

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАКОНЫ СУХОГО ТРЕНИЯ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. Е. Алексеев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается задача деформирования упругого тела, на границе которого поставлены условия сухого трения. Исследуются различные варианты законов трения, в том числе линейные однопараметрические и нелинейные двухпараметрические. Предлагается общий вид нелинейной функции с двумя константами, определяющей зависимость между силой трения и нормальным давлением. Решается задача сжатия упругой полосы шероховатыми плитами при различных условиях трения на поверхностях контакта. Используются уравнения пластин, допускающие задание произвольных условий на лицевых поверхностях без понижения дифференциального порядка уравнений. Определяется неизвестная граница зон полного контакта и скольжения. Проводится сравнение решений, полученных с использованием различных вариантов условий трения на контактных поверхностях.

1. Постановка задачи. Рассмотрим упругое тело объемом V , ограниченное поверхностью S , на части которой S_τ поставлены условия трения. Пусть \mathbf{P} — вектор внешних сил, действующих на поверхности S . Разложим \mathbf{P} на касательную $\boldsymbol{\tau}$ и нормальную σ_n к поверхности S составляющие:

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{\tau} + \sigma_n \mathbf{n}, \quad (1)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали.

Закон сухого трения (трения без смазки) означает, что на контактной поверхности S_τ поставлены такие условия, при которых величина касательных напряжений определяется только величиной нормальных напряжений, т. е. касательная и нормальная составляющие вектора внешних сил (1) связаны соотношением

$$|\boldsymbol{\tau}| = \tau(|\sigma_n|, \gamma_i), \quad i = \overline{1, N}. \quad (2)$$

Здесь τ — некоторая положительная функция; γ_i — набор параметров, характеризующих шероховатость поверхности контакта, прочностные свойства контактирующих тел и т. п. Функция $\tau(|\sigma_n|, \gamma_i)$ в (2) определяет конкретный закон сухого трения на поверхности контакта.

К простейшим вариантам математического моделирования процесса трения следует отнести однопараметрические ($N = 1$) законы

$$\tau(|\sigma_n|, \tau_s) = \tau_s; \quad (3)$$

$$\tau(|\sigma_n|, k) = k|\sigma_n|. \quad (4)$$

Первое соотношение — закон постоянной силы трения, второе — закон трения Амонтона — Кулона. Параметр τ_s можно интерпретировать как предел текучести контактного слоя. Законы трения (3), (4) исследованы теоретически [1] и широко применяются в расчетах. Однако использование соотношений (3), (4) в ряде случаев приводит к неудовлетворительным результатам. Так, закон постоянной силы трения (3) достаточно точно

описывает закономерности внешнего трения в зонах высоких нормальных напряжений, но дает значительные погрешности в областях с нормальными напряжениями, близкими к нулю. Закон трения Амонтона — Кулона (4) применим при малых значениях нормального давления. В [2] отмечено, что между удельной силой трения и нормальным удельным давлением существует более сложная зависимость. В качестве такой зависимости, свободной от отмеченных выше недостатков, целесообразно использовать двухпараметрические функции трения ($N = 2$), зависящие одновременно от параметров τ_s и k :

$$|\boldsymbol{\tau}| = \tau(|\sigma_n|, k, \tau_s) = \tau_s g(\eta), \quad \eta = k|\sigma_n|/\tau_s. \quad (5)$$

Примером двухпараметрической зависимости может служить закон трения Прандтля — Ильющина [3, 4], которому соответствует кусочно-линейная функция

$$g_c(\eta) = 0,5(\eta + 1 - |\eta - 1|), \quad \eta \in [0, \infty). \quad (6)$$

В зонах с малыми значениями нормального напряжения ($\eta < 1$) из (5) следует закон трения Амонтона — Кулона (3), а в областях высоких давлений ($\eta \geq 1$) — закон постоянной силы трения (4).

Распределение контактных напряжений более полно описывают соотношения, основанные на использовании нелинейных функций $g(\eta)$, $\eta \in [0, \infty)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} g(0) &= 0, & g(\infty) &= 1, \\ \frac{dg}{d\eta}(0) &= 1, & \frac{dg}{d\eta}(\eta) &\geq 0, & \eta &\in [0, \infty). \end{aligned} \quad (7)$$

Функция $g(\eta)$ положительная, монотонно возрастающая, с асимптотой при $\eta \rightarrow \infty$. При любых $\eta \in [0, \infty)$ имеет место неравенство

$$g(\eta) \leq g_c(\eta) \leq 1. \quad (8)$$

Условия (7) определяют выпуклое множество функций G , каждая из которых задает нелинейный двухпараметрический закон трения (5). Элементами этого множества являются, например, функции

$$g(\eta) = \eta/(1 + \eta), \quad g(\eta) = 1 - e^{-\eta}, \quad g(\eta) = \eta/\sqrt{1 + \eta^2}, \quad g(\eta) = \text{th } \eta.$$

Первые две зависимости с точностью до обозначений совпадают с зависимостями Тириона и Бартенева — Лаврентьева, полученными при обработке экспериментальных данных [5].

Подобно (1) на границе S разложим вектор перемещений на касательную \mathbf{u}_τ и нормальную u_n составляющие:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\tau + u_n \mathbf{n}.$$

Сформулируем двухпараметрический закон сухого трения (6) в форме, аналогичной [1]:

- на поверхности S_τ $\sigma_n \leq 0$, $u_n = u_*$;
- в зоне идеального контакта

$$|\boldsymbol{\tau}| < \tau_s g(\eta) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_\tau = 0; \quad (9)$$

- в зоне проскальзывания

$$|\boldsymbol{\tau}| = \tau_s g(\eta) \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda \geq 0 \quad \mathbf{u}_\tau = -\lambda \boldsymbol{\tau}. \quad (10)$$

Из (10) следует, что в зоне проскальзывания функция λ имеет вид

$$\lambda = |\mathbf{u}_\tau|/(\tau_s g(\eta)) \quad (11)$$

и

$$\boldsymbol{\tau} = -\text{sign}(\mathbf{u}_\tau) \tau_s g(\eta), \quad \eta = k|\sigma_n|/\tau_s. \quad (12)$$

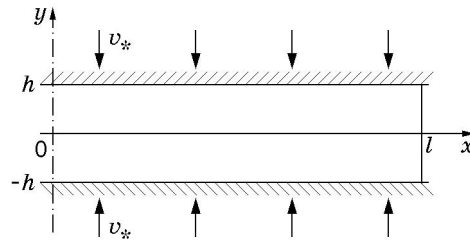


Рис. 1

Соотношения (9)–(12) при заданной функции $g(\eta)$, удовлетворяющей условиям (7), определяют двухпараметрический нелинейный закон трения с неизвестной границей зон идеального контакта и проскальзывания.

Для сравнения одно- и двухпараметрических законов трения рассмотрим задачу сжатия упругой пластины шероховатыми плитами. Принимаются три варианта условий трения на контактных поверхностях: закон постоянного касательного напряжения, закон трения Кулона и закон Прандтля — Ильюшина с кусочно-линейной функцией трения. Эти условия выбраны по следующим причинам. Закон постоянной силы трения и закон трения Кулона являются классическими и наиболее часто используются в расчетах, кусочно-линейная зависимость является комбинацией этих законов. В то же время кусочно-линейная функция трения зависит от двух параметров и обладает предельным свойством (см. неравенство (8)) для множества G функций трения, удовлетворяющих условиям (7).

2. Сжатие полосы шероховатыми плитами. Пластина толщиной $2h$ и шириной $2l$ в условиях плоской деформации сжимается жесткими шероховатыми плитами с заданным перемещением v_* (рис. 1).

Воспользуемся уравнениями упругого деформирования пластин и оболочек [6, 7], основанными на разложении искомых функций в ряды по полиномам Лежандра. Эти уравнения допускают задание произвольных условий на лицевых поверхностях без понижения дифференциального порядка уравнений. Могут задаваться напряжения, перемещения, смешанные условия. Это обстоятельство позволяет корректно сформулировать условия сопряжения на границе зон скольжения и прилипания (идеального контакта). Такие уравнения использовались при решении задач упругого деформирования слоистых тел [8–10].

Напряжения аппроксимируются отрезками рядов по полиномам Лежандра $P_k(\xi)$ ($\xi = y/h$):

$$2h\sigma_x = N + 3MP_1(\xi)/h, \quad \sigma_y = p_0 + \Delta p P_1(\xi), \quad 2h\sigma_{xy} = Q + 2h\Delta q P_1(\xi) + (2hq_0 - Q)P_2(\xi),$$

$$\Delta p = 0,5(p^+ - p^-), \quad p_0 = 0,5(p^+ + p^-), \quad \Delta q = 0,5(q^+ - q^-), \quad q_0 = 0,5(q^+ + q^-). \quad (13)$$

Здесь $N = \int_{-h}^h \sigma_x dy$ — усилие; $M = \int_{-h}^h \sigma_x y dy$ — момент; $Q = \int_{-h}^h \sigma_{xy} dy$ — перерезывающая сила; p^\pm, q^\pm — нормальные и касательные напряжения на контактных плоскостях ($\xi = \pm 1$).

Перемещения и деформации аппроксимируются отрезками рядов

$$u_x = u + \psi P_1(\xi) + (u_0 - u)P_2(\xi) + (\Delta u - \psi)P_3(\xi), \quad u_y = v + \Delta v P_1(\xi) + (v_0 - v)P_2(\xi),$$

$$e_x = \frac{du}{dx} + \frac{d\psi}{dx} P_1(\xi), \quad e_y = \frac{1}{h} \Delta v + \frac{3}{h}(v_0 - v)P_1(\xi),$$

$$e_{xy} = \frac{dv}{dx} + \frac{1}{h} \Delta u + \frac{3}{h} (u_0 - u) P_1(\xi) + \frac{5}{h} (\Delta u - \psi) P_2(\xi), \quad (14)$$

$$\Delta u = 0,5(u^+ - u^-), \quad u_0 = 0,5(u^+ + u^-), \quad \Delta v = 0,5(v^+ - v^-), \quad v_0 = 0,5(v^+ + v^-).$$

Здесь $u = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_x dy$, $v = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_y dy$ — осредненные по толщине перемещения; $\psi =$

$\frac{3}{2} \int_{-1}^1 u_{xy} dy$ — угол поворота нормали к срединной плоскости $y = 0$; v^\pm , u^\pm — нормальные

и касательные перемещения на контактных поверхностях ($\xi = \pm 1$).

Неизвестные функции, входящие в коэффициенты полиномов в формулах (13), (14), определяются из системы уравнений, включающей:

— уравнения равновесия

$$\frac{dN}{dx} + 2\Delta q = 0, \quad \frac{dM}{dx} - Q + 2hq_0 = 0, \quad \frac{dQ}{dx} + 2\Delta p = 0; \quad (15)$$

— дифференциальные уравнения, полученные из закона Гука:

$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{2hE_*} - \nu_* \frac{p_0}{E_*}, \quad \frac{d\psi}{dx} = \frac{3M}{2h^2E_*} - \nu_* \frac{\Delta p}{E_*}, \quad \frac{dv}{dx} + \frac{\Delta u}{h} = \frac{Q}{2h\mu}; \quad (16)$$

— алгебраические уравнения, полученные из закона Гука:

$$\begin{aligned} u_0 - u &= \frac{h}{3\mu} \Delta q, \quad \Delta u - \psi = \frac{h}{5\mu} \left(q_0 - \frac{Q}{2h} \right), \quad \Delta v = h \frac{p_0}{E_*} - \nu_* \frac{N}{2E_*}, \\ v_0 - v &= h \frac{\Delta p}{3E_*} - \nu_* \frac{M}{2hE_*}, \quad E_* = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad \nu_* = \frac{\nu}{1 - \nu}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь E , μ — модули Юнга и сдвига; ν — коэффициент Пуассона.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (15), (16) относительно неизвестных функций N , M , Q , u , ψ , v имеет шестой порядок.

Неизвестные функции Δu , u_0 , Δv , v_0 , Δp , p_0 , Δq , q_0 определяются из уравнений (17) и граничных условий на контактных поверхностях $\xi = \pm 1$.

Поскольку задача симметрична относительно плоскости $y = 0$, на контактных поверхностях $y = \pm h$ ($\xi = \pm 1$) выполняются следующие соотношения для напряжений: $q^+ = -q^- = q$, $p^+ = p^- = p$. Соответственно для перемещений $v^+ = -v^- = -v_*$, $u^+ = u^- = w$. Подставляя эти соотношения в (13), (14), получаем

$$\begin{aligned} q_0 &= 0, \quad \Delta q = q, \quad p_0 = p, \quad \Delta p = 0, \\ v_0 &= 0, \quad \Delta v = -v_*, \quad u_0 = w, \quad \Delta u = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь q , p , w — неизвестные функции; v_* — заданное смещение плит.

При $x = 0$ (плоскость симметрии) и $x = l$ (свободная поверхность) имеем следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad \psi = 0, \quad Q = 0 \quad \text{при } x = 0, \\ N &= 0, \quad M = 0, \quad Q = 0 \quad \text{при } x = l. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя (18) в систему уравнений (15)–(17), с учетом краевых условий (19) получаем $M = 0$, $Q = 0$, $\psi = 0$, $v = 0$. Неизвестными остаются функции N , u , p , q , w , которые определяются из уравнений

$$\frac{dN}{dx} + 2q = 0, \quad \frac{du}{dx} - \frac{N}{2hE_*} + \frac{\nu_* p}{E_*} = 0, \quad (20)$$

$$u - w + hq/(3\mu) = 0, \quad v_* + hp/E_* - \nu_*N/(2E_*) = 0$$

с граничными условиями

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad N = 0 \quad \text{при} \quad x = l. \quad (21)$$

Пятое уравнение, необходимое для замыкания системы уравнений (20), следует из выбранного закона трения.

Рассмотрим три варианта граничных условий на контактных поверхностях: полный контакт ($w = 0$), постоянное касательное напряжение ($q = -\tau_s$) и закон трения Кулона ($q = kp$). В первом случае к уравнениям (20) нужно добавить условие

$$w = 0. \quad (22)$$

Полученная при этом система уравнений (20), (22) имеет решение

$$u = A_1 \operatorname{sh}(\alpha x), \quad \alpha = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{3(1 - \nu_*)}{2}}, \quad N = \frac{2hE_*}{1 - \nu_*^2} \left(\alpha A_1 \operatorname{ch}(\alpha x) - \frac{\nu_* v_*}{h} \right), \quad (23)$$

$$q = -\frac{3E_*}{2h(1 + \nu_*)} A_1 \operatorname{sh}(\alpha x), \quad p = \frac{E_*}{1 - \nu_*^2} \left(\alpha \nu_* A_1 \operatorname{ch}(\alpha x) - \frac{v_*}{h} \right).$$

Данное решение получено с учетом предположения о том, что область полного контакта примыкает к оси ($x = 0$).

В случае постоянного касательного напряжения необходимо добавить равенство

$$q = -\tau_s. \quad (24)$$

Система уравнений (20), (24) имеет решение

$$N = 2\tau_s x + A_2, \quad u = (1 - \nu_*^2)(\tau_s x^2 + A_2 x)/(2hE_*) + \nu_* v_* x/h + B_2, \quad (25)$$

$$q = -\tau_s, \quad p = \nu_*(2\tau_s x + A_2)/(2h) - E_* v_*/h.$$

В случае трения по закону Кулона добавляется условие

$$q = kp. \quad (26)$$

Система уравнений (20), (26) имеет решение

$$N = A_3 \exp\left(-\frac{k\nu_* x}{h}\right) + 2\frac{E_*}{\nu_*} v_*, \quad u = -\frac{1 - \nu_*^2}{2k\nu_* E_*} A_3 \exp\left(-\frac{k\nu_* x}{h}\right) + \frac{v_*}{\nu_* h} x + B_3, \quad (27)$$

$$q = \frac{k\nu_*}{2h} A_3 \exp\left(-\frac{k\nu_* x}{h}\right), \quad p = \frac{\nu_*}{2h} A_3 \exp\left(-\frac{k\nu_* x}{h}\right).$$

Решение каждой из рассматриваемых ниже контактных задач является комбинацией полученных решений. Неизвестные постоянные определяются из граничных условий (21) и условий сопряжения на границах раздела областей с различными условиями трения:

$$[u] = 0, \quad [N] = 0, \quad [q] = 0 \quad \text{при} \quad x = l_i \quad (28)$$

(квадратные скобки обозначают скачок функции).

2.1. *Закон постоянной силы трения.* При движении плит сначала возникает одна зона полного контакта (решение (22)). Постоянная A_1 определяется из граничного условия на свободной поверхности (21)

$$A_1 = \nu_* v_*/(\alpha h \operatorname{ch}(\alpha l)).$$

С увеличением степени сжатия увеличиваются контактные напряжения. При $v_* = v_{p1}$, где $v_{p1} = (\tau_s(1 - \nu_*^2)/(\nu_* E_* \alpha)) \operatorname{cth}(\alpha l)$, контактное касательное напряжение $|q|$ на краю пластины при $x = l$ достигает значения τ_s и появляется вторая зона — зона скольжения.

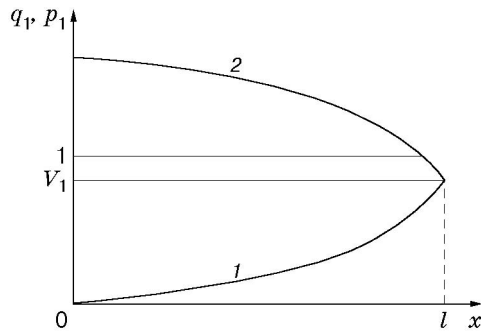


Рис. 2

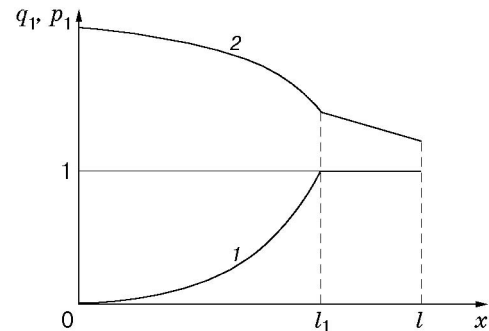


Рис. 3

Введем следующие безразмерные величины:

$$q_1 = |q|/\tau_s, \quad p_1 = |p|h/(E_*v_{p1}), \quad V_1 = v_*/v_{p1}.$$

На рис. 2 показано распределение безразмерных контактных напряжений q_1 (кривая 1) и p_1 (кривая 2).

При $v_* > v_{p1}$ решение задачи представляет собой комбинацию двух решений (23), (25). Область идеального контакта примыкает к оси y , область проскальзывания — к свободной поверхности $x = l$. Пусть $x = l_1$ — уравнение неизвестной границы зон проскальзывания и прилипания. Константы, входящие в решения (23), (25), находятся из граничных условий (21) и условий сопряжения (28).

Постоянные A_1, A_2, B_2 принимают следующие значения:

$$A_1 = \frac{(1 - \nu_*^2)\tau_s(l_1 - l) + \nu_*v_*E_*}{\alpha h E_* \operatorname{ch}(\alpha l_1)}, \quad A_2 = -2\tau_s l, \quad B_2 = \operatorname{sh}(\alpha l_1)A_1 - \frac{\tau_s l_1(l_1 - 2l)}{2h E_*} - \frac{\nu_*v_*l_1}{h}.$$

Для определения границы $x = l_1$ ($0 < l_1 < l$) зон полного контакта и проскальзывания получаем трансцендентное уравнение

$$\frac{(1 - \nu_*^2)\tau_s}{\nu_*E_*} \left(\frac{\operatorname{cth}(\alpha l_1)}{\alpha} + l - l_1 \right) = v_*.$$

С увеличением v_* зона скольжения увеличивается, граница $x = l_1$ смещается к центру.

На рис. 3 показано распределение безразмерных контактных напряжений q_1 (кривая 1) и p_1 (кривая 2).

Анализ полученного решения позволяет сделать следующие выводы. При движении плит с увеличением нагрузки сила трения достигает предельного значения и затем не меняется, что адекватно отражает особенности процессов внешнего трения [5]. В то же время при малых значениях нормального контактного напряжения из решения задачи следует, что при любом сколь угодно малом значении τ_s (поверхность контакта близка к идеально гладкой) существует область начальных смещений $0 < v_* < v_{p1}$, при которых имеет место полный контакт (прилипание) по всей поверхности пластины, что не соответствует экспериментальным данным.

2.2. Закон трения Амонтона — Кулона. При использовании закона трения Амонтона — Кулона возникают две зоны: зона идеального контакта (решение (23)), примыкающая к оси y , и зона проскальзывания (решение (27)), прилегающая к свободной поверхности $x = l$. Неизвестные постоянные, входящие в эти решения, определяются из граничных условий (21) и условий сопряжения (28) на границе раздела областей $x = l_2$.

Постоянные A_1, A_3, B_3 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{2k(1 + \nu_*)}{3 \operatorname{sh}(\alpha l_2)} \exp\left(\frac{k\nu_*(l - l_2)}{h}\right), \quad A_3 = -\frac{2E_*v_*}{\nu_*} \exp\left(\frac{k\nu_*l}{h}\right),$$

$$B_3 = v_* \left[\left(\frac{2k(1 + \nu_*)}{3} - \frac{1 - \nu_*^2}{k\nu_*^2} \right) \exp \left(\frac{k\nu_*(l - l_2)}{h} \right) - \frac{l_2}{\nu_* h} \right].$$

Граница раздела зон прилипания и скольжения $x = l_2$ находится из трансцендентного уравнения

$$(1 - \nu_*^2) \exp \left(\frac{k\nu_*(l - l_2)}{h} \right) \left(\frac{k\nu_* \operatorname{cth}(\alpha l_2)}{h\alpha} + 1 \right) = 1. \quad (29)$$

Из (29) следует, что l_2 не зависит от v_* , т. е. при смещении плит положение границы раздела зон прилипания и скольжения не меняется.

Максимум контактного касательного напряжения достигается на границе раздела зон $x = l_2$:

$$\max |q| = (v_* k E_* / h) \exp(k\nu_*(l - l_2)/h). \quad (30)$$

При движении плит значение $\max |q|$ увеличивается и при $v_* = v_{p2}$, $v_{p2} = h\tau_s \exp(k\nu(l_2 - l)/h)/(kE)$ достигает значения τ_s .

Из (30) следует, что даже при малых значениях v_* (малых смещениях плит) значение $\max |q|$ может превышать предел текучести контактного слоя τ_s .

Введем следующие безразмерные величины:

$$q_2 = q_1 = |q|/\tau_s, \quad p_2 = |p|h/(E_*v_{p2}), \quad V_2 = v_*/v_{p2}.$$

На рис. 4 показано распределение безразмерных контактных касательных q_2 (кривая 1) и нормальных p_2 (кривая 2) напряжений при $V_2 < 1$.

При изменении коэффициента трения k от 0 до k_p , где $k_p = \nu_* h \alpha \operatorname{th}(\alpha l)/(1 - \nu_*^2)$, значения l_2 изменяются от 0 до l , т. е. с ростом k граница раздела смещается от центра к краю пластины.

При $k \geq k_p$ $l_2 > l$ и граница раздела зон выходит за пределы пластины. Следовательно, при всех v_* существует одна зона — зона полного контакта. В этом случае решение задачи совпадает с решением из п. 2.1.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы. Закон трения Амонтона — Кулона хорошо описывает процесс внешнего трения на начальной стадии движения плит, когда уровень контактных нормальных напряжений достаточно мал. Однако использование этого закона при дальнейшем сжатии полосы может привести к физически неверным результатам: касательное контактное напряжение может превысить предел текучести контактного слоя. Кроме того, при перемещении плит положение границы раздела зон полного контакта и скольжения не меняется, при больших значениях коэффициента трения область проскальзывания не образуется.

2.3. Закон Прандтля — Ильюшина с кусочно-линейной функцией трения. Рассмотрим два варианта решений при $k < k_p$ и $k \geq k_p$.

В первом случае на начальной стадии контактное взаимодействие происходит по закону трения Амонтона — Кулона. Решение совпадает с решением, полученным в п. 2.2. Сначала возникают две зоны: идеального контакта и проскальзывания.

При движении плит соответствующее значение $\max |q|$ (см. (30)) увеличивается и при $v_* = v_{p2}$ достигает значения τ_s . В этот момент появляется третья зона — зона постоянного касательного напряжения.

Таким образом, при $v_* > v_{p2}$ решение задачи представляет собой комбинацию трех решений (23), (25), (27). Область идеального контакта примыкает к оси y , за ней следуют область постоянной силы трения и область проскальзывания, прилегающая к свободной поверхности $x = l$, в которой выполняется закон трения Амонтона — Кулона.

Имеются две неизвестные границы: первая при $x = l_1$ отделяет зону полного контакта от зоны с контактным взаимодействием по закону постоянной силы трения, вторая при

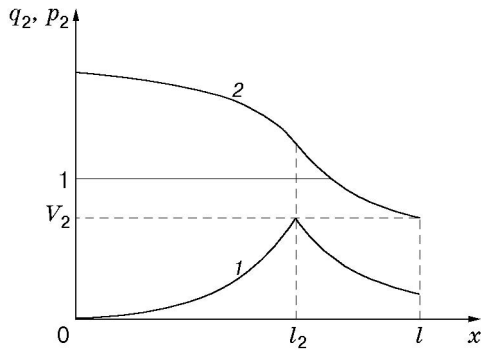


Рис. 4

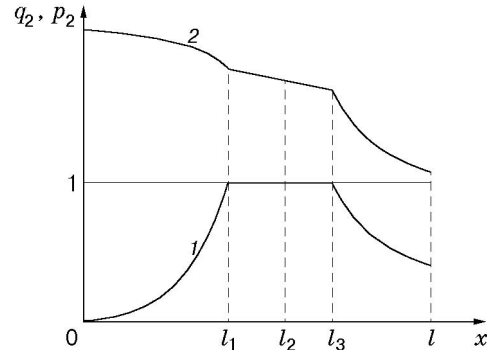


Рис. 5

$x = l_3$ разделяет зоны постоянной силы трения и трения по закону Амонтона — Кулона. Константы, входящие в решения (23), (25), (27), находятся из граничных условий (21) и условий сопряжения (28) в точках $x = l_1$, $x = l_3$.

Постоянные A_1 , A_2 , B_2 , A_3 , B_3 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{1}{\alpha h \operatorname{ch}(\alpha l_1)} \left\{ \frac{v_*}{\nu_*} + (1 - \nu_*^2) \left[\frac{\tau_s}{E_*} (l_1 - l_3) - \frac{v_*}{\nu_*} \exp\left(\frac{kv_*}{h}(l - l_3)\right) \right] \right\},$$

$$A_2 = -2\tau_s l_3 + 2 \frac{E_* v_*}{\nu_*} \exp\left(\frac{kv_*}{h}(l - l_3)\right), \quad A_3 = -2 \frac{E_* v_*}{\nu_*} \exp\left(\frac{kv_*}{h}l\right),$$

$$B_2 = \operatorname{sh}(\alpha l_1) A_1 - \frac{1 - \nu_*^2}{2hE_*} (\tau_s l_1^2 + A_2 l_1) - \frac{v_* \nu_*}{h} (l_3 - l_1),$$

$$B_3 = \operatorname{sh}(\alpha l_1) A_1 + \frac{1 - \nu_*^2}{2hE_*} (\tau_s (l_3^2 - l_1^2) + A_2 (l_3 - l_1)) + \frac{v_* \nu_*}{h} (l_3 - l_1) + \frac{(1 - \nu_*^2) k E_*}{\nu_*^2 \tau_s}.$$

Границы раздела зон $x = l_1$, $x = l_3$ находятся из уравнений

$$\frac{h\tau_s}{E_* k} \exp\left(\frac{kv_*}{h}(l_3 - l)\right) = v_*,$$

$$(1 - \nu_*^2) \left[1 + \frac{kv_*}{h} \left(\frac{\operatorname{cth}(\alpha l_1)}{\alpha} + l_3 - l_1 \right) \right] = \exp\left(\frac{kv_*}{h}(l_3 - l)\right).$$

На рис. 5 показано распределение безразмерных контактных напряжений q_2 (кривая 1) и p_2 (кривая 2).

По мере движения плит размеры области контакта с постоянной силой трения ($l_1 < x < l_3$) увеличиваются. Граница $x = l_1$ смещается к центру пластины, граница $x = l_3$ — к свободной поверхности.

При $k \geq k_p$ граница $x = l_2$ выходит за пределы пластины (как и в случае закона постоянной силы трения (см. п. 2.2)). На первом этапе, когда $v_* < v_{p1}$, имеется одна зона — зона идеального контакта. По мере движения плит максимальное контактное касательное напряжение при $x = l$ увеличивается и при $v_* = v_{p1}$ достигает значения τ_s . При этом возникает вторая зона — зона постоянного касательного напряжения.

Полученное решение позволяет сделать следующий вывод. В отличие от закона постоянной силы трения и закона Амонтона — Кулона двухпараметрический закон Прандтля — Ильюшина достаточно полно описывает распределение контактных напряжений как при низком, так и при высоком нормальном давлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
2. Губкин С. И. Теория обработки металлов давлением. М.: Металлургиздат, 1947.
3. Ильюшин А. А. Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям // Прикл. математика и механика. 1954. Т. 18, вып. 3. С. 265–288.
4. Кравчук А. С. К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // Прикл. математика и механика. 1980. Т. 44, вып. 1. С. 122–129.
5. Исаченков Е. И. Контактное трение и смазка. М.: Машиностроение, 1978.
6. Иванов Г. В. Теория пластин и оболочек. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1980.
7. Алексеев А. Е. Построение уравнений слоя переменной толщины на основе разложений по полиномам Лежандра // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 4. С. 137–147.
8. Волчков Ю. М., Дергилева Л. А., Иванов Г. В. Численное моделирование напряженных состояний в плоских задачах упругости методом слоев // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 129–135.
9. Алексеев А. Е. Изгиб трехслойной ортотропной балки // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 3. С. 158–166.
10. Алексеев А. Е., Алехин В. В., Аннин Б. Д. Плоская задача теории упругости для неоднородного слоистого тела // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 6. С. 136–141.

Поступила в редакцию 29/1 2002 г.
