой волне), то неизвестные величины нельзя представить как функции плотности $\rho = \text{const} = R^I$. Поэтому связь касательных напряжения и скорости задается в виде

$$T^{\text{II}} - \tau_1 = \int_{v_1}^{V^{\text{II}}} \rho b_1 d\vartheta = R^I b_1 (V^{\text{II}} - v_1). \quad (2.11)$$

Влияние сдвигового течения в зонах II, IV на нормальные компоненты скорости и тензора напряжений оценивается как величина второго порядка малости по компонентам деформации [16], поэтому в первом приближении им можно пренебречь. Аналогичный вывод можно сделать, рассмотрев линеаризованные формулы [7] для U и Σ . Множитель при u_i и σ_i имеет порядок $1/a_i$, при v_i и τ_i — $1/a_i^2$ ($i = 1, 2$).

Условия на третьей характеристике (на КР)

$$U^{\text{II}} = U^{\text{IV}}, \quad \Sigma^{\text{II}} = \Sigma^{\text{IV}}, \quad T^{\text{II}} = T^{\text{IV}} = T, \quad V^{\text{II}} = V^{\text{IV}} = V \quad (2.12)$$

позволяют замкнуть выражения (2.10)–(2.12) и аналогичные им в других зонах. Рассмотрим конфигурацию в ячейке, когда в результате распада образуются ВР, распространяющаяся влево, и УВ, распространяющаяся вправо. Условие на КР дает следующее уравнение:

$$u_2 - u_1 + \sqrt{\frac{\sigma_2 - \Sigma}{1/\rho_2 - 1/R^V}} + \int_{\rho_1}^{R^I} \frac{a_1(\zeta)}{\zeta} d\zeta = 0. \quad (2.13)$$

Значения плотностей как функции Σ находим, решая уравнения

$$\Sigma = s_1 - P^I(R^I) - (4\mu_1/3) \ln(R^I/\rho_1), \quad \Sigma = s_2 - P^V(R^V) - (4\mu_2/3) \ln(R^V/\rho_2).$$

Если в (2.13) заменить Σ на $-P$, а скорость продольных волн a на скорость звука в среде c (2.3), то получим выражение, совпадающее с приведенным в [7] для расчета распада разрыва в жидкой среде с нелинейной диаграммой деформирования. В случае замены в (2.13) интеграла его приближенным выражением по формуле “левых” прямоугольников полученное выражение совпадет с линеаризованными формулами из [6, 7]. Кроме того, в линеаризованном варианте ВР и УВ не различаются. Аналогично касательные напряжения T и скорость V в зонах характеристической плоскости II, IV могут быть определены из следующих выражений:

$$V = \frac{R^I b^I v_1 + R^V b^V v_2 + \tau_2 - \tau_1}{R^I b^I + R^V b^V}, \quad T = \frac{R^I b^I R^V b^V (v_2 - v_1) + \tau_2 R^I b^I + \tau_1 R^V b^V}{R^I b^I + R^V b^V}. \quad (2.14)$$

Здесь $b^I = b_1(R^I)$; $b^V = b_2(R^V)$. Выражения (2.14) тождественны полученным в [7], за исключением выражений для плотностей R^I и R^V . Таким образом, соотношения (2.10), (2.14) позволяют вычислять значения вектора U на всей характеристической плоскости (r, t) .

Пренебрегая влиянием касательных напряжений на характеристики продольной волны, в случае постоянных сдвиговых величин в зонах I и II можно рассчитывать параметры продольной и сдвиговой волн независимо друг от друга. Если в качестве независимых величин принять $\{U, P, S, V, T\}$, то систему уравнений (2.1) в соответствии с [11, 12] можно записать в виде $LU = 0$, где $L \equiv AU_{,t} - BU_{,r}$ — дифференциальный оператор; A, B — симметричные матрицы коэффициентов, причем A положительно определена. На основе априорных оценок в [11, 12] делается вывод об однозначной разрешимости задачи о распаде разрыва при коэффициентах матрицы A , близких к постоянным величинам. Подобная линеаризация использовалась в [6, 7], но вопрос о единственности решения не рассматривался. В работе [3] для системы двух уравнений гидродинамики доказаны существование и единственность обобщенного решения при выполнении условий устойчивости, аналогичных использованным выше, и некоторых ограничений на зависимость давления от плотности. Первые три уравнения системы (2.1) при допущениях 1, 2 являются аналогом уравнений газовой динамики, для которых задача о распаде разрыва хорошо изучена.

Таким образом, применительно к схеме Годунова первого порядка в нелинейной модели грунтовой среды Григоряна построено и обосновано решение задачи о распаде произвольного разрыва в виде комбинации УВ и ВР для продольных волн и простой волны для поперечных волн.

3. Численные расчеты. Ниже приводятся результаты расчетов, проведенных по численной методике [7] с модифицированным этапом “предиктор”. Используется полученное выше решение задачи о распаде разрыва с учетом нелинейной диаграммы объемного сжатия и сдвиговой прочности среды.

Для оценки применимости численной методике к решению задач упругопластического деформирования рассмотрена следующая задача. Уравнение состояния среды имеет вид $p = K(\rho/\rho_0 - 1)$, $K = 250$ МПа; $\mu = 150$ МПа; $\sigma_T = 15$ МПа; $\rho_0 = 1$ г/см³. Параметры слева от разрыва имеют следующие значения: $\rho_{(1)} = 1,36$ г/см³, $p_{(1)} = p_0 = 90$ МПа; $\sigma_{(1)} = \sigma_0 = -100$ МПа, $u_{(1)} = 0$. Параметры справа от разрыва соответствуют невозмущенному состоянию: $\rho_{(2)} = \rho_0$, $p_{(2)} = \sigma_{(2)} = u_{(2)} = 0$. Образовавшаяся в результате распада разрыва конфигурация “течения” изображена на рис. 1. Показаны ВР, движущаяся влево, КР и УВ, распространяющаяся вправо. Волны состоят из упругого предвестника как для УВ, так и для ВР, и фронта пластической волны. Время t отнесено к $t_0 = 1$ мс, пространственная переменная r отнесена к размеру областей $r_0 = 1$ м. В нижней части рис. 1 схематично показана последовательность построения решения [12] на примере распределения давления. Значения безразмерной переменной $x = r/r_0$ равны: $x_1 = -0,63$; $x_2 = -0,5787$; $x_3 = -0,4364$; $x_4 = -0,4292$; $x_5 = 0,0708$; $x_6 = 0,5524$; $x_7 = 0,684$. Значения величин давления, напряжения и скорости приведены в таблице. В интервалах изменения переменной

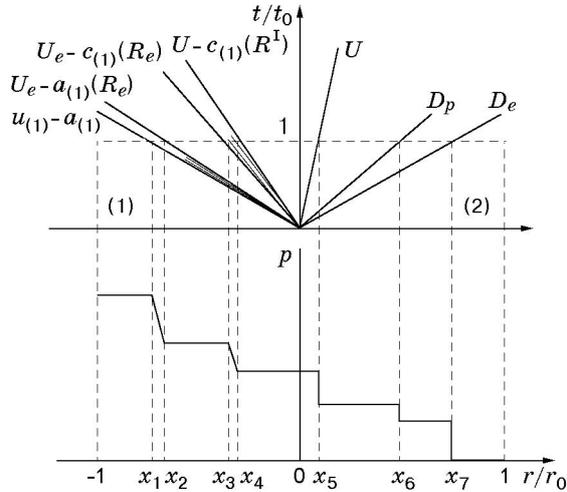


Рис. 1

x	p , МПа	σ , МПа	u , м/с
$-1 < x < x_1$	90	-100	0
$x_2 < x < x_3$	57,645	-47,645	60,36
$x_4 < x < x_5$	53,25	-43,25	70,80
$x_5 < x < x_6$	33,25	-43,25	70,80
$x_6 < x < x_7$	12,818	22,818	33,36
$x_7 < x < 1$	0	0	0

$x_1 < x < x_2$, а также $x_3 < x < x_4$ принято линейное распределение. Распределения давления, напряжения и скорости вдоль оси r представлены на рис. 2 (сплошные линии). Из рис. 2,а следует, что давление в упругих средах терпит разрыв. Непрерывными при переходе через КР являются напряжение и скорость (рис. 2,б,в). Для проверки справедливости описанного выше подхода к решению задачи о распаде разрыва в упругопластических средах получено решение этой задачи по схеме “крест”, аппроксимирующей уравнения теории течения в переменных Лагранжа. Решение строилось без введения искусственной вязкости с числом Куранта, равным единице (по отношению к скорости распространения упругих продольных волн). Решение по схеме “крест” показано на рис. 2 штриховыми линиями. Результаты сравнения этих двух решений позволяют сделать вывод о справедливости указанного подхода. Штрихпунктирные линии соответствуют решению данной задачи по схеме первого порядка аппроксимации. Результаты сравнения решений показывают, что введенное допущение в рамках схемы первого порядка является обоснованным.

Влияние нелинейной диаграммы на волновую картину решения исследовано в задаче о взрыве сферического заряда взрывчатого вещества в грунтовой среде. Для мягкого грунта типа песка характерны нелинейная диаграмма сжатия и разгрузки и отличная от нуля сдвиговая прочность [17, 18]. Константы M и n степенной зависимости равны соответственно 2,1 ГПа и 1,8, константы A и B ударной адиабаты равны 500 м/с и 2,41. Значения констант интерполирующего полинома следующие: $\alpha = \beta = 0,06$, $\rho_1 = 1,86$ г/см³, $\rho_4 = 2,15$ г/см³, $\gamma_e = 3$, $\gamma_p = 4$. Начальная плотность смеси песка $\rho_0 = 1,76$ г/см³, $\rho_g = 2,65$ г/см³, начальная скорость звука при разгрузке $C_0 = 350$ м/с, модуль сдвига $G = 100$ МПа, константы предела текучести: $k = 1,25$, $b = 0,5$ МПа [17, 18]. Для расчета действия взрыва используется модель мгновенной волновой детонации, начальное давление в области продуктов детонации равно 12 ГПа.

Зависимости давления на контактной границе продукты детонации — грунт от времени приведены на рис. 3,а (кривые 1). На рис. 3, 4 сплошными линиями показаны результаты решения с использованием нелинейного распада разрыва, штриховыми — линейаризованного. Контактные параметры представляют собой решение соответствующей задачи о распаде разрыва на этапе “предиктор” численного метода. В начальный момент различие очень велико, но с течением времени оно существенно уменьшается. Кривые 2 на рис. 3,а соответствуют давлению в примыкающей к контактной границе ячейке. На рис. 3,б показана зависимость скорости от времени (обозначения те же, что на рис. 3,а).

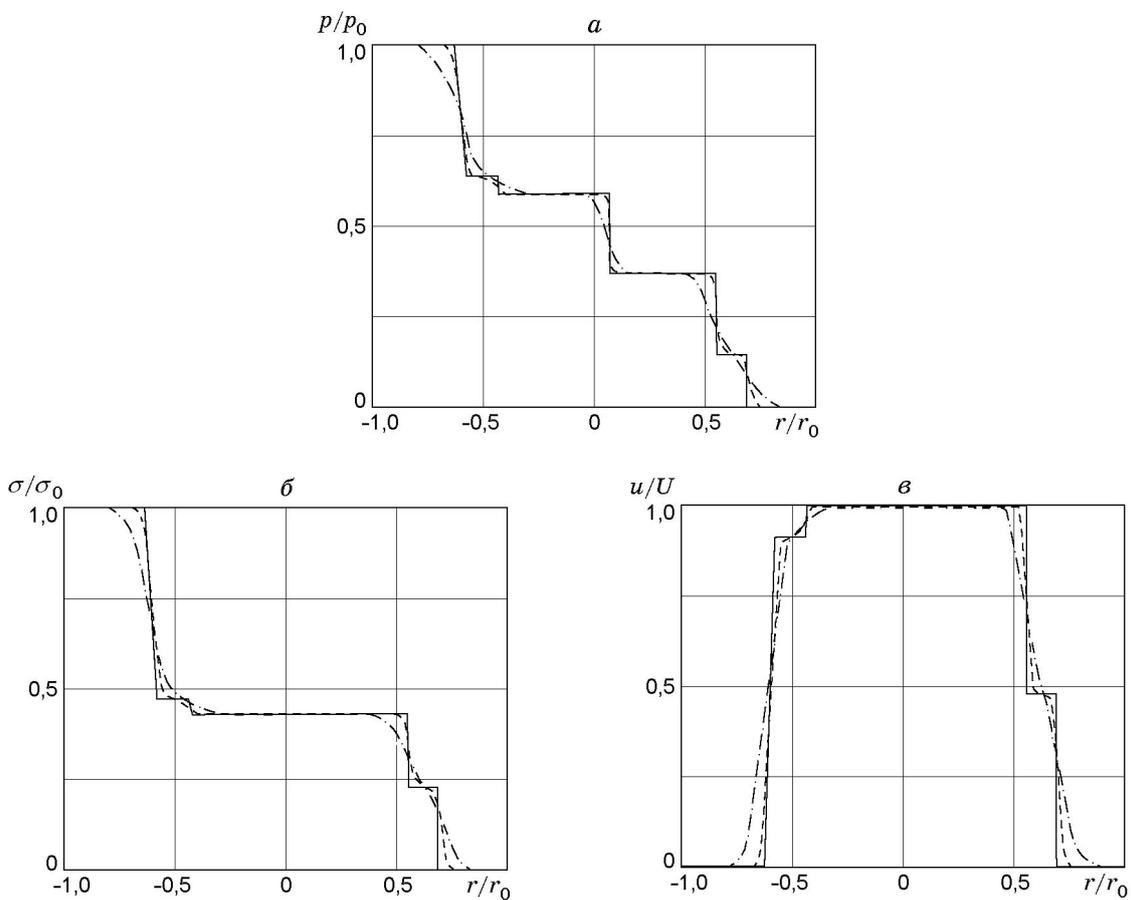


Рис. 2

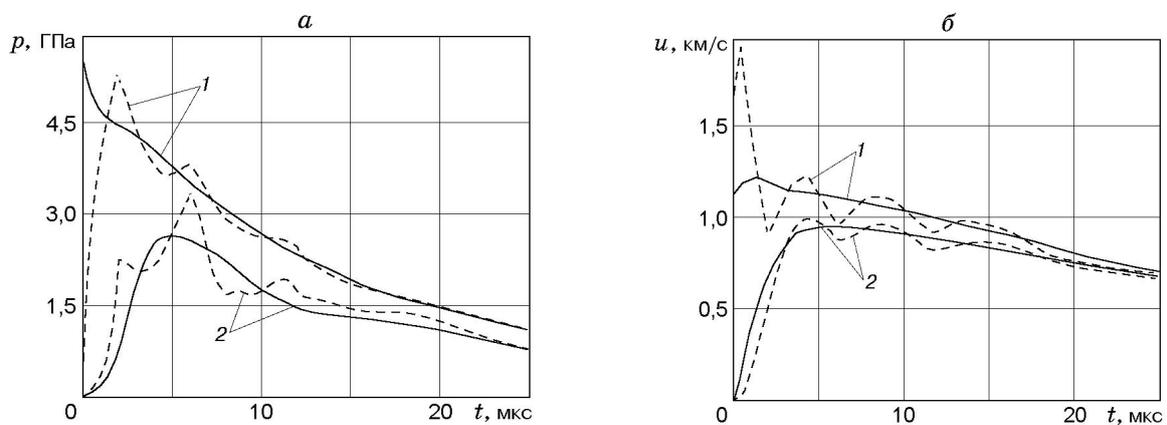


Рис. 3

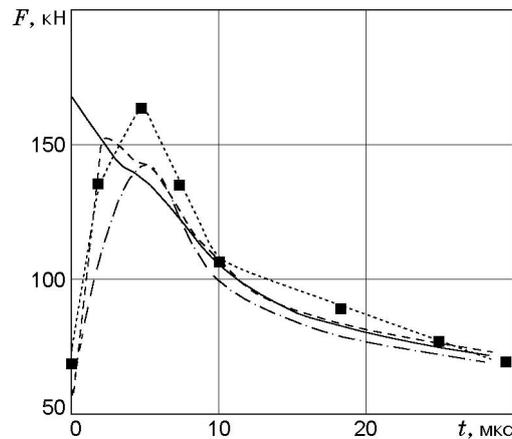


Рис. 4

На расстоянии примерно трех начальных радиусов заряда различие практически исчезает, в то время как давление в ячейках остается порядка 150 МПа, что значительно превышает модуль сдвига и предел текучести мягких грунтов. Эффективность численной методики [7] с использованием линейаризованного варианта расчета распада разрыва подтверждается также результатами работы [17], в которой проведено сравнение такого решения с экспериментальными данными в задаче о взрыве накладного заряда взрывчатого вещества в песке.

Ниже приводятся результаты решения задачи с ударным нагружением грунтовой среды на примере задачи соударения протяженного стального цилиндрического стержня-ударника и песчаного грунта [18]. Диаметр стержня-ударника 20 мм, длина 1000 мм. Механические характеристики материала ударника следующие: модуль Юнга 200 ГПа, коэффициент Пуассона 0,3, предел текучести 1200 МПа, плотность 7,8 г/см³. Эксперименты проводились с сухой уплотненной песчаной смесью естественного состава, параметры уравнения состояния которой приведены выше.

Сравнение результатов расчетов по линейаризованной и модифицированной методикам с экспериментальными данными приведено на рис. 4. Показана зависимость силы сопротивления внедрению ударника в грунт от времени. В начальный момент $t = 0$ отношение значений контактных сил, вычисленных по разным методикам, превышает 300 %, но уже при $t = 2$ мкс значения сил выравниваются. Сила сопротивления может определяться интегрированием как контактных напряжений, так и напряжений в сечении стержня-ударника, как это предполагается в методике “обращенного” эксперимента [18]. Штрихпунктирной линией на рис. 4 показана сила сопротивления, полученная интегрированием продольных напряжений в стержне в сечении, расположенном на расстоянии пяти диаметров от торца ударника. При учете схемной вязкости различие нелинейного и линейаризованного вариантов расчетов отсутствует. Максимальное значение силы в расчетах с учетом нелинейного поведения грунта на этапе “предиктор” численной схемы практически совпало с полученным в эксперименте. Различие экспериментальных данных (точки на рис. 4) и численных результатов, полученных с использованием линейаризованного подхода, составляет около 15 %, что не превышает погрешности измерений.

4. Выводы. Получена модификация схемы Годунова для решения задач нелинейного деформирования сплошных сред, описываемых моделью Григоряна. Реализация этапа “предиктор” численной схемы предусматривает решение задачи о распаде произвольного разрыва с учетом нелинейной диаграммы сжатия и отличной от нуля сдвиговой прочности. Предложена постановка задачи, допускающая при некоторых предположениях сведе-

ние ее к известной, имеющей единственное автомодельное решение. Частными случаями задачи о распаде разрыва в данной постановке являются известные соотношения гидродинамики (при отсутствии сдвиговой прочности) и линеаризованные соотношения, для доказательства единственности которых применим метод вариационных неравенств. Справедливость допущений для схемы первого порядка аппроксимации обоснована численно решением тестовых задач импульсного деформирования грунтовых сред. Линеаризованный вариант расчета задачи о распаде разрыва на этапе “предиктор” разностной схемы дает приемлемые результаты практически во всем диапазоне импульсной нагрузки. Нелинейный вариант, примененный для обоснования линеаризованного подхода, позволяет оценить параметры в ближней зоне взрыва или контактные усилия при решении задач соударения при наличии больших градиентов величин.

Авторы выражают благодарность А. И. Садырину и А. В. Кочеткову за обсуждение результатов исследований, а также А. М. Брагову за предоставленные результаты экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. Ч. 2.
3. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
4. Афанасьев С. Б., Баженов В. Г. О построении разрывных решений одномерных уравнений динамики упругопластических сред // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Статика и динамика деформируемых систем. Горький: Горьк. ун-т, 1980. С. 76–83.
5. Мерзиевский Л. А. Метод расчета течений вязкоупругой среды // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1980. Вып. 45. С. 141–151.
6. Демидов В. Н., Корнеев А. И. Численный метод расчета упругопластических течений с использованием подвижных разностных сеток. Томск, 1983. Деп. в ВИНТИ 27.04.83, № 2924.
7. Абузьяров М. Х., Баженов В. Г., Котов В. Л. и др. Метод распада разрывов в динамике упругопластических сред // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40, № 6. С. 940–953.
8. Кукуджанов В. Н. К исследованию уравнений динамики упругопластических сред при конечных деформациях // Нелинейные волны деформаций. Таллин: Изд-во АН ЭССР, 1977. Ч. 1. С. 98–102.
9. Кондауров В. И. О дивергентной форме уравнений нелинейной термоупругости // ПМТФ. 1982. № 3. С. 132–140.
10. Кондауров В. И. Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями // ПМТФ. 1982. № 4. С. 133–139.
11. Садовский В. М. Гиперболические вариационные неравенства в задачах динамики упругопластических тел // Прикл. математика и механика. 1991. Т. 55, вып. 6. С. 1041–1048.
12. Садовский В. М. К теории распространения упругопластических волн в упрочняющихся средах // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 5. С. 166–172.
13. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 6. С. 1057–1072.

14. **Киселев С. П.** Структура ударных волн сжатия в пористых упругопластических материалах // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 6. С. 27–32.
15. **Уилкинс М. Л.** Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Наука, 1967. С. 212–265.
16. **Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.** Автомодельная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49, вып. 2. С. 284–291.
17. **Баженов В. Г., Котов В. Л., Кочетков А. В. и др.** Исследование волновых процессов в грунтовой среде при взрыве накладного заряда // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. № 2. С. 70–77.
18. **Баженов В. Г., Котов В. Л., Крылов С. В. и др.** Экспериментально-теоретический анализ нестационарных процессов взаимодействия деформируемых ударников с грунтовой средой // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 6. С. 190–198.

*Поступила в редакцию 14/XII 2000 г.,
в окончательном варианте — 25/III 2002 г.*
