

УДК 539.4:539.376

ВАРИАНТ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ТИПА

В. П. Радченко, М. Н. Саушкин, С. В. Горбунов

Самарский государственный технический университет, 443100 Самара
E-mails: radch@samgtu.ru, saushkin.mn@samgtu.ru

Предложены кинетические уравнения неупругого реологического деформирования энергетического типа, в которых упругая деформация, деформации пластичности и ползучести являются аддитивными составляющими полной деформации и учитывается параметр поврежденности. Рассмотрена модель вязкоупругого материала с ядром ползучести экспоненциального типа. Исследована устойчивость решений по Ляпунову при постоянных напряжениях. Установлена область устойчивости решений системы дифференциальных уравнений математической модели, соответствующая асимптотически ограниченной ползучести материала. Показано, что область неустойчивости решений соответствует появлению третьей стадии ползучести. Установлена связь между устойчивостью решений по Ляпунову и устойчивостью вычислительного алгоритма при численном решении системы уравнений. Выполнена экспериментальная проверка предложенной модели. Показано, что расчетные и экспериментальные данные хорошо согласуются.

Ключевые слова: кинетические уравнения, металлические материалы, пластичность, ползучесть, разупрочнение, длительная прочность, вязкоупругий материал, устойчивость по Ляпунову, третья стадия ползучести, устойчивость вычислительного алгоритма.

Одним из подходов, используемых при описании трех стадий ползучести, является построение теории деформирования и разрушения на основе кинетических уравнений ползучести Работнова с учетом кинетики микромеханизмов разрушения, интегрально описываемых с помощью различных структурных параметров поврежденности. Основы данного подхода заложены Л. М. Качановым [1] и Ю. Н. Работновым [2–4]. Результаты исследований проблемы ползучести и длительной прочности, проведенных в последнее время, изложены в работах [5–10] и др. Однако, несмотря на большое количество работ, посвященных построению кинетических уравнений ползучести, существует ряд нерешенных проблем. Одна из них заключается в том, что в большинстве теорий часто отсутствует различие между пластической деформацией и деформацией ползучести: либо обе деформации объединяются в одну — неупругую, либо исследуется деформация ползучести без указания состояния материала (упругость или упругопластичность). Другая проблема состоит в том, что при разделении “мгновенной пластической” деформации и деформации ползучести необходимо учитывать различие между упругопластическим деформированием и длительным разрушением материала на микроуровне [10–12]. Такой учет представляет определенные трудности. Целью данной работы является построение кинетических

уравнений одноосной ползучести и длительной прочности, в которых полная неупругая деформация представляется в виде аддитивной составляющей пластической деформации и деформации ползучести, а также исследование процессов деформирования на третьей стадии ползучести и разрушения.

1. Кинетические уравнения ползучести и длительной прочности для металлических материалов. Определяющие соотношения рассматриваются в виде

$$\varepsilon(t) = e(t) + e^p(t) + p(t); \quad (1)$$

$$\dot{e}^p(t) = 0, \quad \sigma(t) \leq \sigma_{\text{пр}}, \quad (2)$$

$$\dot{e}^p(t) = \begin{cases} \lambda(a\Sigma_1(t) - e^p(t)), & a\Sigma_1(t) > e^p(t), \\ 0, & a\Sigma_1(t) \leq e^p(t), \end{cases} \quad \sigma(t) > \sigma_{\text{пр}};$$

$$p(t) = u(t) + v(t) + w(t); \quad (3)$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^s u_k(t), \quad \dot{u}_k(t) = \lambda_k(a_k\Sigma_2(t) - u_k(t)); \quad (4)$$

$$v(t) = \sum_{k=1}^s v_k(t), \quad \dot{v}_k(t) = \begin{cases} \lambda_k(b_k\Sigma_2(t) - v_k(t)), & b_k\Sigma_2(t) > v_k(t), \\ 0, & b_k\Sigma_2(t) \leq v_k(t); \end{cases} \quad (5)$$

$$\dot{w}(t) = c(\sigma(t)/\sigma_*)^m; \quad (6)$$

$$\sigma(t) = \sigma_0(t)(1 + \omega(t)); \quad (7)$$

$$\dot{\omega}(t) = \gamma\sigma(t)\dot{e}^p(t) + \alpha\sigma(t)\dot{p}(t); \quad (8)$$

$$\Sigma_1(t) = (\sigma(t) - \sigma_{\text{пр}})^{n_1}, \quad \Sigma_2(t) = (\sigma(t)/\sigma_*)^{n_2}.$$

Здесь $\varepsilon(t)$ — полная деформация; $e(t) = \sigma(t)/E$ и $e^p(t)$ — упругая и пластическая деформации соответственно; $p(t)$ — деформация ползучести; $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ — вязкоупругая, вязкопластическая и вязкая составляющие деформации ползучести соответственно; $\sigma_0(t) \geq 0$ — номинальное напряжение; $\sigma(t)$ — истинное (эффективное) напряжение (напряжение, отнесенное к площади поперечного сечения образца с учетом микрповреждений); E — модуль Юнга; λ_k , a_k , b_k , c , n_2 , m , σ_* — константы модели, с помощью которых описываются первая и вторая стадии ползучести материала и обратимая составляющая деформации после разгрузки; $\omega(t)$ — параметр поврежденности; γ , α — параметры модели, определяющие процесс разупрочнения материала на стадиях пластической деформации и деформации ползучести соответственно; a , n_1 , λ — константы, описывающие кривые $\sigma \sim \varepsilon$ мгновенного упругопластического деформирования; $\sigma_{\text{пр}}$ — предел пропорциональности.

Из (7), (8) следует, что параметр поврежденности полагается пропорциональным линейной комбинации работы истинного напряжения на деформации ползучести и пластической деформации и не совпадает с классическим параметром поврежденности Работнова [2–4]. Однако это предположение не противоречит основным предположениям, используемым при построении кинетических уравнений ползучести Работнова: “Структурные параметры... вводятся... чисто формально, вопроса об их физическом значении мы здесь не затрагиваем...” [4. С. 224].

Согласно соотношениям (2) пластическая деформация $e^p(t)$ описывается уравнениями, имеющими такую же структуру, как у уравнений для вязкопластической компоненты v деформации ползучести, т. е. имеет такой же характер изменения во времени. Данный подход к описанию пластической деформации соответствует так называемым эндохронным теориям пластичности [13–17], т. е. теориям пластичности с внутренним временем.

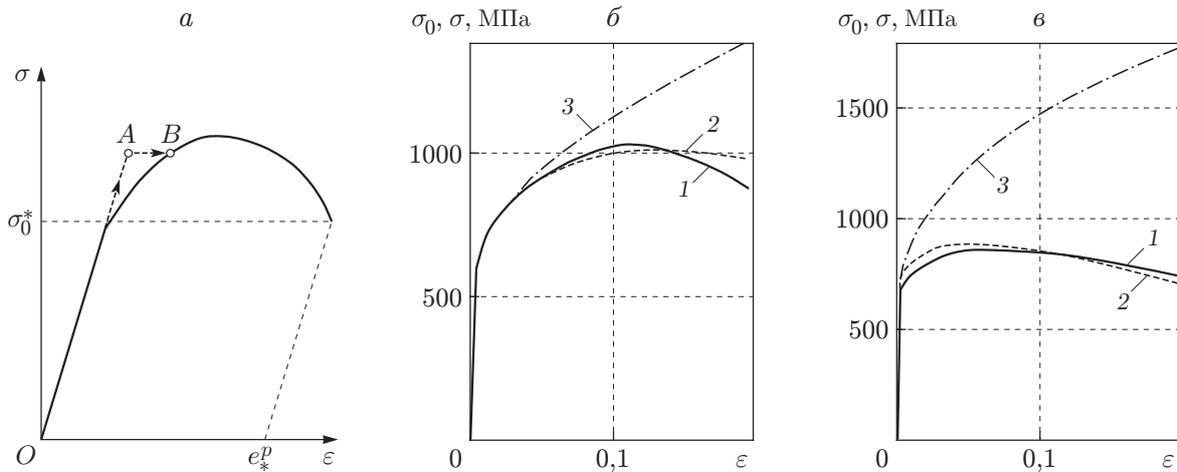


Рис. 1. Диаграммы упругопластического деформирования при температуре 750 °С: *a* — диаграмма развития пластической деформации по эндохронной теории пластичности, *б*, *в* — кривые мгновенного упругопластического деформирования (*б* — сплав ЭП742, *в* — сплав ЭИ698); 1 — эксперимент, 2 — расчет в координатах $\sigma_0 \sim \varepsilon$, 3 — расчет в координатах $\sigma \sim \varepsilon$

В уравнениях (1)–(8) в качестве внутреннего времени используется обычное физическое время. Если выбрать

$$\lambda \gg \max \{ \lambda_k \}, \tag{9}$$

то при фиксированном значении $\sigma_0(t) = \sigma_0$ всегда можно указать такой интервал времени $[0, t]$, в котором значение $e^p(t)$ будет сколь угодно мало отличаться от асимптотического значения, полученного из решения соотношения (2) при $t \rightarrow +\infty$, в то время как $p(t) \approx 0$. Диаграмма упругопластического деформирования в координатах $\sigma_0 \sim \varepsilon$ в режиме мягкого нагружения представляет собой ломаную OAB (рис. 1, *a*). С одной стороны, предлагаемый подход к оценке пластической деформации позволяет с единых методологических позиций алгоритмизировать процесс расчета неупругой деформации. С другой стороны, это не только математический прием описания пластической деформации, так как соотношение (2) имеет реальное физическое обоснование. Так, в работах [18, 19] экспериментально установлено, что при упругопластическом нагружении образца тензорезисторы, наклеенные по его длине, срабатывают не в момент приложения нагрузки, а через некоторое время, составляющее от 0,4 до 4 с. С позиций механики микронеоднородных сред это явление можно объяснить неоднородностью деформирования образца, а с феноменологической точки зрения формально его можно трактовать как запаздывание пластической деформации (пластической волны) относительно приложенной нагрузки.

Детальный анализ экспериментальных данных [10] показал, что в общем случае $\gamma = \gamma(e^p)$, $\alpha = \alpha(\sigma_0)$ и для этих зависимостей можно использовать степенные аппроксимации вида

$$\gamma = \gamma_1 (e^p)^{m_2}, \quad \alpha = \alpha_1 (\sigma_0)^{m_1}. \tag{10}$$

Для ряда материалов $\gamma = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$.

Критерий разрушения материала имеет вид [10]

$$\int_0^{t^*} \frac{\sigma(t)}{A_*^p} de^p(t) + \int_0^{t^*} \frac{\sigma(t)}{A_*^c} dp(t) = 1, \tag{11}$$

где t^* — время до разрушения образца; A_*^p — критическая величина работы разрушения истинного (эффективного) напряжения на пластической деформации; A_*^c — критическая величина работы разрушения истинного напряжения на деформации ползучести (в общем случае $A_*^c = A_*^c(\sigma_0) = \alpha_A(\sigma_0)^{m_A}$); α_A , m_A — характеристики материала. Методика идентификации параметров модели (1)–(11) подробно изложена в [10].

2. Исследование процесса деформирования и разрушения в упругопластической области. Из результатов исследования, представленных на рис. 1,а, следует, что в режиме мягкого нагружения при постоянной нагрузке расчет в упругопластической области можно проводить для напряжений $\sigma_0 < \sigma_B$ (σ_B — временной предел сопротивления). Для описания закритической (ниспадающей) ветви диаграммы упругопластического деформирования рассмотрим режим жесткого нагружения с постоянной скоростью $\dot{\epsilon} = \text{const}$, при котором за время нагружения накапливается незначительная деформация ползучести ($p \ll e^p$). Тогда, пренебрегая вторым членом в (8), из (7), (8) получаем соотношения

$$\sigma = \sigma_0 \exp \left(\int_0^{e^p} \gamma \sigma_0 de^p \right); \quad (12)$$

$$a(\sigma - \sigma_{\text{пр}})^{n_1} - e^p = (\dot{\epsilon}_0 - \dot{\epsilon})/\lambda. \quad (13)$$

За счет выбора параметра λ (при выполнении условия (9)) правую часть в (13) можно сделать пренебрежимо малой. С учетом принятого предположения из (13) следует

$$e^p = a(\sigma - \sigma_{\text{пр}})^{n_1}. \quad (14)$$

Из (12), (14) получаем неявно заданную зависимость

$$\sigma_0 = \left(\left(\frac{e^p}{a} \right)^{1/n_1} + \sigma_{\text{пр}} \right) \exp \left(- \int_0^{e^p} \gamma \sigma_0 de^p \right). \quad (15)$$

Уравнение (15) относительно σ_0 может быть решено методом итераций при заданных значениях e^p и известных значениях параметров материала a , n_1 , γ . На рис. 1,б,в приведены расчетные диаграммы упругопластического деформирования сплавов ЭП742 (ХН62БМКТЮ) и ЭИ698 (ХН73МБТЮ) при температуре 750 °С. Значения параметров реологической модели (1)–(11) для этих сплавов приведены в [10].

Таким образом, введение параметра поврежденности в уравнения состояния пластического деформирования позволяет описать участок закритического деформирования в режиме жесткого нагружения.

3. Исследование деформирования и разрушения металлических материалов в области ползучести. Рассмотрим нелинейные эффекты, возникающие в области разупрочнения и разрушения материала при ползучести и описываемые моделью (1)–(11). На рис. 2 приведены экспериментальные и рассчитанные по модели (1)–(11) кривые стационарной ползучести для сплава ЭП742 в широком диапазоне значений напряжения σ_0 при температуре 750 °С. Представленные на рис. 2,а кривые кратковременной ползучести соответствуют напряжениям в упругопластической области ($\sigma_0 > \sigma_{\text{пр}}$, $\sigma_{\text{пр}} = 608,2$ МПа), на рис. 2,б кривые 7 соответствуют напряжению $\sigma_0 = 686,7$ МПа, находящемуся за пределами области упругости, а остальные — напряжениям, принадлежащим упругой области.

Несмотря на то что напряжение σ_0 может не превышать предела пропорциональности, истинное напряжение σ с течением времени за счет накопления повреждений становится больше предела пропорциональности, поэтому на деформацию ползучести будет накладываться “мгновенная пластическая” деформация. При этом неупругая деформация

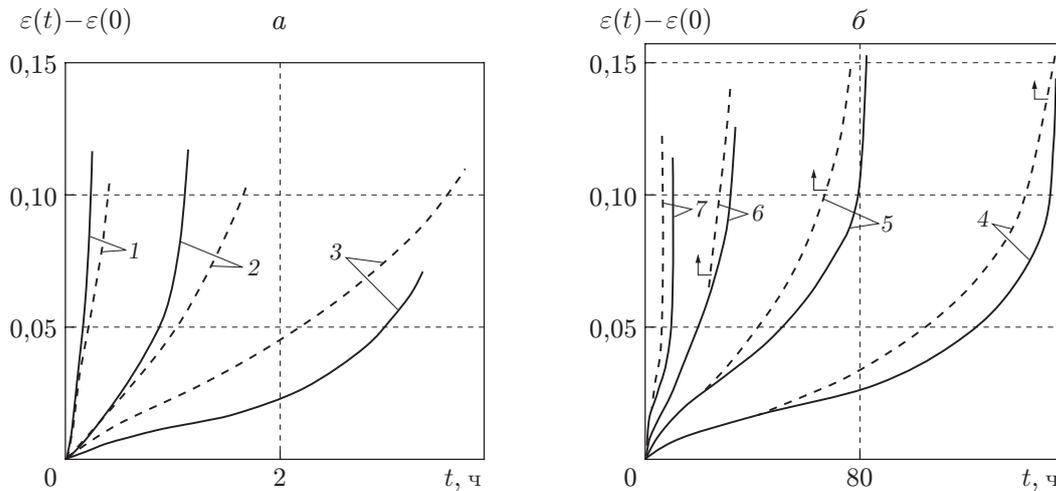


Рис. 2. Экспериментальные (сплошные линии) и расчетные (штриховые линии) кривые стационарной ползучести для сплава ЭП742 при температуре 750 °С: 1 — $\sigma_0 = 735,7$ МПа; 2 — $\sigma_0 = 784,8$ МПа; 3 — $\sigma_0 = 883,0$ МПа; 4 — $\sigma_0 = 470,9$ МПа; 5 — $\sigma_0 = 520,0$ МПа; 6 — $\sigma_0 = 570,0$ МПа; 7 — $\sigma_0 = 686,7$ МПа; стрелки — начало стадии “лавинной” ползучести

представляет собой сумму трех компонент: деформации ползучести p , деформации пластичности e^p и приращения упругой деформации $e(t) - e(0)$ за счет увеличения истинного напряжения, что соответствует так называемой четвертой (“лавинной”) стадии ползучести, описанной в работе [20] (см. рис. 2, б). На рис. 2, б начало стадии “лавинной” ползучести на расчетных кривых 4–6 показано стрелками. Заметим, что с позиций механики микронеоднородных сред появление четвертой стадии ползучести было обосновано в работах [10, 21]. В работе [20] используется чисто геометрический метод определения начала этой стадии, который применим лишь для стационарных кривых ползучести, в отличие от модели (1)–(11), применимой при любых законах изменения напряжения. К тому же предлагаемый подход на феноменологическом уровне обосновывает состояние материала в момент начала процесса “лавинной” ползучести.

На основе модели (1)–(10) и критерия разрушения (11) проанализируем процесс разрушения сплава ЭП742 при $T = 750$ °С при квазистатическом нагружении. Разрушение материала при постоянных значениях номинального напряжения σ_0 характеризуется немонотонной зависимостью неупругой деформации в момент разрушения от времени разрушения (кривая 1 на рис. 3) и нелинейной диаграммой длительной прочности в координатах $\lg \sigma_0 \sim \lg t_*$ (кривая 2 на рис. 3). Для дальнейшего анализа процесса ползучести используются аддитивные составляющие правой части критерия разрушения (11):

$$\Omega^p = \int_0^{t^*} \frac{\sigma(t)}{A_*^p} de^p(t), \quad \Omega^c = \int_0^{t^*} \frac{\sigma(t)}{A_*^c} dp(t)$$

(кривые 3, 4 на рис. 3). На рис. 3 показана область II, в которой

$$\frac{d\varepsilon}{d \lg t} \approx \text{const}, \quad \frac{d \lg \sigma_0}{d \lg t} \approx \text{const}, \quad \frac{d\Omega^p}{d \lg t} \approx 0, \quad \frac{d\Omega^c}{d \lg t} \approx 0, \quad (16)$$

т. е. в области II имеются прямолинейные участки диаграмм длительной прочности, предельной неупругой деформации в момент разрушения. Кроме того, в области II величины Ω^p, Ω^c изменяются незначительно, причем границы областей стабилизации величин Ω^p, Ω^c

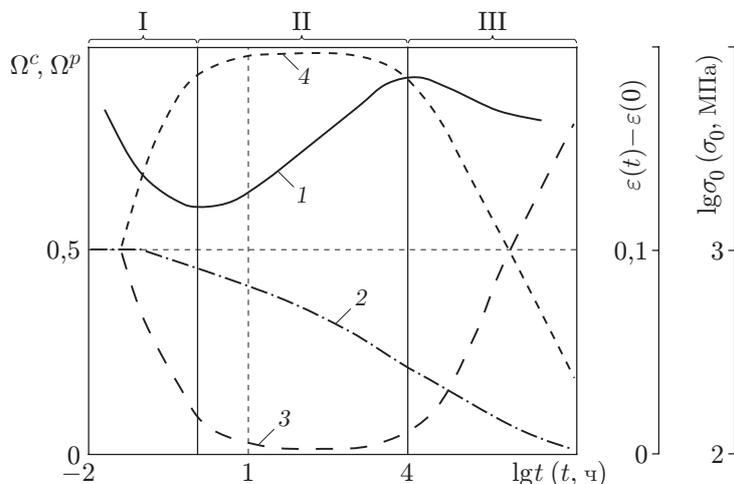


Рис. 3. Расчетные значения неупругой деформации в момент разрушения (1), диаграмма длительной прочности (2) и аддитивные составляющие критерия разрушения Ω^p (3) и Ω^c (4) для сплава ЭП742 при температуре 750 °С:

I — область, соответствующая кратковременной ползучести, II — область, соответствующая третьей стадии ползучести, III — область, соответствующая хрупкому разрушению

и $d\varepsilon/d \lg t$, $d \lg \sigma_0/d \lg t$, в которых выполняются условия (16), практически совпадают. Для математического подтверждения этого факта для каждой из четырех функций, заданных дискретными точками, был применен модифицированный критерий Н. В. Смирнова [22] принадлежности точек однородной совокупности (удовлетворения каждой совокупности соответствующему условию в (16)). В результате установлено, что для всех четырех функций левые и правые временные границы областей, удовлетворяющих условиям (16), практически совпадают. Вертикальные линии на рис. 3 соответствуют осредненным значениям времени для левой и правой границ указанных областей стабилизации. Таким образом, выделены три области реологического деформирования и разрушения сплава ЭП742 при температуре 750 °С. Область I соответствует кратковременной ползучести за пределом упругости, область II — развитой третьей стадии ползучести, длительность которой может составлять более 50 % общего времени до разрушения, область III можно назвать областью хрупкого разрушения, так как согласно результатам расчетов по модели (1)–(11) длительность третьей стадии ползучести составляет порядка $0,010 \div 0,001$ % общего времени деформирования до разрушения, поэтому вторая стадия заканчивается выходом кривой ползучести на практически вертикальную асимптоту.

Таким образом, введение в уравнения состояния для деформации пластичности параметра поврежденности позволяет описать ряд нелинейных закономерностей деформирования и разрушения металлических материалов.

4. Исследование реологической модели разупрочняющегося вязкоупругого материала. Среди всех известных в настоящее время материалов выделим класс вязкоупругих материалов (стеклотекстолиты, органопластики, полимеры, биоматериалы), для которых существует особая характеристика — напряжение $\sigma_{ПДС}$, называемое пределом длительного сопротивления и определяемое экспериментально для конкретного материала и внешних условий. При постоянной во времени нагрузке рассматриваемые материалы в условиях одноосного напряженного состояния ведут себя следующим образом. Если значение приложенного напряжения меньше $\sigma_{ПДС}$, то вязкоупругая деформация является ограниченной и асимптотически затухающей во времени, при этом разрушения образца не

происходит и при полной разгрузке наблюдается полная обратимость деформации. Если напряжение превышает значение $\sigma_{ПДС}$, то появляется стадия ускоренной ползучести, которая заканчивается разрушением образца. Отмеченное выше поведение вязкоупругих сред отличается от реологического поведения металлических материалов. Рассмотрим частный случай модели (1)–(11) при $e^p = 0$, $v = 0$, $w = 0$. Уравнения состояния с начальными условиями $p(0) = 0$, $\omega(0) = 0$ принимают вид

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{k=1}^s p_k(t), & \dot{p}_k(t) &= \lambda_k \left(a_k \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right)^{n_2} - p_k(t) \right), \\ \sigma(t) &= \sigma_0(t)(1 + \omega(t)), & \dot{\omega}(t) &= \alpha \sigma(t) \dot{p}(t). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $p(t)$ — деформация ползучести; $p_k(t)$ — компоненты деформации ползучести.

Проанализируем подробно случай $s = 2$. Если поврежденность незначительная и величиной ω можно пренебречь ($\omega \approx 0$), то $\sigma \simeq \sigma_0$ и решение (17) при $\sigma_0 = \text{const}$ задается функцией

$$p(t) = \sum_{k=1}^2 a_k (1 - e^{-\lambda_k t}) \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_*} \right)^{n_2},$$

т. е. имеет место асимптотически ограниченная (при $t \rightarrow \infty$) ползучесть, характеризуемая двумя экспоненциальными слагаемыми. Покажем, что при больших значениях параметра поврежденности ω система (17) описывает третью стадию ползучести, которая при $\sigma_0 = \text{const}$ соответствует неустойчивости решения данной системы.

Используя начальные условия $p(0) = 0$, $\omega(0) = 0$, из последних двух соотношений (17) находим

$$1 + \omega = e^{\alpha \sigma_0 p}. \quad (18)$$

Запишем второе соотношение (17) с учетом (18):

$$\dot{p}_k(t) = \lambda_k \left(a_k (\sigma_0 / \sigma_*)^{n_2} e^{\alpha \sigma_0 p n_2} - p_k(t) \right), \quad k = 1, 2. \quad (19)$$

Введем следующие обозначения:

$$(\sigma_0 / \sigma_*)^{n_2} = b, \quad \alpha \sigma_0 n_2 = \eta. \quad (20)$$

С учетом (20) уравнения (19) принимают вид

$$\dot{p}_k(t) = \lambda_k (a_k b e^{\eta p} - p_k(t)), \quad k = 1, 2. \quad (21)$$

Таким образом, задача сводится к исследованию устойчивости решения системы (21) с учетом первого соотношения (17) при различных постоянных значениях напряжения σ_0 . Применим метод Ляпунова исследования устойчивости по первому приближению, вводя возмущенные переменные:

$$y_k = p_k - p_k^0, \quad k = 1, 2, \quad (22)$$

где p_k^0 ($k = 1, 2$) — установившиеся движения. Тогда $p^0 = p_1^0 + p_2^0$ также является установившимся движением. Найдем это движение из системы (21), полагая возмущения равными нулю ($y_1 = 0$, $y_2 = 0$):

$$p_1^0 = a_1 b e^{\eta p^0}, \quad p_2^0 = a_2 b e^{\eta p^0}. \quad (23)$$

Тогда

$$p^0 = (a_1 + a_2) b e^{\eta p^0}. \quad (24)$$

Уравнение (24) при заданном значении σ_0 можно разрешить численными методами.

Составим систему уравнений возмущенного движения, учитывая, что согласно (22) $\dot{p}_k = \dot{y}_k$:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_1 a_1 b e^{\eta(p^0 + y_1 + y_2)} - \lambda_1 (p_1^0 + y_1), \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 a_2 b e^{\eta(p^0 + y_1 + y_2)} - \lambda_2 (p_2^0 + y_2). \end{aligned} \quad (25)$$

Разложим экспоненту в правых частях уравнений системы (25) как функцию двух переменных y_1, y_2 в ряд Тейлора в окрестности точки $(0; 0)$:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_1 a_1 b e^{\eta p^0} + \lambda_1 a_1 b \eta e^{\eta p^0} (y_1 + y_2) - \lambda_1 p_1^0 - \lambda_1 y_1 + o(y_1 + y_2), \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 a_2 b e^{\eta p^0} + \lambda_2 a_2 b \eta e^{\eta p^0} (y_1 + y_2) - \lambda_2 p_2^0 - \lambda_2 y_2 + o(y_1 + y_2). \end{aligned} \quad (26)$$

Исключая из уравнений (26) слагаемые более высокого порядка малости, чем $y_1 + y_2$, получаем систему уравнений в первом приближении. С учетом равенства (23) имеем

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_1 (\eta p_1^0 - 1) y_1 + \lambda_1 \eta p_1^0 y_2, \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 \eta p_2^0 y_1 + \lambda_2 (\eta p_2^0 - 1) y_2. \end{aligned} \quad (27)$$

Исследуем на устойчивость положение равновесия $y_1 = 0, y_2 = 0$ системы уравнений в первом приближении (27). Представим систему уравнений в матричном виде

$$\frac{dy}{dt} = Ay,$$

где $y = [y_1 \ y_2]^T$;

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 (\eta p_1^0 - 1) & \lambda_1 \eta p_1^0 \\ \lambda_2 \eta p_2^0 & \lambda_2 (\eta p_2^0 - 1) \end{bmatrix}.$$

Найдем корни характеристического уравнения $\det(A - rE) = 0$, где E — единичная матрица:

$$r^2 + r(\lambda_1(1 - \eta p_1^0) + \lambda_2(1 - \eta p_2^0)) + \lambda_1 \lambda_2 (1 - \eta(p_1^0 + p_2^0)) = 0.$$

Используем необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости положения равновесия (условие Стодолы), которое в данном случае принимает вид

$$\lambda_1(1 - \eta p_1^0) + \lambda_2(1 - \eta p_2^0) > 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 (1 - \eta(p_1^0 + p_2^0)) > 0. \quad (28)$$

Таким образом, при выполнении условия (28), соответствующего заданному значению σ_0 , положение равновесия (24) системы (17) будет асимптотически устойчивым.

Конкретизируем условие (28) для рассматриваемого частного случая, в котором по физическим соображениям для констант принимаются следующие неравенства:

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad p_1^0 > 0, \quad p_2^0 > 0. \quad (29)$$

Согласно (29) $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, поэтому второе условие (28) упрощается:

$$\lambda_1 + \lambda_2 - \eta(\lambda_1 p_1^0 + \lambda_2 p_2^0) > 0, \quad \eta < (p_1^0 + p_2^0)^{-1}.$$

Тогда

$$\eta < \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 p_1^0 + \lambda_2 p_2^0}, \quad \eta < \frac{1}{p^0}. \quad (30)$$

Рассмотрим более подробно первое неравенство (30), преобразовав знаменатель с учетом (23):

$$\eta < \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) b e^{\eta p^0}}. \quad (31)$$

Записывая (24) в виде $b e^{\eta p^0} = p^0 / (a_1 + a_2)$ и подставляя это выражение в (31), получаем

$$\eta < \frac{1}{p^0} \left(1 + \frac{\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1}{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2} \right). \quad (32)$$

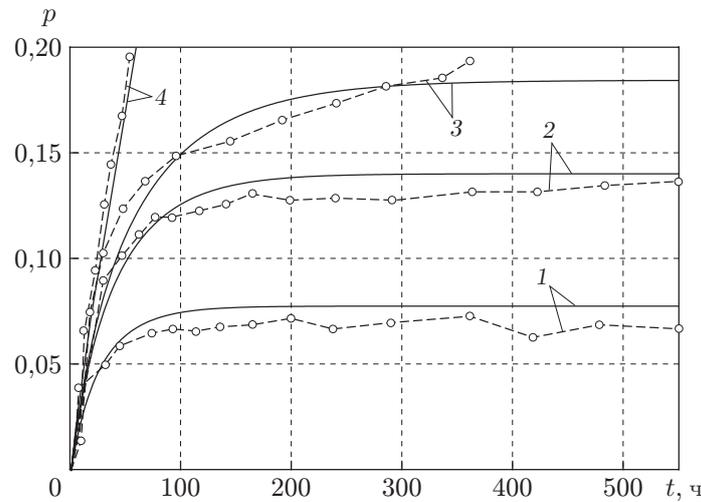


Рис. 4. Расчетные (сплошные линии) и экспериментальные (штриховые линии) кривые ползучести древесного пластика ДСП-Г при температуре 20 °С и постоянных напряжениях:
 1 — $\sigma_0 = 36$ МПа; 2 — $\sigma_0 = 71$ МПа; 3 — $\sigma_0 = 82$ МПа; 4 — $\sigma_0 = 112$ МПа

Из условий (29) следует, что

$$\frac{\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1}{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2} > 0,$$

поэтому правая часть неравенства (32) больше правой части второго неравенства (30). С учетом (20) получаем условие асимптотической устойчивости в виде

$$\sigma_0 p^0 < 1/(\alpha n_2), \tag{33}$$

где p^0 определяется в (24).

Для экспериментальной проверки модели частного вида (17) использованы данные о ползучести древесного пластика ДСП-Г при температуре 20 °С [23] (штриховые линии на рис. 4). С использованием методики, предложенной в работе [24], для этого материала получены следующие значения параметров феноменологической модели (17): $a = 2$, $a_1 = 4,87 \cdot 10^{-3}$, $a_2 = 2,02 \cdot 10^{-3}$, $\lambda_1 = 0,033$, $\lambda_2 = 0,076$, $n_2 = 0,39$, $\alpha_1 = 0,112$, $m_1 = -2,48 \cdot 10^{-4}$, $\sigma_* = 35$ МПа. Система (17) решалась численно методом Эйлера при значениях напряжения $\sigma_0 = 36, 71, 82, 112$ МПа. Результаты расчетов представлены на рис. 4 (сплошные линии). Видно, что расчетные и экспериментальные данные удовлетворительно согласуются.

С использованием решения системы уравнений, полученных из (24), (33), определена граница области устойчивого деформирования, т. е. величина $\sigma_{ПДС}$:

$$(\sigma_{ПДС})^{m_2+1} p^0 = (\alpha_1 n_1)^{-1}, \quad p^0 = (a_1 + a_2)(\sigma_{ПДС}/\sigma_*)^{n_1} \exp(\alpha_1 \sigma_{ПДС} n_1 p^0) \tag{34}$$

(p_0 — асимптотическое значение деформации ползучести, соответствующее напряжению $\sigma_{ПДС}$).

При расчете с использованием аналитического критерия устойчивости (34) получено значение $\sigma_{ПДС}^p = 82$ МПа.

Следует отметить, что при численном решении системы (17) методом Эйлера значение $\sigma_{ПДС}$ является граничным значением номинального напряжения σ_0 , при котором численный метод либо сходится ($\sigma_0 < \sigma_{ПДС}$, при этом имеет место асимптотически ограниченная ползучесть), либо расходится ($\sigma_0 \geq \sigma_{ПДС}$, при этом имеет место неограниченная

ускоренная ползучесть). Численным способом получено значение $\sigma_{\text{ПДС}}^{\text{ч}} = 80,3$ МПа. Согласно экспериментальным данным [23] $\sigma_{\text{ПДС}}^{\text{э}} = (76 \pm 6)$ МПа.

Таким образом, установлена связь между устойчивостью решений системы (17) и устойчивостью численных методов решения этой системы, при этом появление стадии ускоренной ползучести обусловлено нарушением условий устойчивого деформирования (33), (34) и потерей устойчивости (расходимостью) численного алгоритма. Аналогичные результаты для пластически разупрочняющихся материалов получены В. В. Стружановым [25, 26].

Таким образом, использование кинетических уравнений Работнова с параметрами поврежденности позволяет описать процессы ползучести и разрушения материалов при различных видах нагружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1958. № 8. С. 26–31.
2. Работнов Ю. Н. О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
3. Работнов Ю. Н. О разрушении вследствие ползучести // ПМТФ. 1963. № 2. С. 113–123.
4. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
5. Локощенко А. М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. М.: Моск. гос. индустр. ун-т, 2007.
6. Локощенко А. М. Применение кинетической теории при анализе длительного высокотемпературного разрушения металлов в условиях сложного напряженного состояния (обзор) // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 4. С. 149–164.
7. Соснин О. В. Энергетический вариант теории ползучести / О. В. Соснин, Б. В. Горев, А. Ф. Никитенко. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1986.
8. Никитенко А. Ф. Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. Новосибирск: Новосиб. гос. архит.-строит. ун-т, 1997.
9. Новожилов В. В. Микронапряжения в конструкционных материалах / В. В. Новожилов, Ю. И. Кадашевич. Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1990.
10. Радченко В. П. Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций / В. П. Радченко, Ю. А. Еремин. М.: Машиностроение-1, 2004.
11. Розенберг В. М. Основы жаропрочности металлических материалов. М.: Металлургия, 1973.
12. Радченко В. П., Дудкин С. А., Тимофеев М. И. Экспериментальное исследование и анализ полей неупругих микро- и макродеформаций сплава АД-1 // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2002. № 16. С. 111–117.
13. Кадашевич Ю. И., Мосолов А. Б. Эндохронные теории пластичности, основные положения, перспективы развития // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1989. № 1. С. 161–168.
14. Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П. Формулировка критерия прочности материалов для эндохронной теории неупругости, учитывающей микроразрушения при больших деформациях // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2010. № 1. С. 53–59.
15. Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П. Исследование одноосного и двуосного нагружения разупрочняющихся материалов по эндохронной теории неупругости // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. № 1. С. 110–115.

16. **Valanis K. C.** Continuum foundations of endochronic plasticity // Trans. ASME. J. Engng Mater. Technol. 1984. V. 106, N 4. P. 367–375.
17. **Pan W.-F., Chiang W.-J., Wang C.-K.** Endochronic analysis for rate-dependent elasto-plastic deformation // Intern. J. Solids Structures. 1999. V. 36, N 21. P. 3215–3237.
18. **Жуков А. М.** Деформирование малоуглеродистой стали при фиксированных скоростях нагружения // Пробл. прочности. 1974. № 12. С. 26–30.
19. **Жуков А. М.** Ползучесть металлов при комнатной температуре после малой частичной нагрузки // Прочность материалов и конструкций. Свердловск: Урал. науч. центр АН СССР, 1986. С. 64–68.
20. **Баумштейн М. В., Бадаев А. Н.** К вопросу определения области “лавинной” ползучести // Пробл. прочности. 1980. № 11. С. 19–21.
21. **Радченко В. П., Кузьмин С. В.** Структурная модель накопления повреждений и разрушения металлов при ползучести // Пробл. прочности. 1989. № 11. С. 18–23.
22. **Смирнов Н. В.** Курс теории вероятности и математической статистики для технических приложений / Н. В. Смирнов, И. В. Дунин-Барковский. М.: Наука, 1969.
23. **Белянкин Ф. П.** Прочность и деформативность слоистых пластикатов / Ф. П. Белянкин, В. Ф. Яценко, Г. И. Дыбенко. Киев: Наук. думка, 1964.
24. **Горбунов С. В.** Методика определения параметров модели, описывающей ползучесть и разупрочнение вязкоупругих материалов // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. 8-й Всерос. науч. конф. с междунар. участием. Самара: Сам. гос. техн. ун-т, 2011. Ч. 1. С. 81–86.
25. **Жижерин С. В., Стружанов В. В., Миронов В. И.** Итерационные методы расчета напряжений при чистом изгибе балки из повреждаемого материала // Вычисл. технологии. 2001. Т. 6, № 5. С. 24–33.
26. **Стружанов В. В., Бахарева Е. А.** Итерационные процедуры расчета параметров равновесия и устойчивость процесса чистого изгиба балок из пластических и хрупких разупрочняющихся материалов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2010. № 1. С. 84–95.

Поступила в редакцию 21/VI 2013 г.
