

Колебания заряженной водной капли в условиях сильных деформаций в приближении эллипсоидальной формы поверхности

А.А. Землянов, А.Д. Булыгин*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 5.02.2013 г.

Исследуются физика деформации заряженной водной капли с применением численных методов в приближении ее эллипсоидальной формы и критерий неустойчивости капли от величины ее начальных деформаций. Показано, что при малых начальных возмущениях время развития неустойчивости значительно превышает период колебаний невозмущенной капли без заряда. При увеличении начальных деформаций время неустойчивости экспоненциально уменьшается. Это указывает на важную роль внешних факторов деформаций заряженных капель, приводящих к ускорению их неустойчивости.

Ключевые слова: заряженная капля, неустойчивость Рэля; charged drop, Rayleigh instability.

Введение

Задача о динамике заряженных капель в облаках представляет большой интерес для физики грозообразования. Ее постановка и первые решения исходят из работ Rayleigh [1]. Исследования в данном направлении активно ведутся и в настоящее время [2]. Традиционно в теоретическом анализе этой задачи используют метод малых возмущений. Для практически важного случая осцилляции капли с конечными деформациями, а также для жидкостей с вязкостью, отличной от нуля, такой подход приводит к достаточно громоздким выражениям для зависимости амплитуды колебаний от времени [2]. От этого недостатка свободны численные методы решения задач гидродинамики.

В настоящей статье использован метод, основанный на представлении деформированной поверхности капли заданной формы. Следуя данному подходу, рассмотрим динамику заряженной водной капли на основе закона сохранения энергии [3], записанного для деформированной капли эллипсоидальной формы [4]. Таким образом, предполагается, что форма деформированной частицы – эллипсоид, остается одинаковой на всех стадиях процесса.

Основные соотношения

Рассмотрим постановку задачи о динамике заряженной водной капли в интегральной формулировке (в системе отсчета центра масс). В соответст-

вии с законом сохранения энергии запишем уравнение [5]:

$$\frac{d}{dt}(K + \Pi) + N = \int_S (\mathbf{p}_q \mathbf{v}) dS', \quad (1)$$

где $K = \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{v}^2 dV'$ – кинетическая энергия жидкости в капле; $\Pi = \sigma_{\text{п}} S$ – поверхностная энергия натяжения;

$$N = \frac{1}{2} \eta \int_V \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV'$$

– скорость вязкой диссипации; $\int_S (\mathbf{p}_q \mathbf{v}) dS'$ – работа сторонних сил в единицу времени; V, S – объем и площадь поверхности деформированной капли; \mathbf{v} – вектор скорости течения внутри капли; v_i – компоненты вектора скорости течения внутри капли; x_i – пространственные координаты; $\sigma_{\text{п}}$ – коэффициент поверхностного натяжения; $\mathbf{p}_q = p_q \mathbf{n}$, p_q – напряжение на поверхности капли, p_q – давление; \mathbf{n} – вектор внешней нормали к поверхности капли; η – динамическая вязкость; ρ_1 – плотность жидкости; t – время.

На границе раздела заряженная капля – воздух действует поверхностная пондеромоторная сила. Она характеризуется величиной напряжения $\mathbf{p}_q = \mathbf{n} |\mathbf{E}|^2 / 8\pi$ [3]. Здесь \mathbf{E} – электрическое поле вблизи поверхности капли, которое выражается следующим образом:

* Александр Анатольевич Землянов (zaa@iao.ru); Андрей Дмитриевич Булыгин (b.a.d@iao.ru).

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_q + \mathbf{E}_a$$

(\mathbf{E}_q – поле заряда капли, \mathbf{E}_a – внешнее электрическое поле). Далее мы будем рассматривать ситуацию для $\mathbf{E}_a = 0$.

Выразим слагаемое в (1), ответственное за работу электростатических сил, через мощность. Вид интегрального вклада от работы внешних электростатических сил, действующих на поверхность капли, может быть переформулирован в терминах энергии заряженной капли W_q . Действительно, для элементарной площадки площадью dS с поверхностной плотностью заряда σ_q можно получить следующий ряд соотношений [5]:

$$-p_q \mathbf{n} \nu dS = (\nabla \varphi \sigma_q) \nu dS = \left(\nabla \varphi \frac{d}{dt} \mathbf{r} \right) \sigma_q dS, \quad (2)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор в капле.

Заметим далее, что потенциал в заданной точке формируется поверхностным зарядом со всей капли, т.е.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{S'} \frac{\sigma_q(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} dS' + C_0$$

(C_0 – калибровочная константа). Дифференцируя выражение для полной электростатической энергии капли $W_q = \int_{\partial V} \frac{\varphi \sigma}{2} dS$ по времени, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W_q &= \frac{d}{dt} \int_S \frac{\varphi(\mathbf{r}, t) \sigma_q(\mathbf{r}, t)}{2} dS = \\ &= \iint_{S'} \frac{\sigma_q(\mathbf{r})}{2} \left(\nabla' \frac{\sigma_q(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \frac{d}{dt} \mathbf{r}' + \nabla \frac{\sigma_q(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \frac{d}{dt} \mathbf{r} \right) dS' dS. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь мы учли, что приближение бесконечной проводимости соответствует условию $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi \sigma_q) = 0$. Таким образом, мы пренебрегаем временем установления локального равновесия по сравнению с характерными временами динамики капли. С учетом условия постоянства потенциала на поверхности и в силу сохранения полного заряда имеем

$$\frac{d}{dt} \int_S \varphi \sigma_q dS = \varphi \int_S \frac{d}{dt} \sigma_q dS = 0.$$

В силу симметрии \mathbf{r}' и \mathbf{r} и с учетом (2) из (3) окончательно найдем

$$\frac{d}{dt} W_q = \int_S \left(\nabla \varphi \frac{d}{dt} \mathbf{r} \right) \sigma_q dS = - \int_S p_q \mathbf{n} \nu dS.$$

Отсюда уравнение динамики капли (1) преобразуется к виду

$$\frac{d}{dt} (K + \Pi + W_q) + N = 0. \quad (4)$$

Поскольку число Рейнольдса данной задачи $Re = \nu a_0 / \nu \gg 1$, где ν – кинематическая вязкость

жидкости, то за исключением области пограничного слоя толщиной $a_0 / \sqrt{Re} \ll a_0$ течение внутри капли может быть рассмотрено потенциальным [6].

Следуя этому приближению, для формы возмущенной поверхности в виде эллипсоида потенциал скорости течения Φ можно записать следующим образом [7]:

$$\Phi = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{a_1} \frac{da_1}{dt} + \frac{y^2}{a_2} \frac{da_2}{dt} + \frac{z^2}{a_3} \frac{da_3}{dt} \right)$$

(a_i – полуоси эллипсоида). Вектор скорости $\mathbf{v} = \nabla \Phi$, и, таким образом, удается определить все слагаемые, входящие в (4). Для типа деформации капли – эллипсоид вращения ($a_1 = a_3$), введем новую переменную $\gamma = a_2/a_1$ – степень деформации. Вводя также безразмерное время $\tau = t \Omega_0$, где $\Omega_0 = \sqrt{8\sigma_n / \rho_1 a_0^3}$ – основная частота собственных колебаний капли, для безразмерной площади поверхности получим выражение

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{S}{4\pi a_0^2} = \\ &= \begin{cases} \frac{2\pi a_1^2 + \left(\frac{2\pi a_2^2}{\sqrt{1-\gamma^2}} \right) \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-\gamma^2}}{1 - \sqrt{1-\gamma^2}} \right)}{4\pi a_0^2}, & \text{при } \gamma < 1, \\ \frac{2\pi a_1^2 + \left(\frac{2\pi a_2^2}{\sqrt{\gamma^2-1}} \right) \arcsin \left(\frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma} \right)}{4\pi a_0^2}, & \text{при } \gamma \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Безразмерная величина энергии заряженной поверхности эллипсоида соответственно имеет вид

$$\bar{W}_q = \frac{W_q}{8\pi \sigma_n a_0^2} = \frac{\bar{\varphi}_\gamma \bar{Q}}{2},$$

где $\bar{Q} \equiv Q/(4\pi \sigma_n a_0^3)$, а безразмерный электрический потенциал $\bar{\varphi}_\gamma \equiv \varphi_\gamma a_0 / Q$ на поверхности запишем как

$$\bar{\varphi}_\gamma = \begin{cases} \frac{\gamma^{1/3}}{\sqrt{\gamma^2-1}} \operatorname{Arth} \left(\frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma} \right), & \text{при } \gamma > 1, \\ \frac{\gamma^{1/3}}{\sqrt{1-\gamma^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma} \right), & \text{при } \gamma < 1. \end{cases}$$

Здесь Q – общий заряд капли; $\bar{\eta} = 60\eta / \sqrt{a_0 2\sigma_n \rho_1}$ – безразмерная динамическая вязкость. Также вводятся безразмерные величины кинетической энергии жидкости в капле: $\bar{K} = K/(8\pi \sigma_n a_0^2)$ и скорости вязкой диссипации $\bar{N} = \Omega_0 N / (8\pi \sigma_n a_0^2)$.

Критерий неустойчивости заряженных капель был введен Rayleigh и соответствует условию $\bar{W}_q(0) = 1$ или $Q^2 / (16\pi \sigma_n a_0^3) = 1$ [1]. Он связал данный эффект с экспоненциальным ростом амплитуды капиллярных волн на ее поверхности. Было получено

условие проявления неустойчивости идеально проводящей заряженной сферической капли в виде $\bar{W}_q(0) \geq 1$. Справедливость рэлеевского критерия неустойчивости надежно подтверждена в экспериментальных работах [2].

Проанализируем условие неустойчивости капли для произвольной начальной деформации $\gamma(0)$. Для этого продифференцируем выражение для безразмерной потенциальной энергии капли $\bar{U} = \bar{S}/2 + \bar{W}_q$ по величине γ , введя тем самым безразмерную силу

$$\bar{F}(\gamma, \bar{W}_q) = -\frac{\partial \bar{U}(\gamma, \bar{W}_q)}{\partial \gamma}.$$

Ясно, что если сила \bar{F} больше нуля, то деформация капли будет расти, в противном случае капля будет стремиться сжаться, т.е. в данном случае вернуться к состоянию сферической капли. Особенность выбранной модели состоит в том, что при росте \bar{W}_q потенциальная энергия \bar{U} монотонно падает. А это значит, что кривая на поверхности (γ, \bar{W}_q) , на которой происходит смена знака \bar{F} , однозначно отделяет область устойчивости от области неустойчивости. На рис. 1 приведена кривая для $\text{sign}(\bar{F}(\gamma, \bar{W}_q))$ в случае вытянутой деформированной заряженной водной капли в форме эллипсоида. Видно, что для любых конечных деформаций $\gamma > 1$, неустойчивость капли может реализоваться при $0,9 < \bar{W}_q(0) < 1$.

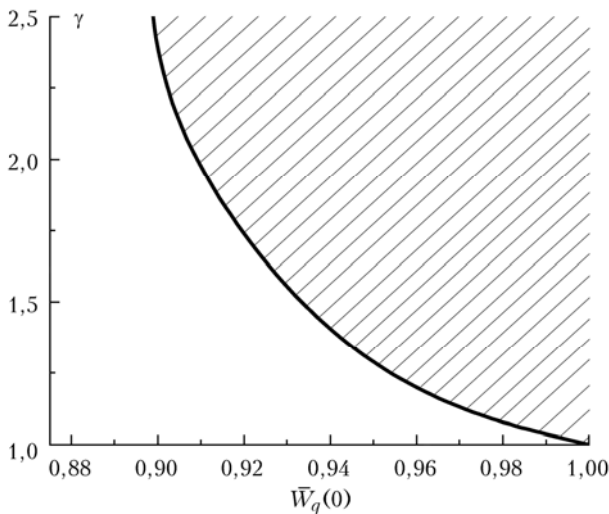


Рис. 1. Кривая, отделяющая область неустойчивости $F > 0$ (заштрихованная область) от области устойчивости $F < 0$

Рассмотрим динамику поверхности капли. Для этого выпишем из (4) уравнение для γ :

$$\frac{d^2\gamma}{d\tau^2} - \frac{2}{3} \frac{\gamma^2 + 2}{\gamma(2\gamma^2 + 1)} \left(\frac{d\gamma}{d\tau}\right)^2 + \frac{135\gamma^{8/3}}{16(2\gamma^2 + 1)} \frac{d\bar{S}}{d\gamma} + \frac{135\gamma^{8/3}\bar{W}_q(0)}{8(2\gamma^2 + 1)} \frac{d\bar{\varphi}_\gamma}{d\gamma} + \frac{\bar{\eta}\gamma^{8/3}}{(2\gamma^2 + 1)} \frac{d\gamma}{d\tau} = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) решалось численно для произвольных деформаций. Мы приведем расчетные данные,

которые можно использовать для оценки времени развития неустойчивости капли τ_i . В качестве критерия неустойчивости капли примем величину деформации $\gamma = 3$. Следует заметить, что выбор такого значения достаточно условен и отражает лишь факт достижения больших γ . Рассмотрим зависимости времени развития неустойчивости от размера и заряда капли соответственно.

Из рис. 2 видно, что в области рэлеевского порога неустойчивости капли время развития неустойчивости существенно возрастает с уменьшением размера капли. Модель деформаций капли в форме (5) также позволяет варьировать и значение вязкости.

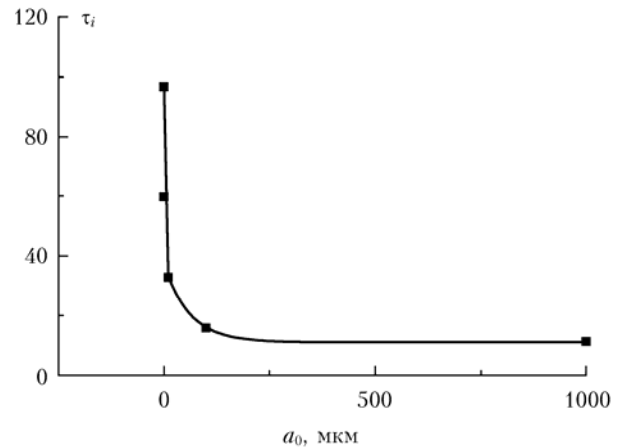


Рис. 2. Зависимость безразмерного времени развития неустойчивости τ_i заряженной капли от размера капли при $\bar{W}_q(0) = 1$

Помимо радиуса и заряда в развитие неустойчивости вносит вклад величина начальной деформации капли. Амплитуда осциллирующей крупных облачных капель может достигать величины, сравнимой с радиусом капли, например из-за соударений с другими каплями или за счет акустических возмущений воздуха. Модель (5) позволяет оценивать характерные времена для различных начальных деформаций. На рис. 3 показана зависимость времени достижения неустойчивости капли от начальной деформации поверхности.

В работе [8] на основе модели, построенной в приближении малых колебаний, время развития неустойчивости миллиметровой капли при $\bar{W}_q(0) = 1$ и $\gamma = 1 + 10^{-8}$ было оценено в 10 с. Это находится в согласии с результатами, полученными при расчете с использованием (5).

Таким образом, полученная модель включает критерий Рэлея как частный случай, когда реализуются незначительные начальные деформации. Установлено также, что для водных капель размерами, характерными для грозовых облаков, имеющих высокие значения начальных деформации ($\gamma \leq 2$), рэлеевский критерий выполняется с точностью до 90%. Показано, что при малых начальных возмущениях время развития неустойчивости крайне велико. Следует считать, что одним из основных факторов, влияющих на развитие неустойчивости заряженных

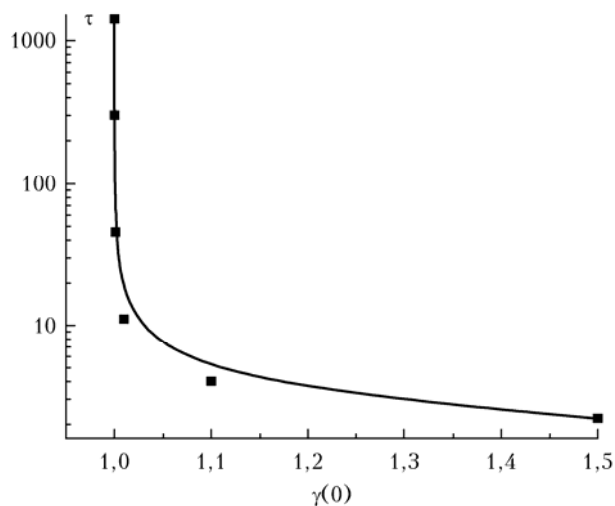


Рис. 3. Зависимость безразмерного времени развития неустойчивости капли от начальной деформации и $\bar{W}_q(0) = 1$

капель, является внешнее возмущение поверхности, приводящее к достаточно большим начальным де-

формациям $\gamma(0) \sim 2$. Все вышесказанное позволяет заключить, что полученное уравнение для степени деформации заряженной капли служит хорошей основой для проведения оценок характерных времен физических процессов, происходящих с каплей в грозном облаке.

1. *Rayleigh (Strutt J.W.). On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // Phil. Mag. 1882. V. 14. P. 184–186.*
2. *Ширяева С.О., Григорьев А.И. Заряженная капля в грозном облаке. Ярославль: ЯрГУ, 2008. 535 с.*
3. *Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 677 с.*
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 621 с.*
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988. 509 с.*
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.*
7. *Ламб Г. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947. 929 с.*
8. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. Характерное время развития неустойчивости капли, заряженной до рэлеевского предела // Ж. техн. физ. 1999. Т. 25, вып. 15. С. 41–45.*

A.A. Zemlyanov, A.D. Bulygin. Vibrations of a charged water drop in the conditions of strong deformations in approach of the ellipsoidal form of the surface.

Work is devoted to study of physics of deformation of a charged water drop with application of numerical methods, in approach of its ellipsoidal form. The criterion of instability of a drop versus the size of its initial deformation is investigated. It is shown that at small initial disturbances, the time of development of instability considerably exceeds the period of vibrations of a non-disturbed uncharged drop. The time of instability exponentially decreases with an increase in initial deformations. This indicates an important role of external factors of deformations of charged drops leading to acceleration of their instability.