

В. Н. Васюков, Д. В. Голешихин  
(Новосибирск)

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАЗМЫТЫХ  
ПОЛУТОНОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ  
НА ОСНОВЕ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ГИББСОВСКОЙ МОДЕЛИ\*

Предлагается метод восстановления изображений, подвергшихся линейному размытию и наблюдаемых в аддитивном гауссовском шуме. Изображение рассматривается как реализация гиббсовского случайного поля, описываемого гаусс-марковской авторегрессионной моделью. Повышение качества восстановления достигается за счет введения в гиббсовскую модель скрытого уровня, содержащего границы между областями со сравнительно медленно меняющимися яркостями. Приводятся результаты применения предложенного подхода для восстановления реального изображения.

**Введение.** Восстановление изображений остается одной из актуальных задач их предварительной обработки [1, 2]. Согласно [1] для восстановления искаженных изображений применяются главным образом линейные стационарные фильтры; из нелинейных алгоритмов упомянуты только медианный фильтр и алгоритмы ранговой обработки. Известными недостатками медианного фильтра являются его эвристический характер и связанные с этим трудности выбора параметров. Ранговые алгоритмы также строятся на основе эвристического подхода и, кроме того, подвержены влиянию флуктуационных шумов [1]. Построение линейных восстанавливающих алгоритмов обычно производится для изображения бесконечных размеров. На практике восстанавливаемое изображение всегда ограничено, что приводит к возникновению краевых эффектов, компенсация которых различными эвристическими методами [3] снижает четкость восстановленного изображения.

Один из эффективных подходов к обработке изображений основан на предположении, что наблюдаемое изображение представляет собой реализацию случайного поля, имеющего распределение Гиббса [4, 5]. В рамках этого подхода удается строить итерационные алгоритмы, позволяющие решать разнообразные задачи обработки изображений на основе критерия Байеса. В частности, в работе [6] был предложен алгоритм восстановления полутонových изображений, подвергшихся нелинейным искажениям, в [7] гиббсовский подход был применен для восстановления изображений, подвергшихся линейным неоднородным (нестационарным) искажениям, а также для сегментации бинарных текстурных изображений.

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке фонда «Научный потенциал».

Данная работа посвящена построению алгоритма восстановления изображений, описываемых авторегрессионной гаусс-марковской моделью, на основе иерархической гиббсовской модели, включающей, кроме идеального неискаженного изображения и наблюдаемого искаженного (размытого) изображения, поле линий, разделяющих области с приближенно-постоянной яркостью. Выделение этих линий (контуров) и их учет при компенсации размытия позволяют заметно повысить качество восстановления.

Иерархическая модель изображения. В работе [6] на основе предложенного гиббсовского описания полутонового (непрерывнозначного) изображения, формируемого авторегрессионным способом [8], разработан метод восстановления изображения, подвергнутого линейным и нелинейным искажениям. В работе [7] этот подход был успешно применен для восстановления полутоновых изображений в условиях неоднородных линейных искажений, наблюдаемых в аддитивном гауссовском шуме. Результаты этих исследований продемонстрировали хорошее качество восстановления как моделированных, так и реальных изображений при почти полном отсутствии краевых эффектов и других артефактов. Для дальнейшего повышения качества восстановления введем в гиббсовскую модель изображения ненаблюдаемый «контурный» уровень, содержащий поле линий [4, 5], разделяющих области, в пределах которых уровни яркости полутонового изображения остаются приближенно-постоянными. В дальнейшем изложении будем использовать обозначения, аналогичные применяемым в работе [6], где приведено подробное описание гиббсовского поля, формируемого авторегрессионной моделью, и основное внимание будет сосредоточено на особенностях, связанных с вводимым контурным уровнем.

Введем в рассмотрение двухкомпонентное случайное поле  $(\mathbf{X}, \mathbf{G})$ , состоящее из управляемого поля  $\mathbf{X}$ , описывающего изображение, и управляющего поля  $\mathbf{G}$ . Значение  $x(m, n)$  реализации поля  $\mathbf{X}$  в узле  $(m, n)$  решетки  $\mathbf{L} = \{(m, n) : 0 \leq m \leq M, 0 \leq n \leq N\}$  определяется выражением, аналогичным авторегрессионному уравнению, использованному в [6]:

$$x(m, n) = \sum_{(p, q) \in m, n(\mathbf{G})} a(m, n, p, q) x(m-p, n-q) + \epsilon(m, n), \quad (m, n) \in \mathbf{L}. \quad (1)$$

Здесь  $\epsilon(m, n)$  – двумерная последовательность независимых гауссовских случайных величин с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2(m, n)$ , зависящей от координат узла  $(m, n)$ ;  $m, n(\mathbf{G})$  – опорная область переменного размера для коэффициентов авторегрессии  $a(m, n, p, q)$ . Особенность выражения (1) заключается в том, что конфигурация опорной области  $m, n(\mathbf{G})$  зависит от значений управляющего поля  $\mathbf{G}$ , а ее размеры ограничены согласно выражению  $m, n(\mathbf{G}) = \{(p, q) : (p, q) \in a, (m-p, n-q) \in \mathbf{L}\}$  – опорная область переменного размера, учитывающая конечные размеры решетки  $\mathbf{L}$ ;  $a = \{(p, q) : (p=0, q=0) \cup (p=1, 1 \leq q \leq 1)\}$  – опорная область коэффициентов авторегрессии модели-прототипа первого порядка [6, 7].

Управляющее поле  $\mathbf{G}$  представляет собой процесс линий [5] – бинарное поле, заданное на дуальной решетке, узлы которой располагаются между соседними по вертикали и горизонтали элементами изображения (рис. 1). Элементы поля  $\mathbf{G}$  могут принимать значение 1 или 0 в зависимости от наличия или отсутствия контурного элемента в данном узле. Совокупность контурных элементов образует контурный рисунок изображения.

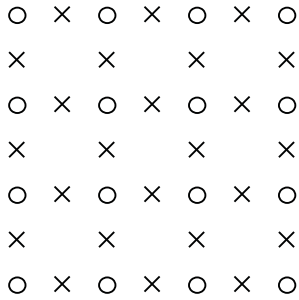


Рис. 1. Расположение элементов полей (  $\circ$  – элементы изображения,  $\times$  – элементы управляющего поля)

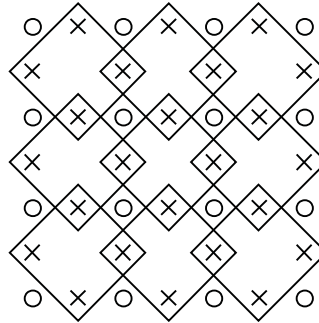


Рис. 2. Система клик управляющего поля

Обозначим дуальную решетку  $\mathbf{L}_g$  и разобьем ее на две подрешетки  $\mathbf{L}_1$  и  $\mathbf{L}_2$  так, что узлы  $\mathbf{L}_1$  расположены между соседними по горизонтали точками изображения, а узлы  $\mathbf{L}_2$  – между точками изображения, соседними по вертикали:  $\mathbf{L}_g = \{\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2\}$ . Тогда  $\mathbf{G} = \{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2\}$ ,  $\mathbf{G}_1 = \{g_1(m, n): (m, n) \in \mathbf{L}_1\}$ ,  $\mathbf{G}_2 = \{g_2(m, n): (m, n) \in \mathbf{L}_2\}$ , где  $\mathbf{G}_1$  и  $\mathbf{G}_2$  – поля, определяемые на подрешетках  $\mathbf{L}_1$  и  $\mathbf{L}_2$ .

Согласно [5] на дуальной решетке  $\mathbf{L}_g$  определяется система четырехточечных клик (рис. 2). Каждая клика состоит из двух соседних по вертикали точек решетки  $\mathbf{L}_1$  и двух соседних по горизонтали точек решетки  $\mathbf{L}_2$ .

Каждой клике поставим в соответствие потенциальную функцию

$$V^g(g_1(m, n), g_2(m, n-1), g_1(m-1, n), g_2(m, n)), \quad m \in \overline{0, M-2}, n \in \overline{0, N-2}.$$

Вероятность реализации  $g$  поля  $\mathbf{G}$  имеет гиббсовскую форму

$$P(\mathbf{G} = g) = Z_G^{-1} \exp \sum_{m=0}^{M-2} \sum_{n=0}^{N-2} V^g(g_1(m, n), g_2(m, n-1), g_1(m-1, n), g_2(m, n)), \quad (2)$$

где  $Z_G^{-1}$  – нормирующий множитель;  $g_1(\cdot, \cdot)$  и  $g_2(\cdot, \cdot)$  – значения реализаций полей  $\mathbf{G}_1$  и  $\mathbf{G}_2$  в соответствующих узлах. Поле  $\mathbf{G}$  бинарно, поэтому функция  $V^g$  может принимать 16 возможных значений. Эти значения являются параметрами модели (2). С учетом условия нормировки независимыми являются только 15 параметров.

На рис. 3 приведены все возможные конфигурации контурных элементов на клике и соответствующие им значения поля  $\mathbf{G}$  (прямоугольник обозначает элемент контура с учетом ориентации). Поскольку изображения естественных сцен часто имеют изотропный характер, то в целях упрощения модели (2) будем считать, что значение потенциала  $V^g$  зависит только от конфигурации контура и не зависит от его ориентации, т. е. положим

$$V^g(1,0,0,0) = V^g(0,1,0,0) = V^g(0,0,1,0) = V^g(0,0,0,1),$$

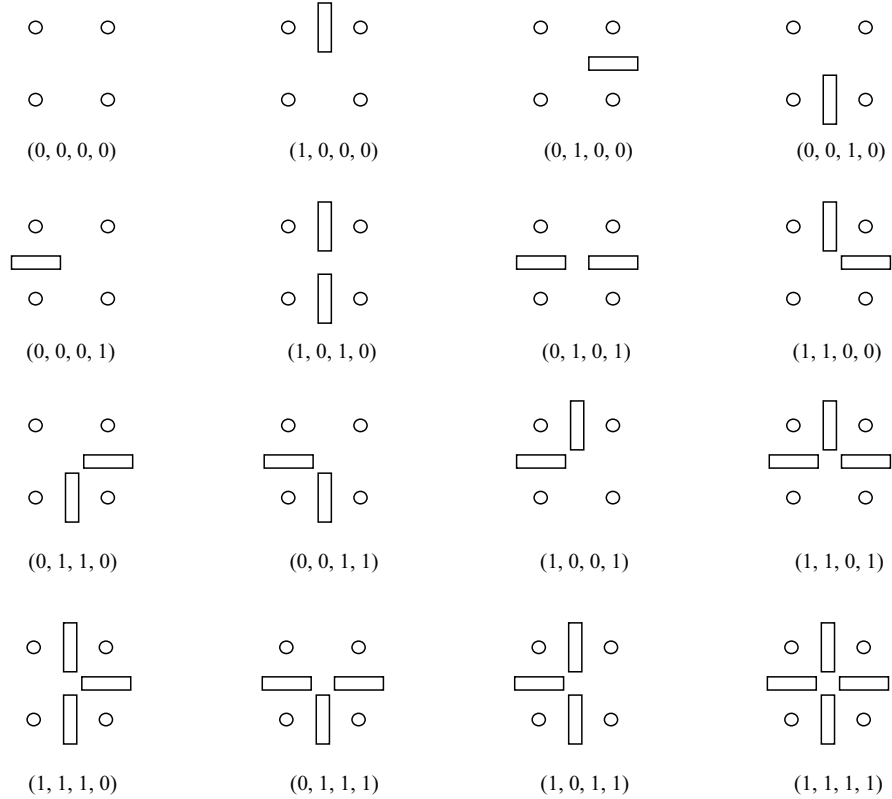


Рис. 3. Соответствие конфигураций контурных элементов и значений поля  $\mathbf{G}$

$$\begin{aligned}
 & V^g(1,0,1,0) \quad V^g(0,1,0,1), \\
 & V^g(1,1,0,0) \quad V^g(0,1,1,0) \quad V^g(0,0,1,1) \quad V^g(1,0,0,1), \\
 & V^g(1,1,0,1) \quad V^g(1,1,1,0) \quad V^g(0,1,1,1) \quad V^g(1,0,1,1).
 \end{aligned}$$

Это допущение сокращает число параметров модели до шести, причем только пять из них являются независимыми.

Для описания связи между предложенной моделью поля нижнего уровня (1) и моделью управляющего поля (2) определим множества

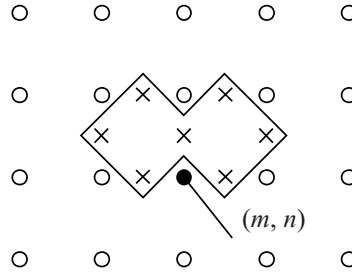
$$\mathbf{L}_1 = \{(p, q): 0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1\}, \quad \mathbf{L}_2 = \{(p, q): p \in \{1\}, 1 \leq q \leq 1\},$$

а также систему подмножеств элементов управляющего поля  $\mathbf{G}$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}_{m,n} = & \{g_1(m-p, n-q): (p, q) \in \mathbf{L}_1, (m-p, n-q) \in \mathbf{L}_1\} \\
 & \{g_2(m-p, n-q): (p, q) \in \mathbf{L}_2, (m-p, n-q) \in \mathbf{L}_2\}, \quad (m, n) \in \mathbf{L}.
 \end{aligned}$$

Положим, что конфигурация носителя  $\mathbf{G}_{m,n}(\mathbf{G})$ ,  $(m, n) \in \mathbf{L}$ , зависит только от элементов подмножества  $\mathbf{G}_{m,n}$ :  $\mathbf{G}_{m,n}(\mathbf{G}) = \mathbf{G}_{m,n}(\mathbf{G}_{m,n})$ . На рис. 4 пока-

Рис. 4. Множество контурных элементов, влияющих на выбор формы опорной области  $m, n$



зано расположение элементов управляющего поля, принадлежащих множеству  $\mathbf{G}_{m,n}$  для внутренних точек решетки  $\mathbf{L}$ , т. е. при  $1 \leq m \leq M-1, 1 \leq n \leq N-1$ . На рис. 5 представлены все возможные конфигурации опорной области  $m, n(\mathbf{G}_{m,n})$ . Выбор конкретной конфигурации производится для каждой точки  $(m, n) \in \mathbf{L}$  в зависимости от наличия в ней контурных элементов. Определим следующее правило: элемент  $(p, q)$  исключается из области  $m, n(\mathbf{G}_{m,n})$ , если прямая, проведенная через узлы  $(m, n)$  и  $(m-p, n-q)$  решетки  $\mathbf{L}$ , проходит через контурный элемент или пересекает линию, образованную соединением соседних контурных элементов. Введенное правило выбора конфигурации области  $m, n(\mathbf{G}_{m,n})$  определяет способ связи управляющего поля  $\mathbf{G}$  и управляемой модели (1).

Оценивание наборов коэффициентов авторегрессии  $a(m, n, p, q)$ ,  $(p, q) \in m, n(\mathbf{G}_{m,n})$ , и соответствующих дисперсий  $\sigma^2(m, n)$  для всех возможных конфигураций опорной области  $m, n(\mathbf{G}_{m,n})$ , за исключением случая

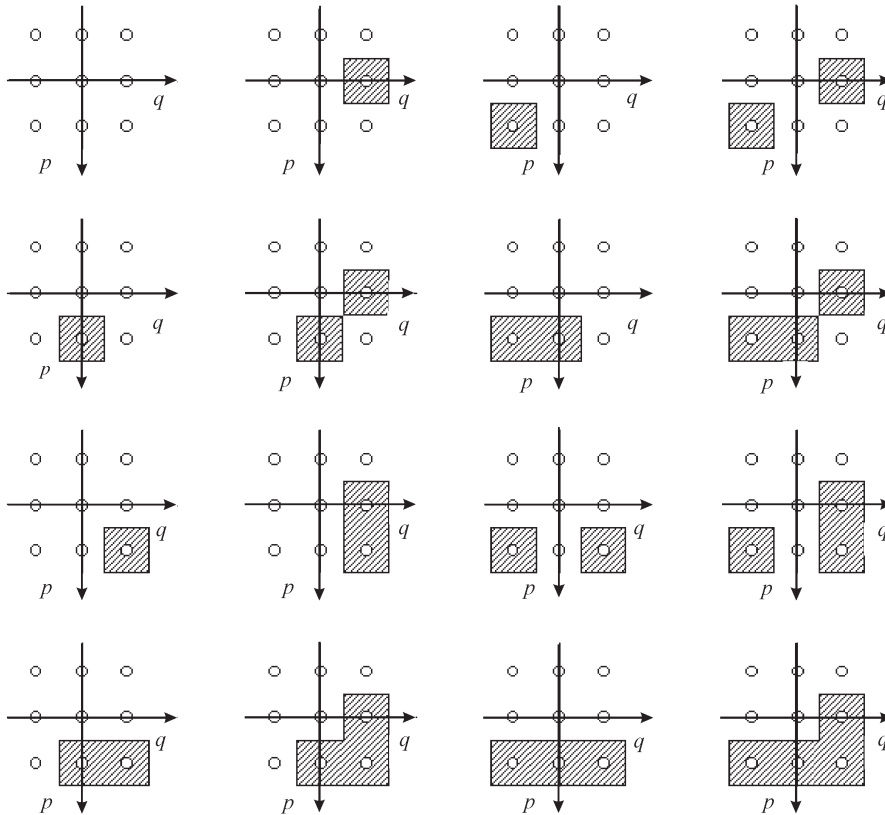


Рис. 5. Формы опорной области  $m, n$  в зависимости от значений управляющего поля

$\mathbf{G}_{m,n}$ , производится путем минимизации среднеквадратичной ошибки линейного предсказания аналогично [6].

Условная плотность распределения вероятности поля  $\mathbf{X}$ , формируемого в соответствии с (1), имеет гиббсовскую форму и определяется выражением

$$w(\mathbf{X} = \mathbf{x} | \mathbf{G} = \mathbf{g}) = Z_{\mathbf{X}|\mathbf{G}}^{-1}(\mathbf{g}) \exp \left[ - \sum_{(m,n) \in \mathbf{L}} V_{m,n}^g(x(m,p,n,q), (p,q) \in \mathbf{g}_{m,n}) \right],$$

$$Z_{\mathbf{X}|\mathbf{G}}(\mathbf{g}) = \sum_{(m,n) \in \mathbf{L}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ - \sum_{(p,q) \in \mathbf{L}_h} V_{m,n}^g(x(m,p,n,q), (p,q) \in \mathbf{g}_{m,n}) \right] dx(m,p,n,q),$$

$$\frac{1}{2} \sum_{(p,q) \in \mathbf{L}_h} a(m,n,p,q) x(m,p,n,q)^2, \quad a(m,n,0,0) = 1.$$

Наблюдаемое искаженное изображение  $\mathbf{Y}$  формируется в соответствии с выражением

$$y(m,n) = \sum_{(p,q) \in \mathbf{L}_h} h(p,q) x(m,p,n,q) + (m,n) \in \mathbf{L}_h, \quad \mathbf{L}_h = \{(m,n): P_h \leq m \leq (M - P_h), Q_h \leq n \leq (N - Q_h)\}, \quad (3)$$

где  $h(p,q)$  – дискретная двумерная функция рассеяния точки, заданная на прямоугольном носителе  $\mathbf{L}_h = \{(p,q): P_h \leq p \leq (M - P_h), Q_h \leq q \leq (N - Q_h)\}$  размером  $(2P_h - 1) \times (2Q_h - 1)$  и описывающая размытие изображения в процессе регистрации;  $(m,n) \in \mathbf{L}_h$  – независимый дискретный гауссовский шум наблюдения с нулевым средним и постоянной дисперсией  $\sigma^2$ . Операция свертки в (3) приводит к тому, что носитель  $\mathbf{L}_h$  искаженного изображения оказывается меньше носителя  $\mathbf{L}$  исходного изображения.

Восстановление изображения на основе иерархической модели. Задача восстановления формулируется следующим образом: по наблюдаемой реализации поля  $\mathbf{Y} = \{y(m,n): (m,n) \in \mathbf{L}_h\}$  необходимо найти оптимальную совместную оценку исходного изображения  $\mathbf{X} = \{x(m,n): (m,n) \in \mathbf{L}\}$  и управляющего поля  $\mathbf{G}$ . В качестве критерия оптимальности принимается критерий максимума апостериорной вероятности  $(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{G}}) = \arg \max_{(\mathbf{X}, \mathbf{G})} w(\mathbf{X}, \mathbf{G} | \mathbf{Y})$ . Согласно формуле Байеса

$$w(\mathbf{X}, \mathbf{G} | \mathbf{Y}) = \frac{w(\mathbf{X}, \mathbf{G}) w(\mathbf{Y} | \mathbf{X}, \mathbf{G})}{w(\mathbf{Y})} = \frac{P(\mathbf{G}) w(\mathbf{X} | \mathbf{G}) w(\mathbf{Y} | \mathbf{X})}{w(\mathbf{Y})}.$$

Для одновременного оценивания непрерывнозначного поля  $\mathbf{X}$  и бинарного поля  $\mathbf{G}$  используется предложенная в работе [9] методика, основанная на поочередном генерировании выборок из распределений  $P(\mathbf{G} | \mathbf{X}, \mathbf{Y})$  и

$w(\mathbf{X}|\mathbf{G}, \mathbf{Y})$  на каждой итерации. При этом вместо неизвестных  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{G}$  в выражения для апостериорных распределений  $P(\mathbf{G}|\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  и  $w(\mathbf{X}|\mathbf{G}, \mathbf{Y})$  на каждом шаге подставляются их текущие оценки.

Записав выражения для условного распределения  $P(\mathbf{G}|\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  и условной плотности вероятности  $w(\mathbf{X}|\mathbf{G}, \mathbf{Y})$ , подставив в них  $P(\mathbf{G})$  и  $w(\mathbf{X}|\mathbf{G})$  и введя «температуру»  $T(t)$ , получим

$$P_t(\mathbf{G} = \mathbf{g} | \mathbf{x}_{t-1}, T(t)) = [Z_{\mathbf{G}|\mathbf{X}}(T(t))]^{-1} \exp \left\{ \frac{1}{T(t)} \sum_{(m,n) \in \mathbf{L}} \ln V_{m,n}^g(g_1(m,n), g_2(m,n-1), g_1(m-1,n), g_2(m,n)) \right.$$

$$\left. V_{m,n}^g(x(m-p, n-q), (p,q) \in \mathbf{L}_{m,n}(\mathbf{g}_{m,n})) \right\},$$

$$w_t^y(\mathbf{X} = \mathbf{x} | \mathbf{g}_{t-1}, T(t)) = w(\mathbf{X} = \mathbf{x} | \mathbf{g}_{t-1}, \mathbf{Y} = \mathbf{y}, T(t)) [Z_{\mathbf{X}|\mathbf{G}}(T(t))]^{-1} \exp \left\{ \frac{1}{T(t)} \sum_{(m,n) \in \mathbf{L}} V_{m,n}^g(x(m-p, n-q), (p,q) \in \mathbf{L}_{m,n}(\mathbf{g}_{m,n})) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sum_{(m,n) \in \mathbf{L}_h} y(m,n) \sum_{(p,q) \in \mathbf{L}_h} h(p,q) x(m-p, n-q) \right\},$$

где  $Z_{\mathbf{G}|\mathbf{X}}(T(t))$  и  $Z_{\mathbf{X}|\mathbf{G}}(T(t))$  – нормирующие константы;  $\mathbf{x}_{t-1}$  и  $\mathbf{g}_{t-1}$  – реализации полей  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{G}$ , полученные на предыдущей итерации.

Пусть  $(i, j) \in \mathbf{L}_1$  – текущая точка решетки  $\mathbf{L}_1$ , а  $g_1(i, j)$  – значение реализации последовательности  $\mathbf{G}_1$  в точке  $(i, j)$ . Для возможной модификации поля в точке  $(i, j)$  новое значение  $g_1(i, j)$  генерируется с помощью датчика случайных чисел 1 и 0 с равновероятными исходами, соответствующими наличию или отсутствию контурного элемента в данной точке. Новое значение принимается согласно методу Метрополиса – Хастингса [4] с вероятностью

$$P = \min \left\{ 1, \frac{P_t(\mathbf{G} = \mathbf{g} | \mathbf{x}_{t-1}, T(t))}{P_t(\mathbf{G} = \mathbf{g} | \mathbf{x}_{t-1}, T(t))} \right\},$$

иначе значение поля в точке не меняется, и происходит переход к следующей точке решетки  $\mathbf{L}_1$  в соответствии с выбранным правилом обхода (сканирования) решетки ( $\mathbf{g}$  обозначает реализацию поля  $\mathbf{G}$  после модификации). Выражение отношения условных вероятностей не приводится ввиду его громоздкости. Аналогично принимается решение о модификации поля  $\mathbf{G}$  при обходе решетки  $\mathbf{L}_2$ .

Модификация значения поля  $X$  в точке  $(i, j)$  происходит с вероятностью

$$P = \min \left( 1, \frac{w_t^Y(\mathbf{X} \setminus x | \mathbf{g}_{t-1}, T(t))q(x(i, j) | x(i, j))}{w_t^Y(\mathbf{X} \setminus x | \mathbf{g}_{t-1}, T(t))q(x(i, j) | x(i, j))} \right), \quad (4)$$

где  $x(i, j)$  – текущее значение поля  $X$  в точке  $(i, j)$ . Новое значение  $x(i, j)$  в точке  $(i, j)$  генерируется в соответствии с заданным условным распределением  $q(x(i, j) | x(i, j))$ , в качестве которого выбрано распределение Лапласа

$$q(x(i, j) | x(i, j)) = \frac{1}{2} \exp(-|x(i, j) - x(i, j)|),$$

где  $\sigma$  – параметр, определяющий дисперсию данного распределения. Отношение условных плотностей вероятностей в (4) выражается через потенциалы клика, содержащих точку  $(i, j)$ .

На рис. 6 приведены результаты работы предложенного алгоритма. Обработке подвергалось размытое изображение (рис. 6, *a*). Параметры модели исходного изображения, модели искажающей системы и схема охлаждения

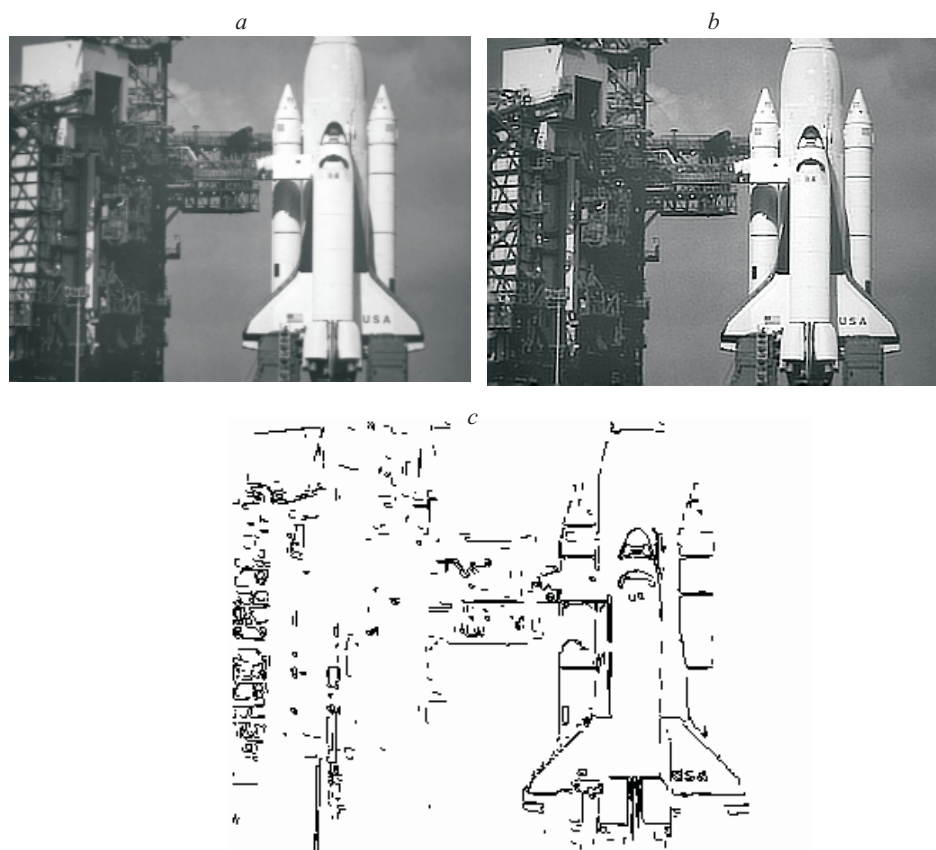


Рис. 6. Результаты работы алгоритма восстановления: искаженное изображение (*a*), восста-



подбирались экспериментально. Восстановленное изображение (рис. 6, *b*) имеет более высокое качество субъективного восприятия по сравнению с алгоритмом [7], построенным без учета поля линий. При этом почти полностью отсутствуют краевые эффекты. Предложенный алгоритм может использоваться для высококачественного восстановления изображений в условиях линейных однородных и неоднородных искажений. Аналогичный подход можно использовать для построения алгоритма компенсации нелинейных искажений. Заметим, что при восстановлении изображения попутно выделяется контурный препарат (рис. 6, *c*), который может быть использован в алгоритмах анализа сцен.

**Заключение.** Предложен метод восстановления изображений, подвергшихся линейным искажениям (размытию и т. п.) и воздействию аддитивного гауссовского шума, на основе иерархической гиббсовской модели случайного поля, представленного гаусс-марковской авторегрессионной моделью. Повышение качества восстановления достигается за счет введения в модель скрытого уровня, описывающего границы между областями с медленно меняющимися яркостями.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Методы компьютерной обработки изображений /Под ред. В. А. Соифера. М.: Физматлит, 2001.
2. Реконструкция изображений /Под ред. Г. Старка. М.: Мир, 1992.
3. Грузман И. С., Киричук В. С., Косых В. П. и др. Цифровая обработка изображений в информационных системах. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.
4. Винклер Г. Анализ изображений, случайные поля и динамические методы Монте-Карло. Математические основы. Новосибирск: Изд-во СО РАН, филиал «Гео», 2002.
5. Geman S., Geman D. Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images // IEEE Trans. 1984. PAMI-6, N 6. P. 721.
6. Васюков В. Н., Голещихин Д. В. Восстановление полутоновых изображений на основе гиббсовского описания // Автометрия. 2002. № 2. С. 58.
7. Васюков В. Н., Голещихин Д. В. Восстановление и сегментация изображений, описываемых гиббсовскими моделями // Науч. вест. НГТУ. 2001. № 2 (11). С. 9.
8. Васюков В. Н., Голещихин Д. В. Гиббсовская модель фрагмента стационарного случайного поля, определяемого авторегрессионным уравнением // Сиб. журнал индустр. математики. 2002. V, № 1 (9). С. 20.
9. Jeng F. C., Woods J. W. Simulated annealing in compound Gauss – Markov random fields // IEEE Trans. 1990. IT-36. P. 94.

Новосибирский государственный  
технический университет,  
E-mail: vasyukov@ktor.ref.nstu.ru

Поступила в редакцию  
8 сентября 2004 г.