

УДК 532.51.013.4:536.24

КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ МАРАНГОНИ — ПУАЗЕЙЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОДОЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ

В. Б. Бекежанова

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск
E-mail: bekezhanova@mail.ru

Получено точное решение задачи о стационарном течении в системе двух горизонтальных слоев несмешивающихся жидкостей с общей границей раздела. Методом линеаризации исследуется устойчивость данного течения. Показано, что появление неустойчивостей обусловлено различием определяющих параметров жидкостей (толщины слоя, условий подогрева, вязких и теплопроводных свойств жидкостей). Установлено, что в условиях постоянной силы гравитации возмущения монотонны, а в условиях невесомости имеет место колебательная термокапиллярная неустойчивость.

Ключевые слова: неустойчивость, поверхность раздела, уравнения Обербека — Буссинеска.

Введение. Интерес к задачам о совместном движении двух и более жидких сред, контактирующих вдоль некоторой поверхности, и их устойчивости обусловлен возможностью использования их в технических приложениях. На возникновение и характер конвективных течений в таких системах оказывают влияние различные факторы. В зависимости от размеров системы, соотношений параметров контактирующих сред может преобладать как свободноконвективный механизм, так и термокапиллярный (см. работы [1–3] и библиографию к ним). В условиях постоянной силы гравитации термокапиллярное движение, как правило, подавляется гравитационной конвекцией. Однако в случаях микротечений жидкостей важную роль играет эффект Марангони. В условиях пониженной гравитации (на борту космической станции) термокапиллярная конвекция является одной из основных форм движения жидкости. При решении прикладных задач важно знать, какой из механизмов возбуждения конвекции является преобладающим и какое влияние он оказывает на характеристики конвективных движений, возникающих при совместном действии сил гравитации и сил Марангони. В этом случае возрастает влияние таких факторов, как магнитное поле, вибрации, вращение, сложная геометрия системы и др.

Впервые задача о двухслойном течении жидкости при совместном действии сил гравитации, градиентов давления и поверхностного натяжения рассматривалась в работе [4]. Построены точные решения для различных тепловых условий на твердых стенках, ограничивающих систему, в которой возможно стационарное течение с прямолинейными траекториями; характеристики полученных решений подробно изучены в [4]. В работе [5] построено точное решение уравнений свободной конвекции в плоском горизонтальном слое, которое может быть использовано при описании течений в горизонтальных слоях с твердыми стенками, со свободными границами и многофазных течений при наличии поверхно-

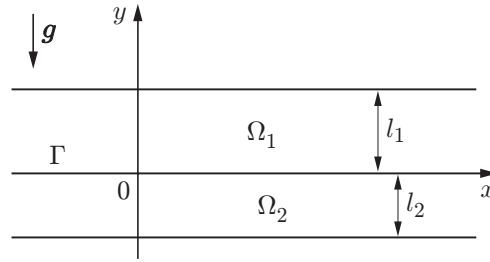


Рис. 1. Схема течения

стей раздела (см., например, [6]). Исследованию задач об устойчивости течений жидкости в однослойных системах в различных постановках посвящены работы [7–11]. В [12] рассмотрены различные конвективные течения несжимаемой жидкости, изучено влияние продольного градиента температуры на характеристики устойчивости. В большинстве работ, посвященных исследованию конвекции в двухслойных системах (см., например, [13–15]), изучается устойчивость равновесного состояния. Устойчивость течения Куэтта двухслойной идеальной жидкости со свободной границей исследовалась в [16].

В данной работе изучается устойчивость плоского стационарного течения двух несмешивающихся несжимаемых вязких теплопроводных жидкостей с общей границей раздела. При этом считается, что на внешних границах системы, которыми являются твердые стенки, задана температура, линейно зависящая от продольной координаты. В предположении о линейной зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры численно решена спектральная задача относительно комплексного декремента, определяющего изменение возмущений во времени. Установлено, что в поле силы тяжести имеются только монотонные возмущения, нарастающие в условиях, когда температура верхней стенки канала выше температуры нижней стенки, и затухающие, когда выше температуры нижней стенки. Кроме того, на устойчивость оказывает влияние изменение толщины слоев. При малых линейных размерах верхнего слоя система дестабилизируется. Проведено сравнение с решением аналогичной задачи в отсутствие массовых сил ($\mathbf{g} = 0$); показано, что в условиях невесомости возмущения имеют колебательный характер.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему двух несмешивающихся несжимаемых вязких теплопроводных жидкостей (рис. 1), заполняющих области $\Omega_1 = \{-\infty < x < \infty, 0 < y < l_1\}$ и $\Omega_2 = \{-\infty < x < \infty, -l_2 < y < 0\}$ (l_1, l_2 — толщины слоев жидкостей). Далее величины с индексом 1 соответствуют верхнему слою жидкости, величины с индексом 2 — нижнему слою. Граница раздела жидкостей $\Gamma = \{-\infty < x < \infty, y = 0\}$ предполагается плоской недеформируемой. Будем считать, что на границе раздела коэффициент поверхностного натяжения линейно зависит от температуры: $\sigma = \sigma_0 - \varkappa\theta$ (температурный коэффициент поверхностного натяжения \varkappa и σ_0 — положительные постоянные). Внешними границами являются неподвижные параллельные твердые стенки.

В предположении, что плотности ρ_j ($\rho_1 < \rho_2$), кинематические вязкости ν_j , температурные коэффициенты объемного расширения β_j , температуропроводности χ_j и теплопроводности k_j ($j = 1, 2$) постоянны и положительны, запишем уравнения движения жидкостей в приближении Обербека — Буссинеска для стационарных течений [17]:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_j \nabla) \mathbf{u}_j &= -\rho_j^{-1} \nabla p_j + \nu_j \Delta \mathbf{u}_j - \beta_j \theta_j \mathbf{g}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_j &= 0, \\ (\mathbf{u}_j \nabla) \theta_j &= \chi_j \Delta \theta_j \end{aligned} \quad (1.1)$$

при $|x| < \infty$, $0 < y < l_1$ в случае $j = 1$; $-l_2 < y < 0$ в случае $j = 2$. В (1.1) $\mathbf{u}_j = (u_j, v_j)$ —

вектор скорости; p_j — отклонение давления от гидростатического; θ_j — температура в j -м слое жидкости; $\mathbf{g} = (0, -g)$; g — ускорение свободного падения.

Условия на границе раздела Γ принимают вид [3]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \theta_1 = \theta_2, \\ k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \mathbf{n}} = k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{n}}, \quad (P_2 - P_1)\mathbf{n} = \nabla_{11}\sigma, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где \mathbf{u} — значения вектора скорости для обеих жидкостей; \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности раздела Γ , направленный из области Ω_2 в область Ω_1 ; P_j — тензоры напряжений в жидкостях; $\nabla_{11} = \nabla - (\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n}$ — поверхностный градиент.

На твердых стенках выполнены следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(x, l_1) = 0, \quad \theta_1(x, l_1) = T_1x + \theta_{10}, \\ \mathbf{u}_2(x, -l_2) = 0, \quad \theta_2(x, -l_2) = T_2x + \theta_{20}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В качестве дополнительного условия примем условие нулевого суммарного расхода жидкостей:

$$\int_{-l_2}^0 u_2(y) dy + \int_0^{l_1} u_1(y) dy = 0. \quad (1.4)$$

В результате получаем решение, описывающее конвекцию двухслойной жидкости при условии $x \gg l_j$. В общем случае может быть задан ненулевой суммарный расход q либо расход в одном из слоев q_j , по величине которого из динамического условия на поверхности раздела определяется расход в другом слое.

2. Точное решение. Перейдем к безразмерным переменным. Для этого в качестве единиц длины, скорости, давления и температуры выберем величины l_2 , ν_2/l_2 , $\rho_2\nu_2^2/l_2^2$, θ_{20} . Параметры задачи обезразмериваются с помощью следующих характерных величин: кинематической вязкости ν_2 , температуропроводности χ_2 , температурного коэффициента объемного расширения β_2 , теплопроводности k_2 , плотности ρ_2 . Тогда

$$\begin{aligned} \nu = \frac{\nu_1}{\nu_2}, \quad \chi = \frac{\chi_1}{\chi_2}, \quad \beta = \frac{\beta_1}{\beta_2}, \quad k = \frac{k_1}{k_2}, \quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad l = \frac{l_1}{l_2}, \quad \theta = \frac{\theta_{10}}{\theta_{20}}, \\ \xi = \frac{x}{l_2}, \quad \eta = \frac{y}{l_2}, \quad \psi_j = \frac{f_j(y)}{\theta_{20}}. \end{aligned}$$

Согласно [4] в задаче о движении двухслойной жидкости (1.1)–(1.3) реализуется течение типа Пуазейлевского, поэтому решение в безразмерных переменных будем искать в виде [5]

$$u_j = u_j(\eta), \quad v_j = 0, \quad p_j = p_j(\xi, \eta), \quad \theta_j = \theta_j(\xi, \eta) = Q_j\xi + \psi_j(\eta). \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в (1.1)–(1.3), получаем $Q_1 = Q_2 \equiv Q = Tl_2/\theta_{20}$ (это условие эквивалентно равенству $T_1 = T_2 \equiv T$), следовательно,

$$\theta_j = Q\xi + \psi_j(\eta).$$

Функции скорости u_j ($j = 1, 2$) и выражения для давления в слоях имеют вид

$$\begin{aligned} u_j = c_{j1} + c_{j2}\eta + c_{j3}\eta^2 + c_{j4}\eta^3, \\ p_1 = \rho\beta \text{Gr} \left(Q\xi\eta + \int_0^\eta \psi_1(\eta) d\eta \right) + c_{10}\rho\xi, \quad p_2 = \text{Gr} \left(Q\xi\eta + \int_0^\eta \psi_2(\eta) d\eta \right) + c_{20}\xi. \end{aligned}$$

Здесь $\text{Gr} = g\beta_2\theta_{20}l_2^3/\nu_2^2$ — число Грасгофа; функции ψ_j определяются из уравнений

$$\psi_1'' = Q \text{Pr} u_1/\chi, \quad \psi_2'' = Q \text{Pr} u_2$$

и равны

$$\psi_1 = (Q \text{Pr} / \chi)(c_{11}\eta^2/2 + c_{12}\eta^3/6 + c_{13}\eta^4/12 + c_{14}\eta^5/20 + c_{15}\eta + c_{16}),$$

$$\psi_2 = Q \text{Pr}(c_{21}\eta^2/2 + c_{22}\eta^3/6 + c_{23}\eta^4/12 + c_{24}\eta^5/20 + c_{25}\eta + c_{26}),$$

c_{ji} ($i = 0, \dots, 6$) — постоянные интегрирования, которые находятся из граничных условий, условия замкнутости потока (1.4) и дополнительных соотношений

$$\nu u_1'' - \beta \text{Gr} Q \eta - c_{10} = 0, \quad u_2'' - \text{Gr} Q \eta - c_{20} = 0.$$

Приведем формулы для постоянных c_{ji} :

$$c_{10} = \left(\text{Ma} (l - 0,5) - \text{Gr} Q \frac{4l - 3 + \beta l^4}{24} - D_2 \right) \frac{1}{B_1}, \quad c_{20} = \rho c_{10},$$

$$c_{11} = c_{21} = \frac{\nu\rho}{l + \nu\rho} \left[\text{Ma} - \text{Gr} Q \left(\frac{1}{6} + \frac{\beta l^3}{6\nu} \right) \right] - \text{Ma} + \frac{\text{Gr} Q}{6} + \left(\frac{\rho\nu - l^2}{2\nu} \frac{\nu\rho}{l + \nu\rho} - \frac{\rho}{2} \right) c_{10},$$

$$c_{12} = \frac{1}{l + \nu\rho} \left[\text{Ma} - \text{Gr} Q \left(\frac{1}{6} + \frac{\beta l^3}{6\nu} \right) + \frac{\rho\nu - l^2}{2\nu} c_{10} \right],$$

$$c_{22} = \nu\rho c_{12} - \text{Ma}, \quad c_{13} = \frac{c_{10}}{2\nu}, \quad c_{23} = \frac{c_{10}\rho}{2}, \quad c_{14} = \frac{\beta \text{Gr} Q}{6\nu}, \quad c_{24} = \frac{\text{Gr} Q}{6},$$

$$c_{15} = \frac{\chi}{k} \left(\frac{k(\theta - 1)}{Q \text{Pr} (1 + k)} - d_1 - kd_2 \right), \quad c_{25} = \frac{k(\theta - 1)}{Q \text{Pr} (1 + k)} - d_1 - kd_2,$$

$$c_{16} = \chi \left(\frac{1 + k\theta}{Q \text{Pr} (1 + k)} - d_1 + d_2 \right), \quad c_{26} = \frac{1 + k\theta}{Q \text{Pr} (1 + k)} - d_1 + d_2.$$

Здесь

$$D_2 = \frac{2\nu\rho(l - 1) + l^2 + \nu\rho}{2(l + \nu\rho)} D_1, \quad D_1 = \text{Ma} - \text{Gr} Q \left(\frac{1}{6} + \frac{\beta l^3}{6\nu} \right),$$

$$B_1 = \frac{6\nu\rho l(1 - l^2) + 3(\nu^2\rho^2 - l^4) + 2(l^3 - \nu\rho)(l + \nu\rho)}{12\nu(l + \nu\rho)},$$

$$d_1 = \frac{k}{60\chi(1 + k)} (30l^2c_{11} + 10l^3c_{12} + 5l^4c_{13} + 3l^5c_{14}),$$

$$d_2 = \frac{1}{60(1 + k)} (-30c_{21} + 10c_{22} - 5c_{23} + 3c_{24}),$$

$\text{Pr} = \nu_2/\chi_2$ — число Прандтля; $\text{Ma} = \varkappa T l_2^2/(\nu_2^2\rho_2)$ — число Марангони, определенное таким образом, что его положительное значение соответствует случаю, когда направление продольного градиента температуры совпадает с направлением течения.

Таким образом, определены функции скорости u_j , давления p_j и температуры θ_j , описывающие стационарное течение жидкости в слоях при ненулевом продольном градиенте температуры. В случае если $T = 0$, для определения полей скорости достаточно в приведенные выше формулы для постоянных c_{ji} ($i = 0, \dots, 4$) подставить $Q = 0$. Тогда функции ψ_j принимают вид

$$\psi_1 = \frac{\theta - 1}{l + k} \eta + \frac{\theta k + l}{l + k}, \quad \psi_2 = \frac{\theta - 1}{l + k} k\eta + \frac{\theta k + l}{l + k},$$

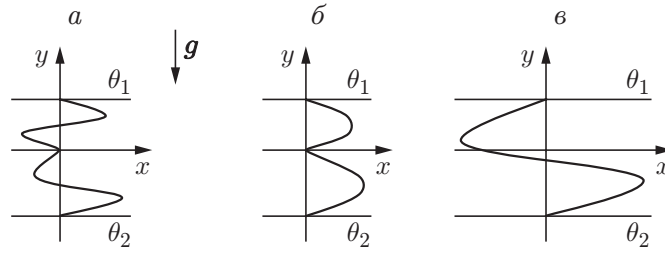


Рис. 2. Распределение скорости:

1 — термокапиллярный профиль, 2 — пуазейлевский профиль, 3 — смешанный профиль

а давление в слоях определяется по формулам

$$p_1 = \rho\beta \text{Gr} \left(\frac{\theta - 1}{l+k} \frac{\eta^2}{2} + \frac{\theta k + l}{l+k} \eta \right) + c_{10}\rho\xi, \quad p_2 = \text{Gr} \left(\frac{(\theta - 1)k}{l+k} \frac{\eta^2}{2} + \frac{\theta k + l}{l+k} \eta \right) + c_{20}\xi.$$

Следует отметить, что при $T = 0$ (отсутствует термокапиллярный эффект) полученное решение не является решением типа решения Бирixa.

В каждом слое на произвольный объем жидкости действуют постоянный градиент давления, сила тяжести и градиент поверхностного натяжения. В работе [4] предложена классификация типов течения в зависимости от того, какие силы являются преобладающими: 1) чисто термокапиллярный; 2) пуазейлевский; 3) смешанный (рис. 2).

3. Анализ устойчивости течения. Рассмотрим нормальные возмущения стационарных течений вида (2.1), пропорциональные $\exp[i(\mu\xi - C\tau)]$ (μ — волновое число вдоль оси x ; C — декремент; τ — безразмерное время). Из системы (1.1)–(1.3) для амплитуд нормальных возмущений получаем краевую задачу

$$\begin{aligned} -iCU_1 + i\mu u_1 U_1 + u_1' V_1 + i\mu P_1/\rho &= \nu(-\mu^2 U_1 + U_1''), \\ -iCV_1 + i\mu u_1 V_1 + P_1'/\rho &= \nu(-\mu^2 V_1 + V_1'') + \text{Gr} \beta T_1, \\ -iCT_1 + i\mu u_1 T_1 + U_1 \theta_{1\xi} + V_1 \theta_1' &= \chi \text{Pr}(-\mu^2 T_1 + T_1''), \\ i\mu U_1 + V_1' &= 0, \quad i\mu U_2 + V_2' = 0, \\ -iCU_2 + i\mu u_2 U_2 + u_2' V_2 + i\mu P_2 &= -\mu^2 U_2 + U_2'', \\ -iCV_2 + i\mu u_2 V_2 + P_2' &= -\mu^2 V_2 + V_2'' + \text{Gr} T_2, \\ -iCT_2 + i\mu u_2 T_2 + U_2 \theta_{2\xi} + V_2 \theta_2' &= \text{Pr}(-\mu^2 T_2 + T_2''), \\ \eta = -1: \quad U_2 = V_2 = T_2 &= 0, \\ \eta = l: \quad U_1 = V_1 = T_1 &= 0, \\ \eta = 0: \quad U_1 - u_1' R = U_2 - u_2' R, \quad V_1 = V_2, \\ -iCR + i\mu u R = V, \quad T_1 - \theta_1' R &= T_2 - \theta_2' R, \\ k(T_1' - \theta_1'' R + i\mu \theta_{1\xi} R) &= T_2' - \theta_2'' R + i\mu \theta_{2\xi} R, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 + 2(V_2' + i\mu u_2' R) - 2\rho\nu(V_1' + i\mu u_1' R) &= \\ &= (p_1' - p_2')R + (\rho - 1)R \text{Ga} - \mu^2(\text{We} - \text{Ma} \theta/Q)R, \end{aligned}$$

$$U_2' + i\mu V_2 - u_2'' R - \rho\nu(U_1' + i\mu V_1 - u_1'' R) = \text{Ma}(i\mu T - i\mu \theta' R)/Q.$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по координате η ; R — локальное отклонение поверхности раздела от ее невозмущенного состояния в направлении нормали [3];

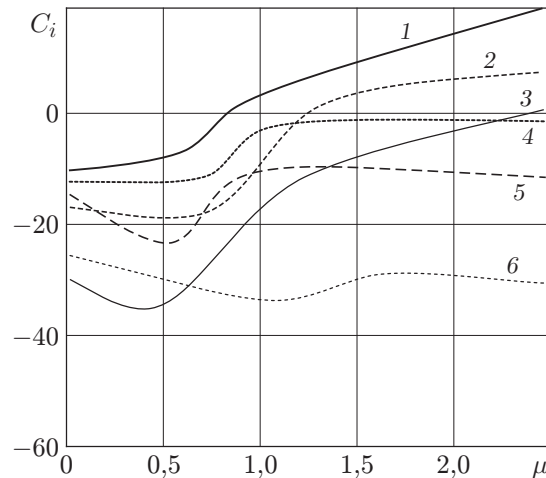


Рис. 3. Мнимые части комплексного декремента $C_i(\mu)$ при $\theta > 1$ (1–3) и $\theta < 1$ (4–6):
1, 4 — $Ma = 10$; 2, 5 — $Ma = -10$; 3, 6 — $Ma = 0$

$Ga = gl_2^3/\nu_2^2$ — число Галилея; $We = \sigma_0 l_2 / (\rho_2 \nu_2^2)$ — число Вебера. Собственными числами полученной спектральной задачи являются декременты C как функции волнового числа μ и параметров задачи. В общем случае $C = C_r + iC_i$ есть комплексное число, определяющее развитие возмущений со временем. В рассматриваемой задаче возмущение представляет собой волну, осциллирующую с частотой C_r , затухающую при $C_i < 0$ или нарастающую при $C_i > 0$.

В полной постановке для системы жидкостей муравьиная кислота — трансформаторное масло задача решалась методом ортогонализации [18] при следующих значениях параметров: $\rho = 0,74$, $\nu = 15,41$, $\beta = 0,67$, $\chi = 0,71$, $k = 0,41$, $Pr = 14,2$. На рис. 3–5 приведены зависимости мнимых частей от волнового числа $C_i(\mu)$.

В случае геометрически симметричной системы, когда толщины слоев равны ($l = 1$), изучалось влияние условий нагрева стенок канала на устойчивость течения (см. рис. 3). Если температура верхней стенки выше температуры нижней стенки ($\theta > 1$), то течение неустойчиво (кривые 1–3). При этом необходимо учитывать направление продольного градиента температуры. Если стенки охлаждаются в направлении течения ($Ma < 0$), то область неустойчивости смещается в область больших значений волнового числа (кривая 2). В отсутствие продольного градиента ($Ma = 0$) влияние возмущений наименее существенно (кривая 3). В условиях, когда нагрев происходит со стороны нижней стенки ($\theta < 1$), течение устойчиво (кривые 4–6). При возмущениях температуры вблизи поверхности раздела имеют место как приток холодной жидкости сверху, так и приток горячей жидкости снизу одинаковой интенсивности, обусловленные термокапиллярным эффектом. За счет различия температуропроводностей поднимающаяся горячая жидкость охлаждается быстрее, чем нагревается опускающаяся холодная жидкость, что и приводит к затуханию возмущений при нагреве снизу. Независимо от условий нагрева стенок все возмущения монотонны, если $g \neq 0$.

В условиях невесомости ($g = 0$) для больших чисел Марангони при нагреве сверху неустойчивость имеет иной характер (см. рис. 4). Видны попарные слияния уровней с порождением колебательных возмущений. Образующиеся в результате слияний колебательные возмущения распространяются в потоке в виде волн, затухающих или нарастающих в зависимости от знака C_i . Наименьший порог устойчивости соответствует значению $Ma = 517$. Следовательно, наличие силы тяжести приводит к подавлению колебаний.

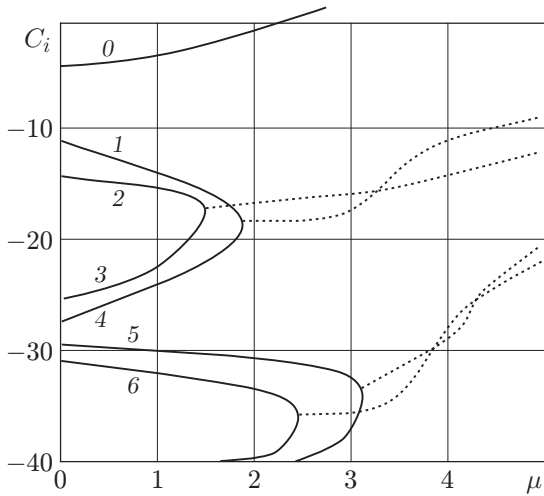


Рис. 4

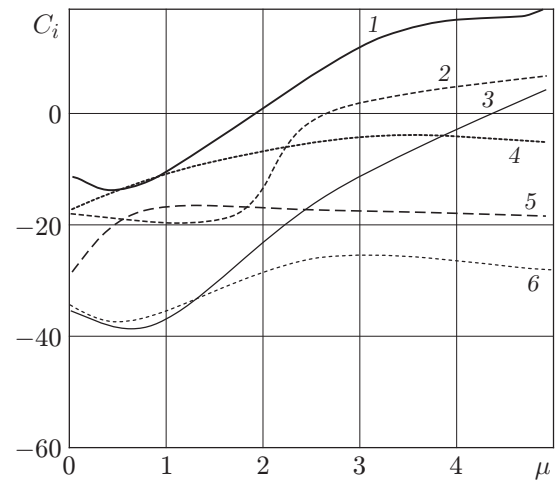


Рис. 5

Рис. 4. Мнимые части комплексного декремента $C_i(\mu)$ при $g = 0$, $Ma = 1000$:
0–6 — нижние уровни спектра

Рис. 5. Мнимые части комплексного декремента $C_i(\mu)$ при $l > 1$ (1–3) и $l < 1$ (4–6):
1, 4 — $Ma = 10$; 2, 5 — $Ma = -10$; 3, 6 — $Ma = 0$

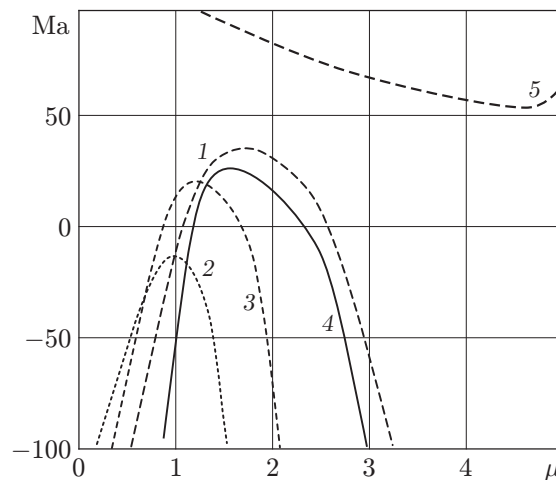


Рис. 6. Нейтральные кривые $Ma(\mu)$:

1 — $g = 0$, $Pr = 0,5$; 2–4 — $g \neq 0$ (2 — $Pr = 0,5$; 3 — $Pr = 5$; 4 — $Pr = 10$); 5 — $g = 0$,
 $Pr = 0,5$ (колебательные возмущения в условиях невесомости)

При равной температуре стенок канала ($\theta = 1$) на устойчивость оказывает влияние изменение толщины слоев. На рис. 5 видно, что в случае, когда толщина нижнего слоя больше толщины верхнего слоя, течение является неустойчивым (кривые 1–3) и область устойчивости определяется направлением продольного градиента температуры. Так же как и в случае симметричной системы, наименее существенное влияние оказывают возмущения в отсутствие продольного градиента температуры.

В случае симметричной системы слоев ($l = 1$) исследовано влияние тепловых и вязких свойств жидкостей. На рис. 6 приведены нейтральные кривые, построенные при различных значениях числа Прандтля. (Для кривых 2–4 значения Ma уменьшены в 10 раз, для кривой 5 — увеличены в 10 раз.) Кривые 1–4 соответствуют положению границ обла-

стей устойчивости относительно монотонных возмущений. Области неустойчивости расположены ниже кривых 1–4. Кривая 5 — нейтральная кривая колебательных возмущений в условиях невесомости. Таким образом, тип неустойчивости определяется массовыми силами (наличием или отсутствием силы тяжести). При малых значениях температуропроводности возмущения затухают медленнее. Кроме того, область неустойчивости определяется направлением продольного градиента температуры: дестабилизирующим фактором является охлаждение стенок канала в направлении течения.

Заключение. Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы. Неустойчивость двухслойного стационарного течения с недеформируемой поверхностью раздела в присутствии массовых сил обусловлена геометрической асимметрией системы или условиями нагрева стенок канала. В условиях невесомости выделены два типа неустойчивости: монотонная, имеющая место при малых числах Марангони, и колебательная, возникающая только в случае больших продольных градиентов температуры, когда температура верхней стенки канала выше температуры нижней стенки.

Автор выражает благодарность В. К. Андрееву за внимание к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зейтунян Р. Х.** Проблема термокапиллярной неустойчивости Бенара — Марангони // Успехи физ. наук. 1998. Т. 168, № 3. С. 259–286.
2. **Гершуни Г. З.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий. М.: Наука, 1972.
3. **Андреев В. К.** Термокапиллярная неустойчивость / В. К. Андреев, В. Е. Захватаев, Е. А. Рябицкий. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 2000.
4. **Napolitano L. G.** Plane Marangoni — Poiseuille flow of two immiscible fluids // Acta Astronaut. 1980. V. 7, N 4. P. 461–478.
5. **Бирих Р. В.** О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.
6. **Goncharova O. N., Kabov O. A.** Gas flow and thermocapillary effects on fluid flow dynamics in a horizontal layer // Microgravity Sci. Technol. 2009. V. 21, suppl. 1. P. S129–S137.
7. **Гончаренко Б. Н., Уринцев А. Л.** Об устойчивости движения жидкости, вызванного термокапиллярными силами // ПМТФ. 1971. № 6. С. 94–98.
8. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Мызников В. М.** Устойчивость плоскопараллельного течения жидкости в горизонтальном слое относительно пространственных возмущений // ПМТФ. 1974. № 5. С. 145–147.
9. **Smith M. K., Davis S. H.** Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers // J. Fluid Mech. 1983. V. 132. P. 119–162.
10. **Davis S. H.** Thermocapillary instabilities // Annu. Rev. Fluid Mech. 1987. V. 19. P. 403–435.
11. **Gershuni G. Z., Laure P., Myznikov V. M., et al.** On the stability of plane-parallel advective flow in long horizontal layers // Microgravity Quart. 1992. V. 2, N 3. P. 141–151.
12. **Гершуни Г. З.** Устойчивость конвективных течений / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, А. А. Непомнящий. М.: Наука, 1989.
13. **Лобов Н. И., Любимов Д. В., Любимова Т. П.** Конвективная неустойчивость системы горизонтальных слоев несмешивающихся жидкостей с деформируемой границей раздела // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1996. № 2. С. 32–39.
14. **Непомнящий А. А., Симановский И. Б.** Термокапиллярная конвекция в двухслойной системе // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1983. № 4. С. 158–163.

15. **Бирих Р. В., Бушуева С. В.** Термокапиллярная неустойчивость в двухслойной системе с деформируемой границей раздела // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2001. № 3. С. 13–20.
16. **Репин И. В.** Решение задачи об устойчивости течения Куэтта двухслойной идеальной жидкости // Тр. 3-й Междунар. конф. “Симметрия и дифференциальные уравнения”, Красноярск, 25–29 авг. 2002 г. Красноярск: Ин-т вычисл. моделирования СО РАН, 2002. С. 187–193.
17. **Джозеф Д.** Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981.
18. **Годунов С. К.** О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 3. С. 171–174.

Поступила в редакцию 17/XI 2009 г.
