

УДК 51.72; 539.3

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ  
СЫПУЧИХ СРЕД ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ  
С ИЗЛОМАМИ ТРАЕКТОРИЙ НАГРУЖЕНИЯ**

**С. В. Клишин, А. Ф. Ревуженко**

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, E-mail: sv.klishin@gmail.com,  
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

На основе метода дискретных элементов рассмотрена задача об однородном сдвиге образца сыпучего материала. Выбиралась сферическая форма частиц с заданным распределением по радиусам. На контактах между дискретными элементами учитывались сухое трение и вязкость. Нагружение осуществлялось простым сдвигом и с изломами траектории. Излом траектории выполнялся путем скачкообразного изменения направления сдвига. Установлено, что при этом скачком изменяется скорость дилатансии, а также угол разности тензоров напряжений и скоростей деформаций. Дискретная среда проявляет свойства континуальной модели сыпучего материала с внутренним трением и дилатансией. Рассмотрен вопрос о критерии существования континуальной модели, эквивалентной исходной дискретной модели. Показана возможность использования результатов численных экспериментов для построения континуальных моделей деформирования.

*Континуальная модель, сплошная среда, гранулированный материал, напряженное состояние, дилатансия, метод дискретных элементов, численный анализ*

Одна из основных проблем теории пластичности — описание сложного нагружения. При простом нагружении различные теории дают вполне приемлемые и близкие между собой результаты [1, 2]. Однако во многих случаях реализуется не простое, а сложное нагружение, в том числе с резкими изломами траекторий. К таким можно отнести нагружение в волнах сжатия при их отражении и преломлении, а также при деформировании в условиях локализации сдвигов и разрушения, когда резкое падение напряжений на разрывах приводит к изменению условий нагружения в остальной области деформирования. Сложное нагружение реализуется в приливных волнах при деформировании геоблоков, которое сопровождается их поворотами, во многих технологических процессах обработки сыпучих и порошковых материалов и т. д.

При описании сложного нагружения различные теории дают различные результаты [1, 2]. Основной вопрос — адекватность теории и ее соответствие имеющимся экспериментальным данным. В работе [3] предложена методика реализации нагружений с резкими изломами траектории. Основная идея состоит в том, что на приборе однородного сдвига реализуется серия периодических сдвигов с фиксированным положением осей тензора деформаций. Образец мате-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-05-00432).

риала находится в вертикальной цилиндрической оболочке. В момент, когда цилиндр принимает форму кругового цилиндра, его поворачивают вместе с образцом на заданный конечный угол. Затем продолжается сдвиг в прежнем направлении. Относительно материала направление сдвига меняется скачком на конечный угол. В процессе деформирования вычислялись напряжения и деформации образца, включая его дилатансию.

Указанный способ нагружения охватывает довольно широкий класс траекторий с изломами, но не все возможные траектории (для этого необходим исходный образец в форме шара, который в процессе деформирования проходит через последовательность эллипсоидов).

Описание сложного нагружения в рамках континуальной механики наталкивается на ряд трудностей, связанных как с построением или выбором замкнутой модели, так и с численным или аналитическим расчетом. В [4] предложен альтернативный и достаточно универсальный способ решения проблемы. Он состоит в построении по заданной модели дискретных элементов континуальной модели среды, которая была бы ей эквивалентна. Для этого выделяется класс краевых задач, в которых возможно однородное распределение деформаций и их скоростей. Соответствующие им краевые условия применяются для постановки численных экспериментов.

Такие режимы деформирования относятся к классу аффинных. Это означает, что для их реализации на границе тела задается распределение смещений, линейное по пространству. В этих условиях для сплошных и устойчивых сред в самом теле может реализоваться только линейное по координатам поле смещений. Отсюда следует, что кинематика деформирования такова, что любые прямые в результате деформирования переходят в прямые. Причем этот факт не зависит от изломов траектории нагружения. Главное, чтобы среда была сплошной и устойчивой.

При переходе к дискретным элементам сплошность среды нарушается. Возникает вопрос: при какой крупности элементов можно считать, что дискретная модель аппроксимирует континуальную? Из условий линейности можно сформулировать следующий критерий адекватности. Если в среде, состоящей из дискретных элементов, отметить материальные точки, расположенные на прямой линии, то в результате аффинного нагружения они должны переходить в линию, которую приближенно можно считать прямой. Таким образом, речь идет о критерии близости двух функций — исходной прямой и ее образе после деформации тела:

$$y = kx + b \text{ и } y = kx + b + \delta y(x), \quad k, b = \text{const.}$$

В вариационном исчислении считается, что линии близки, если

$$|\delta y| + |\delta y'| < \lambda, \quad \lambda \ll 1,$$

где штрих обозначает производную по времени. В рассматриваемой ситуации данный критерий является слишком жестким. Действительно, рассмотрим однородный сдвиг сыпучей среды

$$u_x = \text{tg} \gamma y, \quad u_y \equiv 0. \quad (1)$$

Здесь  $u_x$ ,  $u_y$  — компоненты смещения в декартовых координатах  $Oxy$ ;  $\gamma$  — угол сдвига.

В случае дискретных элементов профиль смещений будет ломаным. На рис. 1 показан  $\gamma_e$  — сдвиг самих элементов; разность  $\gamma - \gamma_e$  и размер элемента  $l$  определяют проскальзывание. Ясно, что добиться одновременной малости величин отклонения  $h$  и  $|\gamma - \gamma_e|$  во всех реальных задачах невозможно. Но в этом и нет необходимости. В качестве критерия достаточно принять отношение  $h/L \ll \lambda$ , где, например,  $\lambda = 1/30$ , если речь идет о точности порядка 3% (обозначения указаны на рис. 1б). Таким образом, для исследования аффинной деформации в пространственном случае число частиц должно быть не меньше  $3 \cdot 10^4$  ( $10^3$  для случая двух измерений).

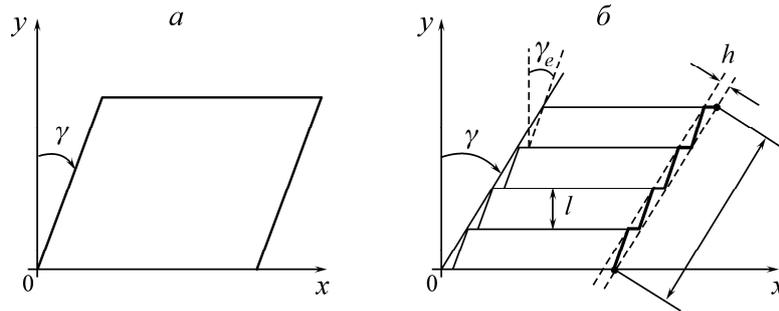


Рис. 1. Деформирование среды простым сдвигом: континуальный подход (а); дискретная модель (б)

Однородная (аффинная) деформация — исключительный случай. Во всех реальных задачах, как правило, реализуется неоднородная деформация. В результате такой деформации (в рамках континуального подхода) прямые преобразуются в некоторые гладкие кривые (разрывы и изломы могут быть только на изолированных поверхностях и исследуются особо). Сколько координат точек необходимо знать, чтобы получить представление о ее ходе? Это зависит от характера кривой. Если она осциллирует, то для каждой осцилляции необходимо знать порядка 10–20 точек. Если кривая достаточно плавная, то 50–100 точек может оказаться достаточным на всю ее длину. Поэтому для исследования неоднородной деформации в пространственном случае число дискретных элементов должно быть порядка  $3 \cdot 10^9$  (или  $2 \cdot 10^6$  для двумерного случая).

В данной работе рассмотрен пример численного исследования процессов нагружения материала простым сдвигом и нагружения с изломами траектории на основе метода дискретных элементов. В настоящее время этот метод приобрел большую популярность и используется многими исследователями для решения различных задач [5–8].

### ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Рассматривается несвязная среда, силы взаимодействия между отдельными частицами возникают только при их контакте, сила тяжести отсутствует. В качестве потенциала взаимодействия между частицами применяется закон Герца с учетом нормальной и касательной составляющих силы. Частицы при деформировании среды не меняют своей формы и не разрушаются, а их форма ограничена сферами с заданным распределением радиусов.

Пусть в пространстве  $Oxyz$  задана область  $S$  — куб, грани которого ориентированы вдоль координатных осей с длиной ребер, равной  $l_0$  (рис. 2а). Создание первоначальной равновесной упаковки отдельных твердых сферических частиц — важный начальный этап при решении задач методом дискретных элементов, который исследуется как отдельная самостоятельная задача во многих работах. Существуют два подхода для генерирования первоначальной плотной упаковки — динамический и геометрический. Различаются они способами достижения конечной конфигурацией области, состоящей из отдельных элементов. Применению этих методов при различных граничных условиях посвящена обширная литература. Одной из модификаций динамического метода является алгоритм синтеза упаковок частиц в рамках механики Аристотеля, представленный в [9].

В настоящей работе использована динамическая схема. Область  $S$  заполняется случайным образом частицами сферической формы радиусами  $r_i$ , равномерно распределенными в интервале от  $r_{\min}$  до  $r_{\max}$ . Соотношение  $R^* = r_{\max} / r_{\min} = 1.5$ . Значения  $r_{\min}$  выбираются с тем условием, чтобы заполнить начальный объем  $S$  заданным количеством дискретных элементов  $N$ , исключая их контакты друг с другом и с границей. Затем имитируется рост диаметров частиц с учетом их

контактного взаимодействия. Таким образом, начальная упаковка “разбухает”, заполняя собой исследуемую область, причем конечная плотность упаковки (суммарная доля объемов частиц по отношению к объему всей области) составляет 0.65–0.75 в зависимости от распределения частиц по размерам. Для визуализации процесса деформирования частицы раскрашивались (рис. 2б).

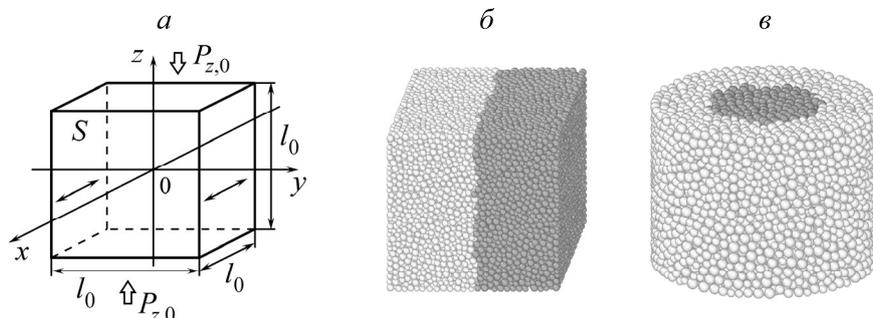


Рис. 2. Схема расчетной области (а); плотная упаковка частиц для нагружения простым сдвигом (б); упаковка частиц в случае сложного нагружения с изломами траекторий (в)

В случае простого сдвига деформирование осуществлялось следующим образом. К граням области, параллельным плоскости  $Oxy$ , прикладывается постоянное давление  $P_{z,0}$ , которое играет роль вертикального поджатия (или веса). Такой подход позволяет учесть дилатансию, которая оказывает существенное влияние на напряженно-деформированное состояние сыпучей среды. Смещение боковых граней области задается законом (1), причем угол сдвига  $\gamma$  в процессе нагружения является функцией  $\gamma = \gamma(t)$ , где  $t$  — параметр (время). Схема нагружения в проекции на плоскость  $Oxy$  приведена на рис. 3. Начальное состояние недеформированного образца показано на рис. 3а. Цикл нагружения состоит в простом сдвиге области на угол  $\gamma$  в положительном направлении оси  $Ox$  (рис. 3б), последующем сдвиге в отрицательном направлении (рис. 3в) и возврате образца в первоначальное состояние.

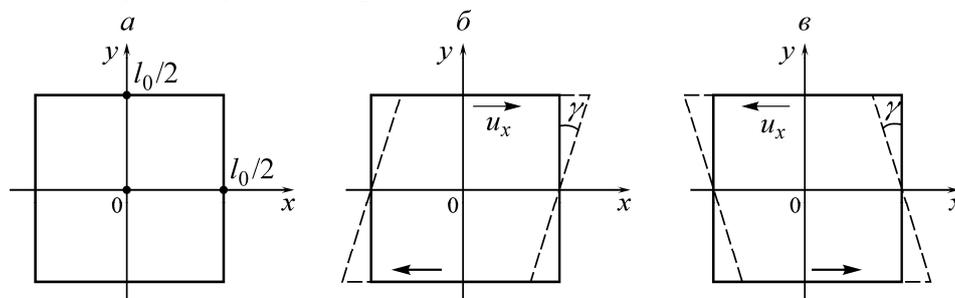


Рис. 3. Схема нагружения простым сдвигом

Физические параметры частиц и границ следующие: модуль упругости  $E_i = 10$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu_i = 0.3$ , угол сухого трения между частицами  $\varphi_{ij} = \varphi = 30^\circ$  ( $i, j = 1, \dots, N$ ), трение на между частицами и стенками отсутствует. Радиусы сферических дискретных элементов выбраны из равномерного случайного распределения в пределах от  $r_{\min} = 0.003$  м до  $r_{\max} = 0.0045$  м. Длина ребер кубической области  $l_0 = 0.4$  м, пригрузка  $P_{z,0} = 0.5$  МПа, максимальное значение угла сдвига  $\gamma = 10^\circ$ .

На всем протяжении численного эксперимента определялось напряженно-деформированное состояние образца. На рис. 4а показано относительное изменение высоты образца  $\xi$  в процессе нагружения. Здесь  $\xi$  выражается следующим образом:

$$\xi(t) = \frac{h(t) - h_0}{h_0},$$

где  $h(t)$  и  $h_0$  — текущая и начальная высота образца соответственно. Видно, что на каждом полном цикле нагружения материал вначале разрыхляется, причем дилатансия среды максимальна в крайних точках сдвига, а по окончании каждого колебания образец все больше уплотняется. Таким образом, последовательное циклическое деформирование нелинейно уменьшает высоту образца, при этом каждому циклу соответствует свое определенное значение пористости материала.

В данной ситуации вертикальное поджатие  $P_{z,0}$  играет роль параметра — с увеличением его значения увеличивается амплитуда колебания  $\xi(t)$  и, наоборот, уменьшение  $P_{z,0}$  приводит к уменьшению амплитуды  $\xi(t)$ . На рис. 4 точками показаны начальные значения вычисляемых величин, а стрелками — конечные для каждого цикла нагружения.

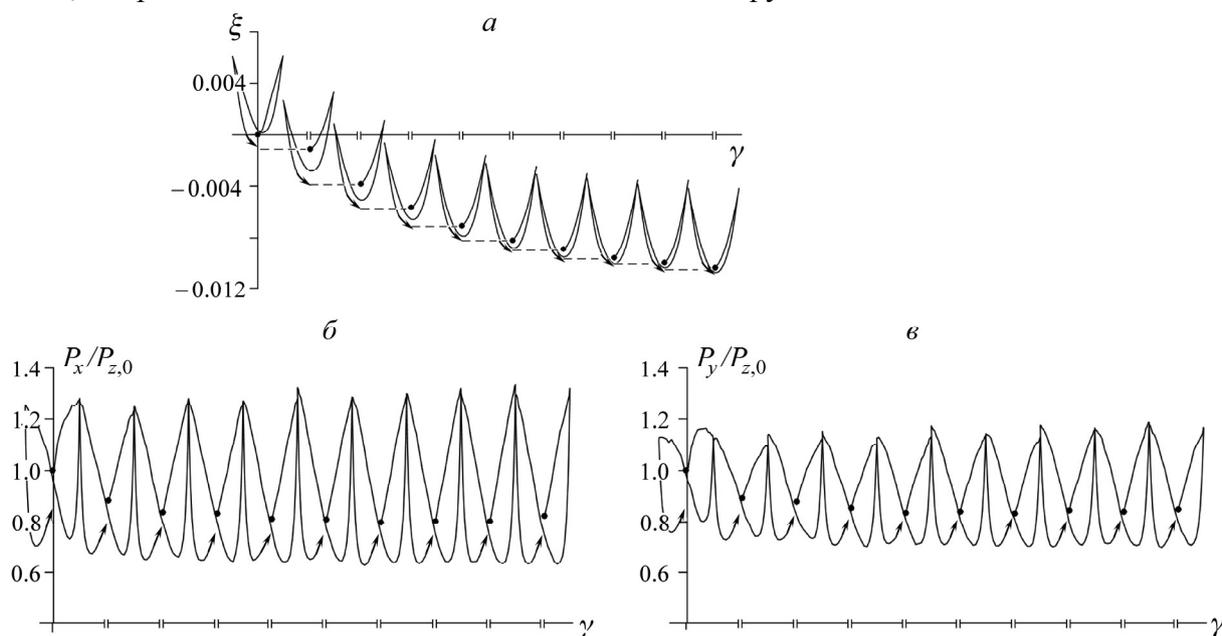


Рис. 4. Дилатансионные кривые, полученные в численном эксперименте в процессе деформирования среды простым сдвигом (а); изменение относительного давления  $P_x/P_{z,0}$  (б) и  $P_y/P_{z,0}$  (в), действующего со стороны сыпучего материала на стенки образца

Горизонтальными штриховыми линиями обозначена переборка пера самописца. На рис. 4б, в показаны кривые изменения давлений  $P_x/P_{z,0}$  и  $P_y/P_{z,0}$ , действующие со стороны сыпучего материала на грани области  $S$ . Численными экспериментами установлено, что в стесненных условиях при подавлении дилатансии напряжения в образце возрастают.

Второй способ деформирования представляет собой сложное нагружение с изломом траектории. В данном случае исследуемая область — это круговой цилиндр диаметром  $l_0$ , ось которого ориентирована вдоль координатной оси  $Oz$ . Начальная высота цилиндра равна  $l_0$ . Процесс создания первоначальной упаковки аналогичен описанному выше. Начальное состояние образца приведено на рис. 2в.

Излом траектории осуществляется следующим образом. Пусть имеется начальная упаковка частиц с заданным вертикальным поджатием  $P_{z,0}$ . Начальное состояние недеформированного образца в проекции на плоскость  $Oxy$  представлено на рис. 5а.

При простом сдвиге среды вдоль координатной оси  $Ox$  по закону (1) круговой цилиндр, содержащий сыпучий материал, деформируется и круг переходит в эллипс (рис. 5б). Длина отрезка  $AB$  меняется пропорционально изменению длины боковых граней, первоначально ориентированных параллельно оси  $Oy$ . После определенного количества сдвигов образец возвращается в первоначальное состояние. Затем, не нарушая упаковки частиц, круговой цилиндр поворачивается вокруг начала координат на заданный угол  $\beta$  (рис. 5в). Полученный образец вновь нагружается по правилу (1). При этом излом траектории определяется углом поворота  $\beta$ .

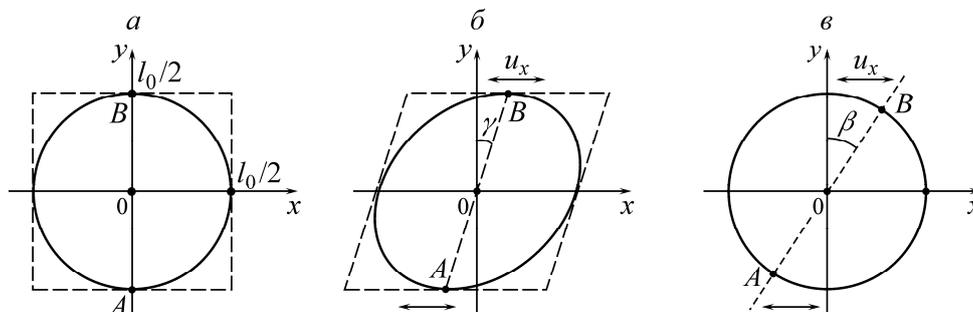


Рис. 5. Схема деформирования среды сложным нагружением с изломом траекторий

В представленном численном эксперименте исследовалось напряженно-деформированное состояние и дилатансия материала. Диаграмма изменения дилатансии при изломе траектории на угол  $\beta = 30^\circ$  приведена на рис. 6. Дилатансия на начальном этапе деформирования (до поворота образца) качественно повторяет диаграмму для простого сдвига (график до штриховой линии).

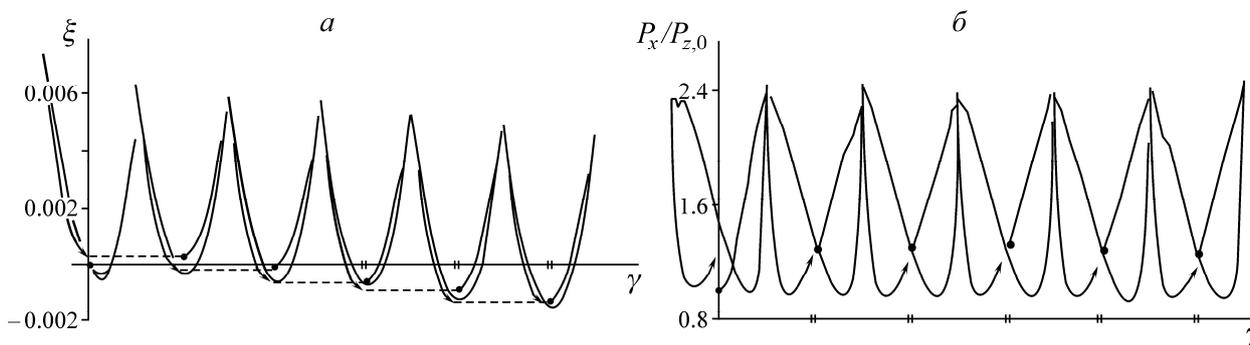


Рис. 6. Дилатансионная кривая при нагружении с изломом траектории

Таким образом, описанные выше и проведенные ранее [10, 11] численные эксперименты показывают, что принятой модели дискретных элементов соответствует достаточно сложная континуальная модель. Главным является то, что среда обнаруживает неголономное поведение: скорости деформаций зависят не только от напряжений, но и от всей истории деформирования среды. Поэтому данной дискретной модели соответствует анизотропная континуальная модель типа течения:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(t) = c_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (i, j, k, l = 1-3), \quad (2)$$

где точка означает производную по времени, а коэффициенты  $c_{ijkl}$  зависят от траектории нагружения, достигнутых напряжений и их приращений (если учитывать возможную разгрузку) [12].

В предельном состоянии закон течения неассоциирован, а тензоры напряжений и скоростей пластических деформаций разосны [10]. Уравнения равновесия можно считать линейными:

$$\sigma_{ij,k} + F_k = 0,$$

здесь  $F_k$  — компоненты объемной силы. Основная причина сложности континуальной модели — упаковка частиц. Число степеней свободы в уравнениях, описывающих взаимодействие частиц, сравнительно невелико (порядка пяти), в то время как число степеней свободы, связанных с упаковкой частиц, их размерами и формой, достигает астрономических значений. В связи с этим целесообразно численные расчеты конкретных процессов нагружения вести в рамках моделей дискретных элементов, а свойства моделей и общие теоремы исследовать в рамках упрощенных континуальных моделей.

### ВЫВОДЫ

Изломы траектории нагружения приводят к изменению скачком скорости дилатансии и разности тензоров напряжений и скоростей деформаций.

Вопрос о построении континуальной модели, эквивалентной заданной модели дискретных элементов, можно ставить только при числе элементов порядка  $3 \cdot 10^4$  в случае однородной деформации и порядка  $3 \cdot 10^9$  в общем случае.

Дискретная модель указывает на неголономность поведения среды, что необходимо учитывать при построении моделей, эквивалентных заданной модели дискретных элементов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969.
2. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. — М.: Физматлит, 2001.
3. Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф. Сложное нагружение сыпучих материалов с изломами траекторий. Методика и экспериментальные результаты // ФТПРПИ. — 1994. — № 5.
4. Ревуженко А. Ф., Клишин С. В. Численный метод построения континуальной модели деформирования твердого тела, эквивалентной заданной модели дискретных элементов // Физ. мезомеханика. — 2012. — Т. 15. — № 6.
5. Крамаджян А. А., Русин Е. П., Стажевский С. Б., Хан Г. Н. О повышении несущей способности грунтовых анкеров с гибкой тягой // ФТПРПИ. — 2014. — № 6.
6. Хан Г. Н. Моделирование методом дискретных элементов динамического разрушения горной породы // ФТПРПИ. — 2012. — № 1.
7. Головнев И. Ф., Головнева Е. И., Фомин В. М. Молекулярно-динамическое исследование роли поверхности в процессе разрушения наноструктур // Физ. мезомеханика. — 2014. — Т. 17. — № 6.
8. Kazantsev A. A., Klishin S. V., and Revuzhenko A. F. On the pressure of loose material on the bottom and walls of a drum, Applied Mechanics and Materials, 2014, Vol. 682.
9. Ревуженко А. Ф., Клишин С. В., Микенина О. А. Об одном алгоритме синтеза упаковок частиц в рамках аристотелевой механики // Физ. мезомеханика. — 2014. — Т. 17. — № 5.
10. Клишин С. В., Микенина О. А. О коэффициенте бокового распора случайных упаковок дискретных элементов // ФТПРПИ. — 2013. — № 6.
11. Клишин С. В., Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф. Аффинная деформация геоматериалов как методика тестирования метода дискретных элементов // Изв. АлтГУ. — 2014. — № 1. — Т. 1 (81).
12. Бобряков А. П. Линии скольжения в сыпучей среде с первоначальной неоднородностью и анизотропией // ФТПРПИ. — 2002. — № 5.

*Поступила в редакцию 5/IX 2015*