

ЛИТЕРАТУРА

1. Gilman J. Nucleation of dislocation loops by cracks in crystals. Trans. Amer. Instn. Mining Metals Engng, 1957, vol. 209, p. 449.
2. Gilman J., Knudsen C., Walsh W. Cleavage cracks and dislocations in LiF crystals. J. Appl. Phys., 1958, vol. 29, No 4, p. 601.
3. Шаскольская М. П., Ван Янь-вэнь, Гу Шу-чжао. О возникновении дислокаций при распространении и слиянии трещин в ионных кристаллах. Кристаллография, 1961, т. 6, № 4, стр. 605.
4. Косевич В. М. Образование дислокаций при расколе кристалла висмута по плоскости спайности. Кристаллография, 1962, т. 7, № 1, стр. 97.
5. Финкель В. М., Куткин А. И., Савельев А. М., Зрайченко В. А., Зуев Л. В., Косицина В. К. Исследование кинетики роста трещин в монокристаллах висмута. Кристаллография, 1963, т. 8, № 5, стр. 752.
6. Баренблатт Г. И., Салганик Р. Л. О расклинивании хрупких тел. Автоколебания при расклинивании. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, стр. 436.
7. Баренблатт Г. И., Салганик Р. Л. Об автоколебаниях при расклинивании тонких тел. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6, стр. 1075.
8. Регель В. Р., Дубов Г. А. Регистрирующий прибор для записи кривых сжатия, растяжения и релаксации. Бюл. «Приборы и стенды» Ин-та техн.-эконом. информ. АН СССР, 1956, № П — 56—452, тема 2.
9. Johnston W., Gilman J. Dislocations and mechanical properties of crystals. Ed. by Fisher, Wiley, N-Y, 1957, p. 116. (русс. перев.: Дислокации и механические свойства кристаллов. Изд. иностр. лит., 1960, стр. 82).
10. Лаврентьев В. И., Пелль В. Г. Скоростная киносъемка камерой СКС-1. Искусство, 1963.
11. Johnston W., Gilman J. Dislocation multiplication in lithium fluoride crystals. J. Appl. Phys., 1960, vol. 31, No 4, p. 632.
12. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О расклинивании хрупких тел. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4, стр. 667.
13. Cottrell A. Fracture. Ed. by Averbach, Wiley, N-Y, 1959, p. 20 (русс. перев.: Атомный механизм разрушения. Metallurgizdat, 1963, стр. 30).
14. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4, стр. 3.

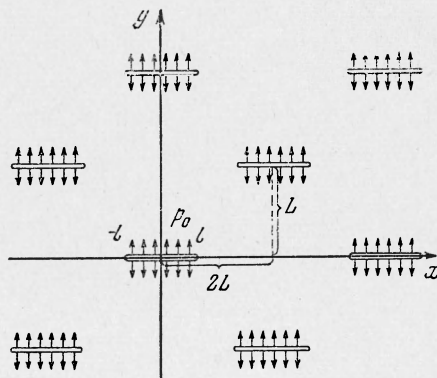
ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ВЗАИМНОГО УПРОЧЕНИЯ ТРЕЩИН ПРИ ИХ ШАХМАТНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ

В. З. Партон (Москва)

Реальные материалы содержат большое число микродефектов различного рода, развитие которых под действием приложенного поля напряжений приводит к появлению системы трещин. Характер взаимного влияния трещин в такой системе может быть весьма разнообразен; его исследование представляет значительный интерес. Я. Б. Зельдович обратил внимание на то, что при шахматном расположении трещин (упругая плоскость, ослабленная двоякопериодической системой трещин одинаковой длины) в определенных условиях должно наблюдаться их взаимное упрочнение.

В предлагаемой работе этот вопрос исследуется на основе численного решения задачи теории упругости в приближенной постановке; получено подтверждение справедливости этого предположения.

1. Рассмотрим двоякопериодическую систему трещин, длина каждой из которых $2L$. Пусть ω_1, ω_2 — основные периоды, D — область, занятая телом, $M_{kk'}$ — контур трещины с центром в точке $P = k\omega_1 + k'\omega_2$ ($k, k' = 0, \pm 1, \pm \dots$) (фиг. 1). Решетка симметрична относительно осей x и y , а каждая из трещин подвержена однородному растягивающему напряжению p_0 .



Фиг. 1

Решетка симметрична относительно осей x и y , а каждая из трещин подвержена однородному растягивающему напряжению p_0 .

Согласно [1], указанную задачу можно свести к разысканию двух регулярных в D функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, удовлетворяющих следующему граничному условию:

$$\overline{\Phi(\tau)} + \Phi(\tau) + \bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau) = -p_0$$

Построим приближенное решение этой задачи. Рассмотрим одиночную прямолинейную щель в бесконечной пластине, край которой подвержен равномерному давлению p_0 . В этом случае [1]

$$\Phi(z) = \Phi'(z) = \frac{p_0 l^2}{2 \sqrt{z^2 - l^2} (z + \sqrt{z^2 - l^2})}, \quad \Psi(z) = \psi'(z) = \frac{p_0 l^2 z}{2 (z^2 - l^2)^{3/2}} \quad (1)$$

а компоненты тензора напряжений

$$\frac{X_x}{4p_0 l^2} = \left\{ \left[\chi + 4r^2 \chi^{1/2} + 4r \chi^{3/4} \cos \left(\varphi - \frac{\alpha}{2} \right) \right] \left[1 + \left(\frac{\chi^{1/4} \sin \alpha + 2r \sin(\varphi + 1/2\alpha)}{\chi^{1/4} \cos \alpha + 2r \cos(\varphi + 1/2\alpha)} \right)^2 \right]^{-1/2} - 2r \chi^{-3/4} \sin \varphi \sin \frac{3\alpha}{2} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{Y_y}{4p_0 l^2} = \left\{ \left[\chi + 4r^2 \chi^{1/2} + 4r \chi^{3/4} \cos \left(\varphi - \frac{\alpha}{2} \right) \right] \left[1 + \left(\frac{\chi^{1/4} \sin \alpha + 2r \sin(\varphi + 1/2\alpha)}{\chi^{1/4} \cos \alpha + 2r \cos(\varphi + 1/2\alpha)} \right)^2 \right]^{-1/2} + 2r \chi^{-3/4} \sin \varphi \sin \frac{3\alpha}{2} \right\} \quad (3)$$

Здесь

$$\chi = 16 (r^2 - 2r^2 l^2 \cos 2\varphi + l^4), \quad \alpha = \arctg \frac{r^2 \sin 2\varphi}{r^2 \cos 2\varphi - l^2}$$

Легко видеть, что при $|z| \rightarrow \infty$ выражения (1) имеют следующие асимптотические представления:

$$\Phi(z) = \frac{p_0 l^2}{4z^2}, \quad \Psi(z) = \frac{p_0 l^2}{2z^2}$$

На фиг. 2, $a - e$ приведены зависимости напряжений, рассчитанных на единицу приложенной нагрузки, от расстояния r для данного направления φ . Пунктирная линия представляет собой асимптотическое значение. Легко видеть, что истинное значение напряжения в данной точке достаточно хорошо аппроксимируется асимптотическим по любому направлению уже для точек, отстоящих от трещины на расстоянии порядка ее длины¹.

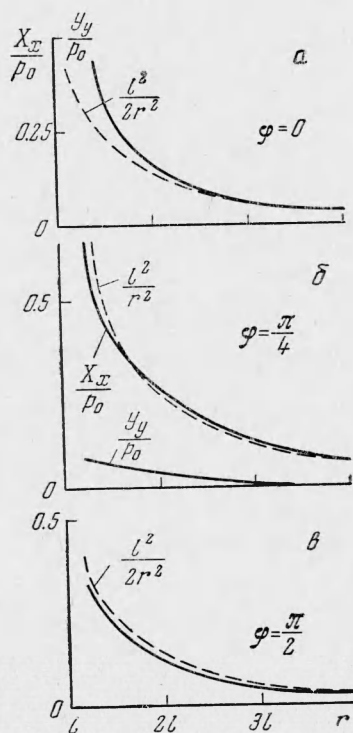
Таким образом, появляется возможность исходную задачу свести к следующей. Одна из трещин с центром в начале координат, край которой подвержен однородному растягивающему напряжению p_0 , находится в бесконечном теле, в котором действует система диполей с центрами в точках $P = k\omega_1 + k'\omega_2$ ($k, k' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Так как одиночная трещина расположена вдоль действительной оси, то определение суммарного напряжения связано только с функцией $\Phi(z) = c/z^2$ (значение константы $c = 1/4 p_0 l^2$ обеспечивает нужное убывание напряжений на бесконечности в этой задаче).

Для поля с прямоугольником периодов $\beta = k\omega_1 + k'\omega_2 i$, в каждой точке которого задана функция напряжения c/z^2 , определение суммарной функции напряжения приводит к эллиптической функции Вейерштрасса

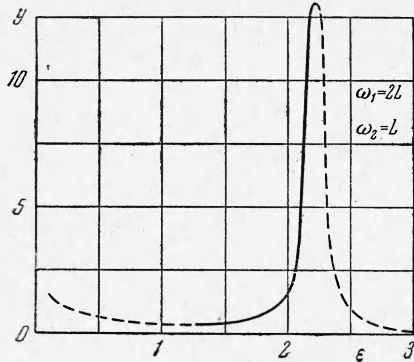
$$\wp(z) = \frac{c}{z^2} + c \sum'_{k, k'} \left[\frac{1}{(z - \beta)^2} - \frac{1}{\beta^2} \right] \quad (4)$$

где Σ' означает суммирование по всем индексам, кроме $k = k' = 0$ одновременно.

¹ Асимптотические выражения в случае «далеко» и «близко» расположенных рядов параллельных трещин приведены в работе В. Т. Койтера [2]



Фиг. 2



Фиг. 3

$$Y_y = 4c \sum_{k>0} \sum_{k'>0} \left\{ \frac{(x - k\omega_1)^2 - k'^2\omega_2^2}{[(x - k\omega_1)^2 + k'^2\omega_2^2]^2} + \frac{(x + k\omega_1)^2 - k'^2\omega_2^2}{[(x + k\omega_1)^2 + k'^2\omega_2^2]^2} - \frac{2(k^2\omega_1^2 - k'^2\omega_2^2)}{(k^2\omega_1^2 + k'^2\omega_2^2)^2} \right\} \quad (6)$$

Полудлина l изолированной симметричной подвижно-равновесной трещины определяется из уравнения (см. [3])

$$\int_0^l \frac{p(x) dx}{\sqrt{l^2 - x^2}} = \frac{K}{\sqrt{2l}} \quad (7)$$

Здесь K — модуль сцепления [3], $p(x)$ — распределение нормальных напряжений в теле без трещины под действием тех же нагрузок.

В рассматриваемом случае

$$p(x) = p_0 + Y_y \quad (8)$$

а величина Y_y определяется равенством (6).

Подставляя (8) в (7) и интегрируя, предварительно поменяв местами знаки суммирования и интегрирования, получаем в безразмерных параметрах

$$\left\{ \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{2k}{(4k^2 - \varepsilon^2)^{3/2}} - \frac{1}{4k^2} \right] + \sum_{k'=2}^{\infty} \left[\frac{1}{k'^2} - \frac{k'}{(\varepsilon^2 + k'^2)^{3/2}} \right] + 4\varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k'=1}^{\infty} \left[\frac{kA^2S + kAST + kk'^2(A+B)T - 48k^3k'^2A}{A^3S\sqrt{A-B+8k^2}} - \frac{4k^2 - k'^2}{2\sqrt{2}(4k^2 + k'^2)^2} \right] \right\} \pi \sqrt{\varepsilon} = \frac{1}{y} \quad (9)$$

$$(B = k^2 + 4k^2 + \varepsilon^2, \quad A = \sqrt{B^2 - 16k^2\varepsilon^2}, \quad \varepsilon = l/L, \quad y = p_0 \sqrt{L/K})$$

Суммирование в одинарных суммах проводится только по k и k' четным, а в двойной — по всем k и k' , но так, чтобы сумма этих индексов была четной.

Здесь для определенности положено $\omega_1 = 2L$, $\omega_2 = L$. Для получения решения с произвольными длинами сторон прямоугольника периодов в (9) под знаками сумм нужна замена k на $k\omega_1/2L$, k' на $k'\omega_2/L$.

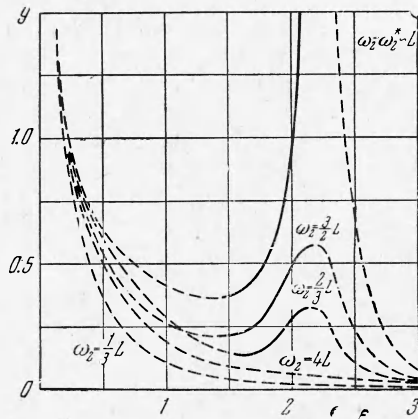
Исключая точку начала координат, получаем выражение функции напряжения для поля вне трещины

$$F(z) = \wp(z) - \frac{c}{z^2} = c \sum_{k, k'}' \left[\frac{1}{(z - \beta)^2} - \frac{1}{\beta^2} \right] \quad (5)$$

Вдоль действительной оси x имеем

$$X_x = Y_y = 2 \operatorname{Re} F(z)$$

$$F(z) = \wp(z) - \frac{c}{z^2} = c \sum_{k, k'}' \left[\frac{1}{(x - \beta)^2} - \frac{1}{\beta^2} \right] =$$



Фиг. 4

Зависимость (9) для $y = y(\epsilon)$ представлена на фиг.3, когда $\omega_1 = 2L$, $\omega_3 = L$, а на фиг. 4 даны зависимости для различных периодов ω_2 ($\omega_1 = 2L$ — фиксировано). Эти графики позволяют сделать некоторые выводы.

Трещина устойчива, если напряжение p_0 , необходимое для ее поддержания в подвижно-равновесном состоянии, возрастает с увеличением длины трещины $2l$. Как видно, существует некоторое оптимальное значение ω_2^* (при фиксированном ω_1) стороны прямоугольника периодов, при котором напряжение, необходимое для поддержания трещины в подвижно-равновесном состоянии, достигает максимального значения. При этом длина устойчивого участка кривой оказывается гораздо больше, чем в случае трещины, подкрепленной приклепанными ребрами жесткости, препятствующими ее распространению [4]. Уменьшение или увеличение ω_2 , по сравнению с ω_2^* , ведет к уменьшению максимального значения напряжения до того момента, пока ω_2 не становится равным некоторым критическим значениям ω_{21} ($\omega_{21} < \omega_2^*$) и ω_{22} ($\omega_{22} > \omega_2^*$). При $\omega_2 > \omega_{22}$ и $\omega_2 < \omega_{21}$ кривая участков возрастания не имеет.

Таким образом, развитие одной из трещин начальной длины $2l_0$, находящейся в поле трещин таких же длин, при возрастании p_0 может происходить по одному из вариантов (фиг. 5).

Если кривая, соответствующая данному ω_2 , не имеет устойчивого участка ($\omega_{22} < \omega_2 < \omega_{21}$), то с увеличением нагрузки p_0 размер трещины $2l_0$ не меняется, пока трещина не становится подвижно-равновесной. После достижения соответствующей нагрузки трещина начинает катастрофически расширяться и тело разрушается. Развитие трещины для этого случая представлено линией 1 на фиг. 5. Если кривая имеет устойчивый участок ($\omega_{21} < \omega_2 < \omega_{22}$), то при $l_0 < l_1$ и $l_0 > l_3$ развитие начальной трещины происходит так же, как в первом случае (линии 2,3 на фиг. 5). Если $l_1 < l_0 < l_2$, то размер трещины не меняется, пока трещина не становится подвижно-равновесной. Как только трещина становится подвижно-равновесной, при малейшем превышении равновесной нагрузки трещина скачком переходит в другое, устойчивое подвижно-равновесное состояние, соответствующее той же нагрузке, после чего устойчиво развивается с ростом нагрузки p_0 до достижения нагрузки p_{0max} . После достижения этого значения трещина начинает катастрофически расширяться и тело разрушается. Развитие трещины в этом случае представлено линией 4. При $l_2 < l_0 < l_3$ размер трещины не меняется, пока трещина не становится подвижно-равновесной, затем с увеличением нагрузки трещина устойчиво развивается, пока нагрузка не достигнет p_{0max} , после чего тело разрушается (линия 5). Таким образом, определенное взаимное расположение трещин приводит к стабилизации трещин.

Деформация бесконечной пластины с трещиной и особенностями, расположенными в шахматном порядке, может быть описана при помощи следующей дислокационной модели. Трещина представляет собой систему краевых дислокаций противоположных знаков, в простейшем случае — с вектором Бюргерса, направленным по ее длине, или пар дислокаций противоположных знаков. Особенности могут быть представлены как решетка вакансий или диполей дислокаций, так как каждая особенность считается нейтральной. Неподвижные вакансии влияют на распространение дислокации-трещины. Полученный результат показывает, что при определенной плотности и соответствующем расположении вакансий материал упрочняется.

Автор благодарит Г. И. Баренблатта за руководство и помощь.

Поступила 11 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. 4-е. Изд-во АН СССР, 1954.
2. К о й т е р В. Т. Бесконечный ряд параллельных трещин в неограниченной упругой пластине. Сб. «Проблемы механики сплошной среды», Изд-во АН СССР, 1951.
3. Б а р е н б л а т т Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.
4. М о р о з о в а Е. А., П а р т о н В. З. О влиянии подкрепляющих ребер на распространение трещин. ПМТФ, 1961, № 5.