

9. Григорян С.С. Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород // ПММ. — 1967. — Т. 31, вып. 4. — С. 643—669.
10. Шер Е.Н. Оценка дробящего действия удлиненного заряда в хрупкой среде // ФТПРПИ. — 1975. — № 1. — С. 88—90.
11. Мартынюк П.А., Шер Е.Н. Некоторые автомодельные задачи о развитии звездчатой трещины в условиях антиплоской деформации // ПМТФ. — 1976. — № 5. — С. 168—174.
12. Шер Е.Н. Пример расчета движения радиальных трещин, образующихся при взрыве в хрупкой среде в квазистатическом приближении // ФТПРПИ. — 1982. — № 2. — С. 40—42.
13. Мартынюк П.А., Шер Е.Н. Оценка размеров зоны радиальных трещин, образующихся при камуфлетном взрыве шнурового заряда в хрупкой среде // ПМТФ. — 1984. — № 4. — С. 127—132.
14. Быковцев А.С., Тавбаев Ж.С. О «звездообразной» системе распространяющихся дислокационных разрывов // ПММ. — 1984. — Т. 48, вып. 1. — С. 163—166.
15. Быковцев А.С., Черепанов Г.П. О моделировании очага землетрясения // ПММ. — 1980. — Т. 44, вып. 3. — С. 557—564.
16. Быковцев А.С. Распространение сложных разрывов с кусочно-постоянными и переменными скоростями вдоль криволинейных и ветвящихся траекторий // ПММ. — 1986. — Т. 50, вып. 5. — С. 804—814.
17. Быковцев А.С., Крамаровский Д.Б. О распространении сложной площадки разрушения. Точное трехмерное решение // ПММ. — 1987. — Т. 51, вып. 1. — С. 117—129.
18. Быковцев А.С. О волновых полях, создаваемых распространяющимися дислокационными разрывами // Экспериментальная сейсмология в Узбекистане. — Ташкент: Фан, 1983. — С. 171—193.
19. Николаевский В.Н. Динамическая прочность и скорость разрушения // Удар, взрыв и разрушение. — М.: Мир, 1981. — С. 166—203.

г. Ташкент

Поступила 7/VIII 1992 г.,
в окончательном варианте — 24/XII 1993 г.

УДК 532.526

Н.М. Терехова

ДИНАМИКА НЕУСТОЙЧИВЫХ КОЛЕБАНИЙ В СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУЕ

До недавнего времени основным рабочим инструментом в важном и практически значимом разделе газовой динамики, связанном с пульсационными процессами в сверхзвуковых струях, были экспериментальные методы. Другие методы, позволяющие глубже проникать в суть возникающих явлений, пока находятся в стадии становления. Это утверждение в полной мере применимо и к методам математического моделирования, что связано не столько с робостью исследователей или с недостаточно развитым математическим аппаратом, сколько с принципиальными трудностями моделирования широкого круга нестационарных газодинамических явлений. По своей сути методы математического моделирования предназначены для того, чтобы обойти непреодолимые трудности точного расчета и в то же время сохранить основные черты истинного решения. Здесь же основная сложность часто заключается в построении правильной физической модели, адекватно описывающей явление или круг явлений, так как в сложном круге взаимосвязанных процессов вычленение какого-либо одного, достаточно простого для численной реализации, часто чревато нарушением причинно-следственных связей истинного процесса.

Но уровень развития экспериментальных методов не вполне отвечает уровню поставленных задач выявления природы пульсаций и связи с про-

цессами шумообразования, так как из-за несовершенства методик измерений в сильноградиентных и часто загрязненных потоках при исследованиях ограничиваются измерениями опосредованных или интегральных величин, что позволяет только фиксировать то или иное свойство явления, основные черты которого остаются за горизонтом познания. В этой ситуации консолидация разных методов, дающих неполное представление о целом, может быть связующим звеном воссоздания механизма процесса или явления.

Цель настоящей работы — изучение возможностей реализации механизмов трехволновых резонансных взаимодействий при заполнении спектра возмущений, определяющих так называемые широкополосные шумы струй.

Рассматривается возможность описания экспериментально наблюдаемой продольной эволюции крупномасштабных сдвиговых возмущений в сверхзвуковой струе в рамках слабонелинейной теории устойчивости. Исходная реальная ситуация следующая: в начальном участке сверхзвукового потока на амплитудно-частотном спектре возмущений [1, 2] фиксируется существование двух детерминированных пиков в относительно узком диапазоне

частот (чисел Струхалия $Sh = \frac{2\pi\omega r_0}{a(U_0 = 0)}$). Соотношение частот в этих пиках

близко к кратному 1 : 2. Не вызывает сомнения факт, что колебания на меньшей частоте, интенсивность которых мало меняется вниз по потоку, воздействуют на колебания двойной частоты, способствуя их быстрому росту, так что последние вскоре становятся доминирующей модой, определяющей несущую частоту акустического излучения струи. С достоверностью известно, что для чисел Маха, больших или равных 1,5, это должны быть спиральные моды с азимутальным волновым числом $n = 1$ или -1 , хотя идентификация возмущений свидетельствует, что близ среза сопла присутствуют как спиральные, так и осесимметричные моды $n = 0$. Как показывают расчеты линейных характеристик [3], оба типа колебаний неустойчивы и имеют сопоставимые инкременты.

Итак, если предположить, что описанная картина продольной динамики возмущений определяется взаимовлиянием колебаний на разных частотах, нелинейный механизм выделения азимутальных крупномасштабных волн на больших частотах может дать ключ к пониманию физического процесса в свободном потоке на сверхзвуке.

В данной работе рассмотрен механизм резонансного зацепления волн. Известно, например, что в свободном (как сжимаемом, так и несжимаемом) дозвуковом слое сдвига реализуется механизм субгармонического резонансного взаимодействия двумерных дозвуковых возмущений, у которых фазовые скорости гармоник и субгармоник совпадают [4, 5]. Предварительное изучение линейных характеристик неустойчивых колебаний для сверхзвуковой струи показало, что, по крайней мере для изученного числа Маха ($M_0 = 1,5$), условия двухволнового субгармонического резонанса на начальном участке струи не реализуются. Следовательно, резонансный механизм, если он существует, должен быть более сложного вида, например трехволновым.

В настоящей работе рассмотрены две триады, в которых выполняются условия фазового синхронизма. Для системы волн в цилиндрических переменных r, φ, x

$$(1) \quad p' = \sum_{j=1}^3 \bar{B}_j(\epsilon x, \epsilon t) p_j(r) e^{i\theta}, \quad \theta = \alpha x - \omega t + n\varphi + \psi, \quad \alpha = \alpha' + i\alpha''$$

резонансные триплеты, связывающие разномодовые возмущения на большей частоте гармоники ω_1 (Sh_1) и меньшей частоте субгармоники ω_2 (Sh_2), могут быть двух видов: пара синхронизованных спиральных волн махового (махового) типа (суперпозиция мод $n_2 = 1$ и $n_3 = -1$) на частоте субгармоники и осесимметричная мода $n_1 = 0$ на частоте гармоники. Условно назовем такой триплет симметричным в отличие от несимметричного, образованного

разномодовыми колебаниями $n_2 = 1$ и $n_3 = 0$ на меньшей частоте ω_2 и спиральной волной $n_1 = 1$ на двойной частоте ω_1 .

Степень синхронизации линейных волн в таких системах показана на рис. 1. В симметричной триаде резонанс близок к односточечному ($\delta = 0,47$, где δ — толщина слоя смещения), нелинейная связь, а следовательно, взаимовлияние волн могут проявиться в непосредственной близости к срезу сопла, далее вниз по потоку эта связь ослабевает, и при $\Delta\alpha' \sim 0,2$ развитие волн идет автономно. В несимметричной триаде, напротив, нелинейная связь устанавливается к середине начального участка и поддерживается на значительно больших продольных расстояниях. Этой связи сопутствуют меньшие линейные инкременты α' . Укажем, что для $M_0 = 1,5$ $x = 0,228/\delta$ [6].

В [6, 7] подробно изложены вопросы математического моделирования взаимодействия в резонансных триадах на основе численного интегрирования амплитудных уравнений для $A_j = B_j e^{-\alpha_j x}$. Запишем их окончательный вид

$$(2) \quad \frac{\partial A_j}{\partial x} = -\alpha_j' A_j + \epsilon h K_{jlm} A_l A_m, \quad j, l, m = 1, 2, 3, \quad j \neq m \neq l.$$

Здесь первый член в правой части определяет линейный рост амплитуды соответствующей волны, а поправка к нему дается нелинейными коэффициентами K_j , образованными из квадратичных членов вида $u' \frac{\partial u'}{\partial x}$, ..., входящих в систему Эйлера и в уравнения сохранения для сжимаемого газа, на основе которых ведется моделирование; h — коэффициент резонансной связи (при точном резонансе $h = 1$, с увеличением рассогласования $\Delta\alpha' h \rightarrow 0$).

На рис. 2 показаны абсолютные значения $|K_j|$ для рассмотренных триад (сплошные линии — симметричный, штриховые — несимметричный триплеты). В целом это сложные знакопеременные функции. Характер их распределения вниз по потоку позволяет сделать априорное заключение, что для первой триады рост K в направлении адвекции сопровождается одновременным уменьшением h , а в областях, где для второго триплета $h \sim 1$, не будет происходить значительного роста амплитуд из-за уменьшения K , так что в целом степень нелинейного воздействия будет ограничена и одного порядка в обоих случаях.

Оказалось, что взаимодействие носит характер перераспределения энергии между взаимодействующими волнами. Выявлено, что рост амплитуд на большей частоте происходит всегда, если разность начальных уровней взаимодействующих волн существенна. При сближении интенсивностей колебаний на разных частотах снижается уровень передачи в область больших частот и направленность процесса передачи начинает зависеть от взаимной фазовой ориентации возмущений, определяемой суммарной начальной разностью фаз $\Phi_0 = \psi_1 - \psi_2 - \psi_3$. Найдены фазы максимальной передачи ($\Phi_0^m \sim 5\pi/4$ для симметричного и $\pi/2$ для несимметричного триплет-

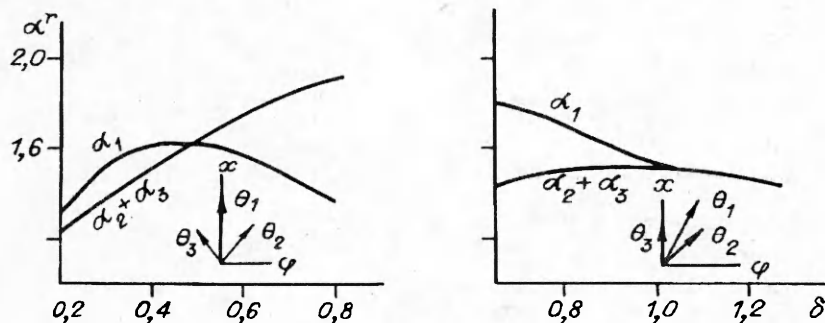


Рис. 1

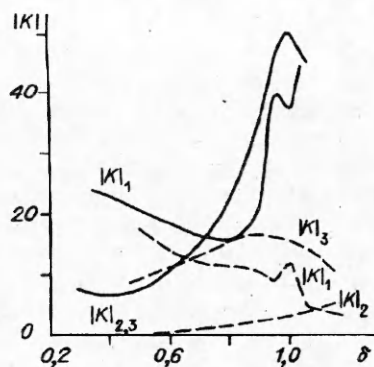


Рис. 2

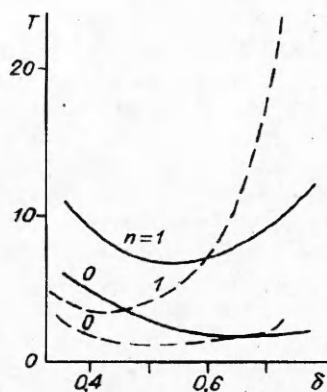


Рис. 3

тов) и минимальной передачи в область больших частот ($\Phi_0^m + \pi$). Между ними со сдвигом в $\pi/2$ лежат фазы запираения нелинейной передачи, когда развитие амплитуд определяется линейными законами.

Несмотря на то что рост амплитуд разных мод в фазах максимальной передачи имеет один порядок, интенсивность волн (величина, которая фиксируется на амплитудно-частотных спектрограммах) будет существенно разной. Покажем, как вычисляется среднеквадратичная интенсивность — величина, аналогичная степени турбулентности возмущенного потока. По определению $I_j = [(\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle) / 3U_0^2]^{1/2}$. Для волн (1), нормированных на характерное U_0 на срезе сопла, $I_j = B_j e^{-\alpha_j T_j}$, где расчетное значение $T_j = [(|u_j|^2 + |v_j|^2 + |w_j|^2) / 6]^{1/2}$ получено при $|p|_{\max} = 1$ для всех мод. Укажем также, что для линейных волн амплитуды B_j постоянны, а их линейная динамика определяется экспоненциальным множителем. При нелинейных связях A_j находится из системы (2).

Распределения максимальных значений T , характеризующие свойства как линейных, так и слабонелинейных волн, показаны на рис. 3 сплошными линиями для $Sh_2 = 0,125$ и штриховыми для $Sh_1 = 0,25$. Видно, что для осесимметричных мод расчетные значения T уменьшаются вниз по потоку, что приводит к уменьшению линейных интенсивностей I . Для спиральных мод, напротив, значения T вниз по потоку растут, особенно на большей частоте, что должно приводить к росту линейных интенсивностей. Совместив характеры динамики A и T для рассмотренных триплетов, получим картины распределения интенсивностей волн, которым уже можно дать физическую интерпретацию.

Один из вариантов расчета представлен на рис. 4 для симметричного (а) и несимметричного (б) триплетов. Здесь начальные интенсивности волн на меньшей частоте выбраны одинаковыми ($I_2^0 = I_3^0 = 5\%$), так что суммарная интенсивность возмущений в первом пике составляет 10%. Волны на

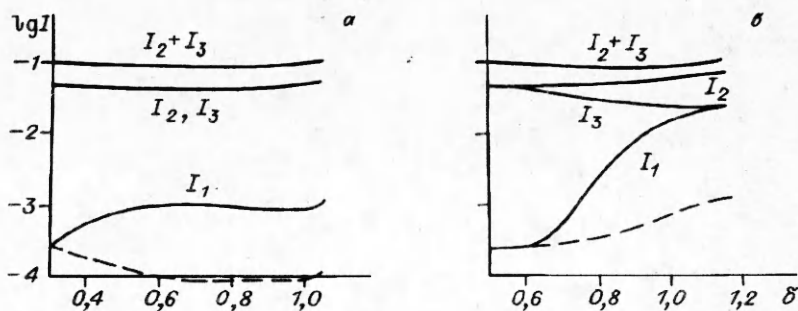


Рис. 4

меньшей частоте при заданном низком уровне I_1^0 волны на большей частоте эволюционируют практически по линейному закону, так что уровень первого пика остается неизменным. Для волны на большей частоте начальный уровень интенсивности I_1^0 выбран порядка фонового ($I_2^0/200$ или $(I_2^0 + I_3^0)/400$), и рассмотрены фазы максимальной передачи.

Из рис. 4 видно, что, несмотря на значительное увеличение амплитуды в симметричном триплете, интенсивность осесимметричной волны I_1 из-за понижения T_1 возрастает в сравнении с начальным уровнем всего в 4 раза. Для несимметричного триплета, напротив, нелинейное взаимодействие может увеличить начальную интенсивность спиральной волны на 2 порядка, при этом линейный уровень (штриховые линии) в конечном значении исследованного интервала может быть превышен в 20 раз.

Это позволяет сделать вывод о том, что механизм трехволнового резонансного усиления может явиться реальным способом выделения из фоновых колебаний спиральных мод и значительного усиления их уже на протяженности начального участка сверхзвуковой струи.

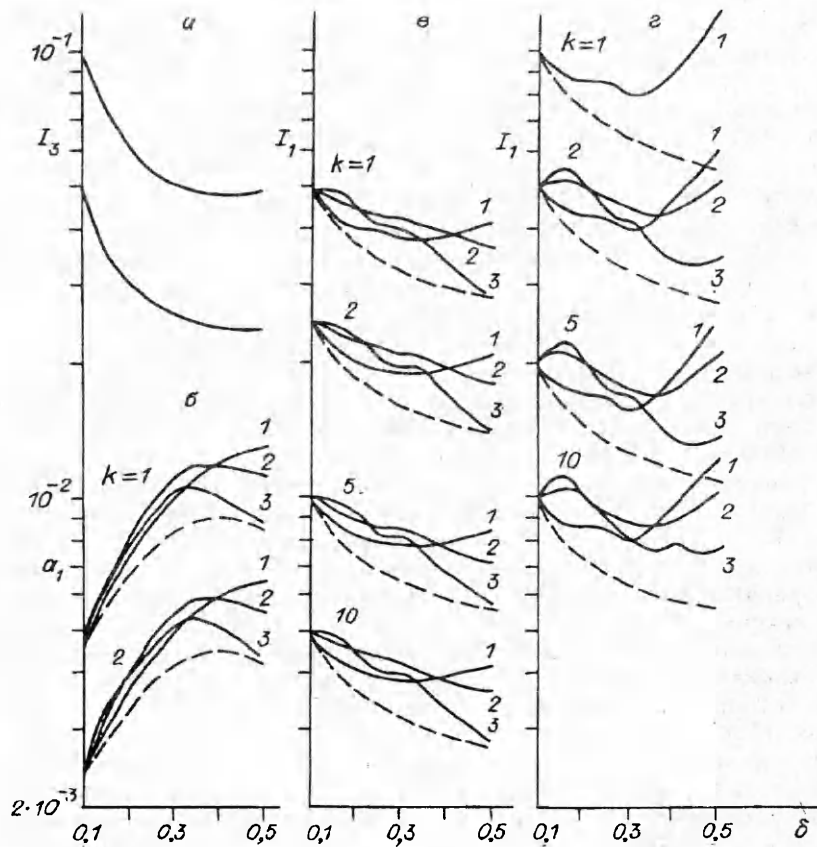
В рамках изучения трехволновых взаимодействий была рассмотрена еще одна задача — о генерации бегущих волн продольной завихренностью потока. Как показано в [8, 9], на начальном участке сверхзвуковой неизобарической струи существует еще один вид неустойчивых возмущений — стационарные вихревые волны Тейлора — Гёртлера (Т—Г), образующиеся из-за искривления траекторий движения газа в поле центробежных сил, обусловленных ячейистой структурой начального участка. Спектральный состав таких естественных возмущений указывает на наличие суперпозиционного набора простых гармонических волн с разными азимутальными числами ($1 \leq n \leq 100$).

Изменение спектров вниз по потоку позволяет сделать вывод, что низкомодовые составляющие волн Т—Г довольно быстро затухают. Но именно такие волны с малыми азимутальными числами могут вступать в резонансное взаимодействие с бегущими сдвиговыми крупномасштабными волнами, влияя на их амплитуды. В данной работе рассмотрена резонансная связь в одном из возможных триплетов. Такая триада при $M_0 = 1,5$ и $Sh_{1,2} = 0,25$ состоит из маховой моды $n_1 = 1$, $n_2 = -1$ и волны Т—Г с $n_3 = 2$, у которой $\alpha_3' \approx \omega_3 \approx 0$. Математическое обеспечение моделирования такое же, как и для рассмотренных ранее триплетов.

Было обнаружено, что взаимодействие в этой резонансной триаде возможно и что для передачи энергии от волн Т—Г к бегущим волнам также есть предпочтительные суммарные начальные фазы. В работе проиллюстрирована передача в трех благоприятных фазах: $\Phi_0 = 5\pi/4$; $6\pi/4$ и $7\pi/4$ (линии 1—3 на рис. 5). Начальная интенсивность волны Т—Г была определена значениями 5 и 10 %. Начальная интенсивность бегущих волн $I_1^0 = I_2^0$ соответствовала значениям I_3^0/k , где $k = 1; 2; 5; 10$. Оказалось, что при любом начальном уровне бегущих волн в этих фазах продольная динамика волны Т—Г определяется только линейными законами (рис. 5, а), т.е. развитие стационарной волны не зависит от наличия в потоке бегущих волн. Физически это легко объяснить тем, что значения центробежных сил, формирующих волны Т—Г, не зависят от степени возмущенности потока.

На рис. 5, б показаны нелинейные амплитуды $a_1 = |A_1|$ в сравнении с линейными (штриховые линии) для $I_1^0 = 5\%$ ($k = 1$) и $I_1^0 = 2,5\%$ ($k = 2$). Толщина $\delta = 0,5$ приблизительно соответствует концу первой ячейки (бочки) неизобарической струи. Из-за наличия интервалов пересечения a_1 трудно отдать предпочтение какой-то фазе из рассмотренных. При $\Phi_0 = 5\pi/4$ будет достигнута максимальная передача в конце ячейки, при $\Phi_0 = 6\pi/4$ — в середине ее, а при $\Phi_0 = 7\pi/4$ — у самого среза сопла.

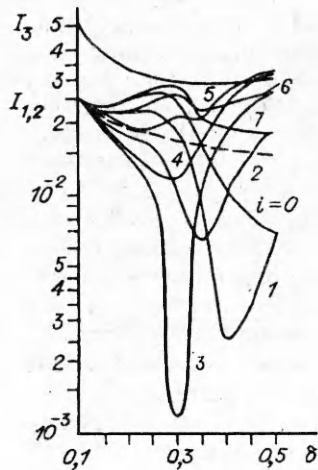
Из рис. 5, в, г для $I_3^0 = 5$ и 10 % соответственно видно, что усиление бегущей волны не зависит от ее начального уровня, а определяется только начальной интенсивностью волн Т—Г I_3^0 , т.е. осуществляется в режиме параметрического усиления. В конечной точке исследованного интервала при



Р и с. 5

$\Phi_0 = 5\pi/4$ одна волна усилится в 1,5, а другая — в 2,15 раза. Рассмотренный вариант отвечает кривизне $1/R_0 = 0,05$.

Подобные же результаты получены для этого триплета и при меньших значениях радиуса искривления ($R_0 = 10$). На рис. 6 приведены продольные распределения интенсивностей волны Т—Г ($I_3^0 = 5\%$) и маховой волны ($I_{1,2}^0 = I_3^0/2$) при различных начальных фазах $\Phi_0 = (\pi/4)i$, определяющих суммарный начальный сдвиг фаз волн. При увеличении искривления немного повышается степень воздействия на бегущие волны, но характер его не меняется.



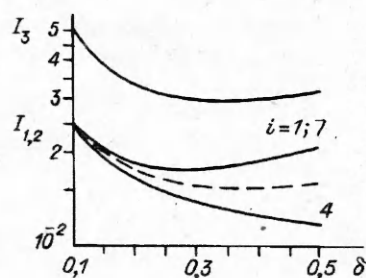
Наличие областей значительного понижения интенсивностей бегущих волн по сравнению с линейным уровнем позволяет предположить, что грамотно наведенной продольной завихренностью можно скорее подавить, нежели усилить бегущие волны сдвиговой неустойчивости.

Еще меньше оказался эффект для низких частот при $Sh_{1,2} = 0,125$, что соответствует первому пику полосы детерминированных частот, описанному выше. Рис. 7 свидетельствует о том, что для этой частоты влияние волны Т—Г на маховую крайне невелико.

Проведенное моделирование позволяет сделать вывод, что наблюдаемое экспериментально снижение интенсивности волны Тейлора — Гёрт-

Р и с. 6

Рис. 7



лера моды $n = 2$ определяется ее собственной динамикой, на которую практически не влияют сдвиговые волны маховой моды. Для последних наличие на начальном участке стационарной продольной завихренности создает условия для некоторого роста, осуществляемого в режиме параметрического резонанса при благоприятных фазовых соотношениях между рассмотренными волнами.

Обнаруженные взаимные фазы, при которых происходит значительное понижение амплитуд и интенсивностей бегущих волн, позволяют считать наличие продольных вихрей стабилизирующим фактором, в определенных условиях препятствующим продольному нарастанию возмущений широкополосного спектра струи.

Часть работы выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93—013—16577).

ЛИТЕРАТУРА

1. Morrison G.L. Flow instability and acoustic radiation measurement of low Reynolds number supersonic jet — Ph. D. Dissertation, Oklahoma St. Un. — Stillwater, Okla., 1977.
2. Моррисон Г.Л., Маклафлин Д.К. Неустойчивость сверхзвуковых струй при небольших числах Рейнольдса // РТК. — 1980. — Т. 18, № 7.
3. Терехова Н.М. Характеристики устойчивости сверхзвуковых струй в спутном потоке // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. — 1986. — Вып. 1.
4. Гиневской А.С., Власов Е.В., Колесников А.В. Аэроакустические взаимодействия. — М.: Машиностроение, 1978.
5. Кудрявцев А.Н. Устойчивость и нелинейное развитие возмущений в сжимаемом слое сдвига: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1993.
6. Терехова Н.М. Резонансные развития возмущений в сверхзвуковой струе. — Новосибирск, 1991. — (Препр./ СО РАН, ИТПМ; № 12—91).
7. Желтухин Н.А., Терехова Н.М. Резонансное развитие возмущений в сверхзвуковой струе // ПМТФ. — 1993. — № 2.
8. Запрягаев В.И., Миронов С.Г., Солотчин А.В. Спектральный состав волновых чисел продольных вихрей и особенности структуры течения в сверхзвуковой струе // ПМТФ. — 1993. — № 5.
9. Желтухин Н.А., Терехова Н.М. Неустойчивость Тейлора — Гёртлера в сверхзвуковой струе // ПМТФ. — 1993. — № 5.

г. Новосибирск

Поступила 10/XII 1993 г.

УДК 532.591+517.958

В.М. Тешуков

ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ В ЗАВИХРЕННОЙ БАРОТРОПНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматриваются интегродифференциальные уравнения теории длинных волн, описывающие в эйлерово-лагранжевой системе координат завихренные течения баротропной жидкости со свободной границей. Для течений с монотонным по глубине профилем скорости получены необходимые и достаточные условия гиперболичности системы уравнений движения, являющиеся необходимыми условиями корректности задачи Коши, определены скорости характеристик, вычислена характеристическая форма системы. Построен пример начальных данных, для которых задача Коши некорректна.

© В.М. Тешуков, 1994