ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В РАСТВОРЕ ЭЛЕКТРОЛИТА ПРИ НАЛИЧИИ СКРЕЩЕННЫХ МАГНИТНОГО И ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЕЙ

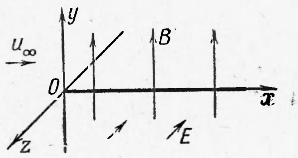
И. Б. Чекмарев, Чжан Син-мо

(*Ленинград*)

Рассматривается плоский ламинарный пограничный слой на полубесконечной пластине ($y = 0$, $x \geqslant 0$), обтекаемой потоком несжимаемой жидкости с заданной скоростью $u_\infty = u_0 u_1(x)$, где u_0 — некоторый масштаб скорости, а $u_1(x)$ — безразмерная функция x. На поверхности пластины поддерживается постоянная концентрация c_0 раствора электролита, так что в результате диффузии во внешний поток около пластины образуется электропроводный слой. Это позволяет при помощи внешних магнитного и электрического полей воздействовать на распределение скоростей в пограничном слое.

Коэффициент электропроводности раствора σ является функцией концентрации и для сильных электролитов достаточно хорошо аппроксимируется формулой

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{c}{c_0}\,\frac{a - b\sqrt{c}}{a - b\sqrt{c_0}} \qquad (a, b = \mathrm{const}) \tag{1}$$



Фиг. 1

Ограничимся случаем малых концентраций, когда плотность и вязкость жидкости можно считать постоянными, а электропроводность — линейной функцией концентрации. Кроме того, при исследовании потоков растворов электролитов в магнитном и электрическом полях можно пренебречь всеми индукционными эффектами вследствие их малости и использовать закон Ома в форме [1]

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \tag{2}$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность внешнего электрического поля.

Положим, что магнитное поле B параллельно оси y, а электрическое поле $\mathbf{E}$ направлено противоположно оси z (фиг. 1) и введем безразмерные переменные и параметры согласно соотношениям

$$\begin{gathered}\bar{x} = \frac{xu_0}{\nu}, \quad \bar{y} = \frac{yu_0}{\nu}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_0}, \quad \bar{c} = \frac{c}{c_0}, \quad \bar{T} = \frac{T - T_0}{T_0}, \\ \nu = \frac{\eta}{\rho}, \quad S = \frac{\nu}{D}, \quad P = \frac{\eta C}{\lambda}, \quad \alpha = \frac{\sigma_0 E B}{\rho u_0^3} \\ \beta = \frac{\sigma_0 E^2 \nu}{\rho C u_0^2 T_0} = \alpha\theta e, \quad \theta = \frac{u_0^2}{CT_0}, \quad e = \frac{E}{Bu_0}\end{gathered} \tag{3}$$

где η, λ, D — соответственно коэффициенты вязкости, теплопроводности и диффузии; ρ — плотность; C — удельная теплоемкость раствора; T_0 — температура пластины, предполагаемая равной температуре внешнего потока, S — число Шмидта, P — число Прандтля.

Тогда, используя известные предположения теории пограничного слоя, получим следующие исходные уравнения задачи (черточки над безразмерными величинами далее опускаются):

$$\begin{gathered}u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = u_1\frac{du_1}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha c, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{1}{S}\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}, \qquad u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{P}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \beta c\end{gathered} \tag{4}$$

с граничными условиями

$$\begin{array}{llll} u = v = 0, & c = 1, & T = 0 & \text{при } y = 0 \\ u \to u_1, & c \to 0, & T \to 0 & \text{при } y \to \infty \end{array} \tag{5}$$

Заметим, что в зависимости от направления электрического поля параметр α может принимать как положительные, так и отрицательные значения, в то время, как параметр β существенно положительный.

В случае отсутствия внешнего потока движение жидкости около пластины будет обусловлено только действием магнитного и электрического полей. Если поля однородны, то существует автомодельное преобразование, сводящее исходную систему нелинейных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

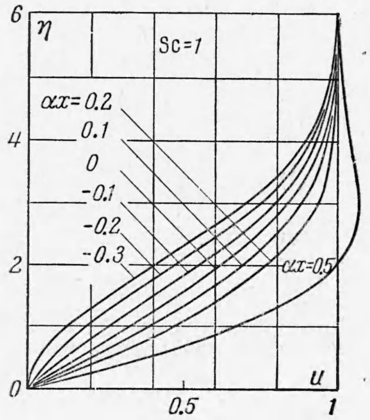
Действительно, введем функцию тока ψ и положим

$$u_0 = \frac{E}{B}, \qquad \psi = \frac{4P_m^{1/4}}{\sqrt{2e_a}} x^{3/4} f(\eta), \qquad c = \varphi(\eta), \qquad \eta = \frac{P_m^{1/4}}{\sqrt{2e_a}} \frac{y}{x^{1/4}} \tag{6}$$

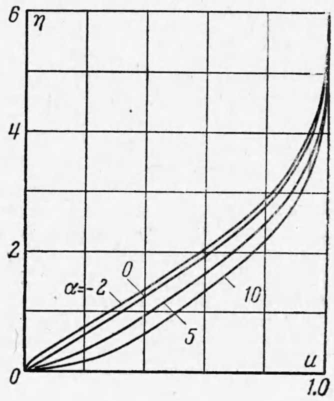
где

$$P_m = \nu\sigma\mu, \qquad e_a = \frac{E}{v_a B}, \qquad v_a = \frac{B}{\sqrt{\mu\rho}} \tag{7}$$

Уравнение неразрывности при этом будет удовлетворяться, а уравнения движе-



Фиг. 2



Фиг. 3

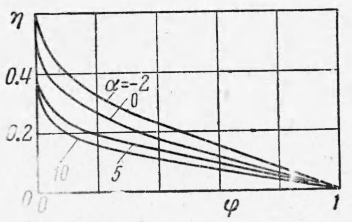
ния и диффузии можно преобразовать к следующему виду ($\alpha = P_m / e_a^2$)

$$f''' + 3ff'' - 2f'^2 + \varphi = 0, \qquad \varphi'' + 3Sf\varphi' = 0 \tag{8}$$

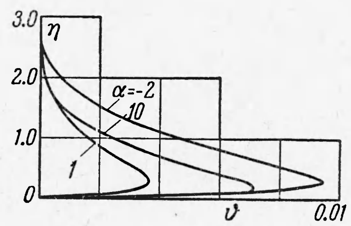
со следующими граничными условиями:

$$\begin{array}{lll} f = f' = 0, & \varphi = 1 & \text{при } \eta = 0 \\ f' \to 0, & \varphi \to 0 & \text{при } \eta \to \infty \end{array} \tag{9}$$

Система уравнений (8) с граничными условиями (9) исследовалась при разных значениях числа S в связи с классической задачей о свободной конвекции вязкой жидкости около вертикальной нагретой пластины (см., например, [2]).



Фиг. 4



Фиг. 5

Для случая однородных магнитного и электрического полей автомодельное решение имеет место также при обтекании пластины потоком с постоянным продольным перепадом давления ($u_1 = \sqrt{x}$).

Однако при обтекании пластины внешним однородным потоком ($u_1 = 1$) в однородных полях автомодельного преобразования не существует. При малых значениях параметра α решение задачи можно получить, как и в работе [3], в виде рядов по степеням αx, полагая

$$\psi = \sqrt{x}\,[f_0(\eta) + (\alpha x) f_1(\eta) + (\alpha x)^2 f_2(\eta) + \ldots] \qquad \left(\eta = \frac{y}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\varphi = \varphi_0(\eta) + (\alpha x)\varphi_1(\eta) + (\alpha x)^2 \varphi_2(\eta) + \ldots \tag{10}$$

В представлениях (10) коэффициенты разложения f_i и φ_i считаются функциями только переменной η.

По формуле $u = f_0' + (\alpha x) f_1'$ был произведен расчет распределения скоростей для чисел Шмидта $S = 10^3$ и $S = 1$. При $S = 10^3$, когда толщина диффузионного электропроводного слоя составляет примерно одну десятую толщины вязкого пограничного слоя, изменения профиля скоростей незначительны. В случае $S = 1$, когда толщины обоих слоев примерно одинаковы, наблюдается сильное влияние электромагнитной силы на распределение скоростей (фиг. 2).

Автомодельное решение при обтекании пластины внешним однородным потоком может быть получено, если принять [4], что напряженности магнитного и электрического полей изменяются по закону $x^{-1/2}$.

Вводя переменные

$$\psi = \sqrt{x} f(\eta), \qquad c = \varphi(\eta), \qquad T = \vartheta(\eta), \qquad \eta = \frac{y}{\sqrt{x}} \tag{11}$$

преобразуем исходную систему (4) к виду

$$2f''' + ff'' + 2\alpha\varphi = 0, \qquad 2\varphi'' + Sf\varphi' = 0, \qquad 2\vartheta'' + Pf\vartheta' + 2P\beta\varphi = 0 \tag{12}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered} f = f' = \vartheta = 0, \qquad \varphi = 1 \qquad \text{при } \eta = 0 \\ f' \to 1, \quad \varphi \to 0, \quad \vartheta \to 0 \qquad \text{при } \eta \to \infty. \end{gathered} \tag{13}$$

Второе и третье уравнения системы (12) интегрируются в общем виде. Получаем

$$\varphi = 1 - \int_0^\eta \exp\left[-\frac{S}{2}\int_0^\eta f d\eta\right] d\eta \Big/ \int_0^\infty \exp\left[-\frac{S}{2}\int_0^\eta f d\eta\right] d\eta \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \vartheta = \beta P \Bigg\{ & \int_0^\eta \exp\left[-\frac{P}{2}\int_0^\eta f d\eta\right] d\eta \left(\int_0^\infty \exp\left[-\frac{P}{2}\int_0^\eta f d\eta\right] d\eta\right)^{-1} \times \\ & \times \int_0^\infty \exp\left[-\frac{P}{2}\int_0^\eta f d\eta\right] \left(\int_0^\eta \varphi \exp\left[\frac{P}{2}\int_0^\eta f d\eta\right] d\eta\right) d\eta - \\ & - \int_0^\eta \exp\left[-\frac{P}{2}\int_0^\eta f d\eta\right] \left(\int_0^\eta \varphi \exp\left[\frac{P}{2}\int_0^\eta f d\eta\right] d\eta\right) d\eta \Bigg\} \end{aligned} \tag{15}$$

При помощи (14) первое уравнение (12) численно решалось методом последовательных приближений, причем за нулевое приближение принималось решение Блязиуса.

Вычисленные для числа Шмидта $S = 10^3$ и числа Прандтля $P = 7$ и некоторых значений параметра α распределения скоростей, концентраций и температур приведены на фиг. 3—5.

Поступила 15 X 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирко И. М. Особенности магнитогидродинамических явлений в жидких металлах и электролитах. Рига, Тр. Ин-та физики, 1961, вып. 12.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., ИЛ, 1956.
3. Rossow V. J. On flow of electrically conducting fluids over a flat plate in the presence of a transverse magnetic field. NACA, Report 1358, 1958.
4. Лайкаудис П. С. Об одном классе магнитных ламинарных пограничных слоев. Сб. Движущаяся плазма. ИЛ, 1961, стр. 481.