УДК 532.592:532.517.2

ЭВОЛЮЦИЯ ДЛИННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА РАССЛОЕННОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ В КАНАЛЕ

Д. Г. Архипов*,**, Г. А. Хабахпашев*,**

* Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск
** Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mail: theory@itp.nsc.ru

Аналитически и численно исследована динамика возмущений границы раздела двух несжимаемых несмешивающихся слоев жидкостей различной плотности при наличии установившегося потока между горизонтальными дном и крышкой. Получено модельное интегродифференциальное уравнение, учитывающее длинноволновые вклады инерций слоев и поверхностного натяжения жидкостей, малую, но конечную амплитуду возмущений и нестационарное трение на всех границах. Приведены численные решения этого уравнения для наиболее характерных нелинейных задач трансформации как плоских волн различной длительности, так и уединенных в пространстве волн.

Ключевые слова: вязкие жидкости, граница раздела, двухслойное течение Пуазейля, длинные волны, нелинейные возмущения, уединенные волны.

Введение. Возмущения свободных поверхностей слоев неглубоких жидкостей, текущих со сдвигом продольной скорости, интересуют специалистов в течение уже полувека (см., например, [1]). В последние годы внимание к подобным исследованиям еще более возросло (см. [2, 3] и другие работы). В частности, в [4] на основе измерений, выполненных в натурных условиях, рассмотрено влияние сдвиговых потоков на вертикальную структуру и кинематические параметры внутренних волн. В работе [5] выведено эволюционное уравнение для плоских нелинейных возмущений границы раздела двухслойного течения Пуазейля. В отличие от других моделей это уравнение учитывает нестационарное трение на всех границах системы. Установлено, что скорость и направление потока способны изменять не только длины волн, но и их полярность. В пренебрежении диссипативными потерями для возмущенного течения определены установившиеся решения типа кноидальных и уединенных волн.

Целью данной работы является получение модельного уравнения для трехмерных возмущений и анализ численных экспериментов по трансформации различных волн.

Постановка задачи и упрощение исходных уравнений. Пусть жидкости ограничены твердыми неподвижными крышкой (вертикальная координата $z = h_1$) и дном ($z = -h_2$), а невозмущенная граница раздела слоев соответствует координате $z = 0$. Тогда установившийся профиль горизонтальной скорости состоит из двух участков парабол:

$$\boldsymbol{u}_{0l} = \boldsymbol{u}_{0i}(1 - A_l z^2 - B_l z),$$
$$\boldsymbol{u}_{0i} = -\frac{\nabla p_0 h_1 h_2 H/2}{\mu_1 h_2 + \mu_2 h_1}, \qquad A_l = \frac{\mu_1 h_2 + \mu_2 h_1}{\mu_l h_1 h_2 H}, \qquad B_l = \frac{\mu_1 h_2^2 - \mu_2 h_1^2}{\mu_l h_1 h_2 H}. \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00183), в рамках программы ОЭММПУ РАН № 4.13 и программы СО РАН № 4.2.2.

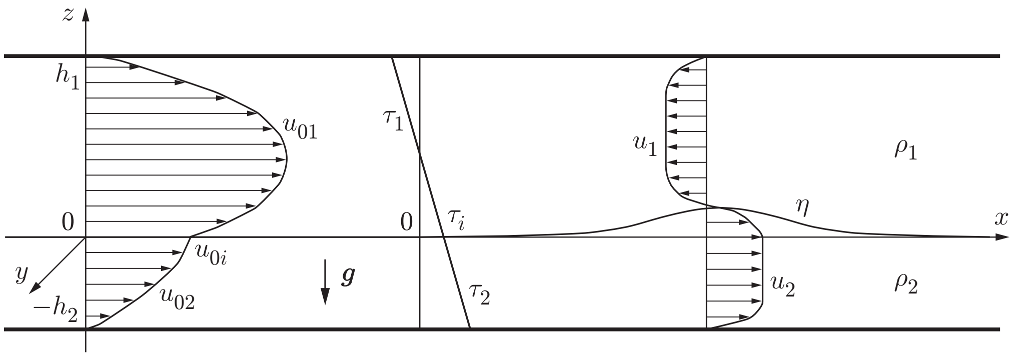

Рис. 1. Схема стационарного горизонтального течения, профиля трения и возмущенного движения, вызванного распространением длинной волны, в двухслойной системе

Здесь индекс 0 соответствует стационарным значениям величин; индекс $l = 1, 2$ соответствует верхнему и нижнему слоям жидкости; индекс i — величинам на границе раздела; оператор градиента ∇ определен в горизонтальной плоскости (x, y); p — давление; $H = h_1 + h_2$; μ — динамическая вязкость.

Рассматриваемое двухжидкостное слоистое течение Пуазейля в плоском канале является решением стационарного уравнения движения $\nabla p_0 = \mu_l\, d^2\boldsymbol{u}_{0l}/dz^2$ с четырьмя краевыми условиями ($\boldsymbol{u}_{0l} = 0$ при $z = -(-1)^l h_l$, $\boldsymbol{u}_{0l} = \boldsymbol{u}_{0i}$ и $\boldsymbol{\tau}_l = \mu_l\, d\boldsymbol{u}_{0l}/dz = \boldsymbol{\tau}_{0i}$ при $z = 0$). На рис. 1 показан профиль такого потока для системы вода — анилин ($\mu_1/\mu_2 = 0{,}225$) при $h_1/h_2 = 2$.

Исходные уравнения Стокса и уравнения неразрывности для возмущенного движения несжимаемой жидкости в каждом слое можно записать в стандартной форме

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_l}{\partial t} + \boldsymbol{u}_{0l}\cdot\nabla\boldsymbol{u}_l + w_l\,\frac{d\boldsymbol{u}_{0l}}{dz} + \boldsymbol{u}_l\cdot\nabla\boldsymbol{u}_l + w_l\,\frac{\partial \boldsymbol{u}_l}{\partial z} + \frac{1}{\rho_l}\nabla p_l = \nu_l\Big(\nabla^2\boldsymbol{u}_l + \frac{\partial^2\boldsymbol{u}_l}{\partial z^2}\Big); \qquad (2)$$

$$\frac{\partial w_l}{\partial t} + \boldsymbol{u}_{0l}\cdot\nabla w_l + \boldsymbol{u}_l\cdot\nabla w_l + w_l\,\frac{\partial w_l}{\partial z} + \frac{1}{\rho_l}\,\frac{\partial p_l}{\partial z} + g = \nu_l\Big(\nabla^2 w_l + \frac{\partial^2 w_l}{\partial z^2}\Big); \qquad (3)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}_l + \frac{\partial w_l}{\partial z} = 0. \qquad (4)$$

Здесь $\boldsymbol{u}$ — горизонтальная компонента вектора скорости жидкости; t — время; w — вертикальная составляющая скорости жидкости; ρ — плотность; $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость; g – ускорение свободного падения.

Сделаем следующие предположения: 1) характерный горизонтальный размер волны l_w существенно больше, а амплитуда возмущения η_a значительно меньше равновесных глубин слоев h_l ($h_l/l_w \sim \varepsilon^{1/2}$, $\eta_a/h_l \sim \varepsilon$, где ε — малый параметр); 2) капиллярные эффекты невелики (модифицированное число Бонда $\mathrm{Bo} = (\rho_2 - \rho_1)gh_1h_2/\sigma > 1$, где σ — поверхностное натяжение); 3) толщина пограничных слоев для возмущенной скорости остается малой, т. е. время распространения нестационарного пограничного слоя на толщину жидкости значительно больше характерного времени прохождения волны через какую-либо точку исследуемой области канала t_w (чи́сла гидродинамической гомохронности $\mathrm{Ho}_{\nu l} = \nu_l t_w/h_l^2 \sim \varepsilon^2$). Эти допущения соответствуют условиям проведения экспериментов в различных гидродинамических лабораториях.

Нелинейные слагаемые в уравнениях (3) можно опустить как члены неучитываемого порядка малости ($\boldsymbol{u}_l\cdot\nabla w_l \approx g\varepsilon^3$ и $w_l^2/\boldsymbol{u}_l^2 \approx \varepsilon$). Кроме того, в сделанных предположениях можно пренебречь первыми слагаемыми в правых частях уравнений (2), а также правыми частями уравнений (3). В результате получаем упрощенную систему

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_l}{\partial t} + \boldsymbol{u}_{0l} \cdot \nabla \boldsymbol{u}_l + w_l \frac{d\boldsymbol{u}_{0l}}{dz} + \boldsymbol{u}_l \cdot \nabla \boldsymbol{u}_l + w_l \frac{\partial \boldsymbol{u}_l}{\partial z} + \frac{1}{\rho_l} \nabla p_l = \nu_l \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_l}{\partial z^2}; \tag{5}$$

$$\frac{\partial w_l}{\partial t} + \boldsymbol{u}_{0l} \cdot \nabla w_l + \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p_l}{\partial z} + g = 0. \tag{6}$$

Зададим краевые условия на крышке, поверхности раздела слоев и дне:

$$\boldsymbol{u}_l = w_l = 0, \qquad z = -(-1)^l h_l,$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_i, \quad \mu_1 \frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial \boldsymbol{u}_2}{\partial z} = \boldsymbol{\tau}_i, \quad w_1 = w_2 = w_i = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\boldsymbol{u}_{0i} + \boldsymbol{u}_i) \cdot \nabla \eta,$$

$$p_{1i} = p_{2i} + \sigma \nabla^2 \eta, \qquad z = \eta(t, x, y).$$

Интегрируя уравнения (6) по z от z до η и используя динамическое краевое условие на границе раздела, находим профили давлений в каждом слое жидкости:

$$\frac{p_l}{\rho_l} = \frac{p_{li}}{\rho_l} + g(\eta - z) + \int\limits_z^\eta \Big(\frac{\partial w_l}{\partial t} + \boldsymbol{u}_{0l} \cdot \nabla w_l\Big)\, dz. \tag{7}$$

Выражения (7) можно подставить в уравнения движения (5), (6), но сначала целесообразно взять интегралы, входящие в зависимости (7). В работе [5] показано, что в широком интервале отношений глубин и для небольших значений стационарного гидравлического напора профили вертикальных компонент скоростей жидкостей можно принять достаточно простыми, т. е. линейными по координате z в каждом слое:

$$w_l = \frac{h_l + (-1)^l z}{h_l + (-1)^l \eta} \Big(\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\boldsymbol{u}_{0i} + \boldsymbol{u}_i) \cdot \nabla \eta\Big). \tag{8}$$

Для членов второго порядка малости можно принять еще более простые выражения

$$w_l = \Big(1 + (-1)^l \frac{z}{h_l}\Big)\Big(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \boldsymbol{u}_{0i} \cdot \nabla \eta\Big) = \Big(1 + (-1)^l \frac{z}{h_l}\Big) \frac{D\eta}{D_0 t}. \tag{9}$$

В частности, соотношения (9) можно подставить не только в интегральные слагаемые уравнений (7), учитывающие инерцию каждого слоя жидкости, но и в нелинейные члены $w_l\, \partial \boldsymbol{u}_l / \partial z$ уравнений движения (5).

Зависимости давлений и скоростей жидкостей от возмущения границы раздела. Подставив формулы для скоростей (1), а также нормальные составляющие скоростей (9) в выражения (7), определим вертикальные профили давлений:

$$\frac{p_l}{\rho_l} = \frac{p_{li}}{\rho_l} + g(\eta - z) + \int\limits_z^\eta \Big(1 + (-1)^l \frac{z}{h_l}\Big)(1 - A_l z^2 - B_l z) \boldsymbol{u}_{0i} \cdot \nabla \frac{D\eta}{D_0 t}\, dz +$$
$$+ \int\limits_z^\eta \Big(1 + (-1)^l \frac{z}{h_l}\Big) \frac{\partial}{\partial t} \frac{D\eta}{D_0 t}\, dz = \frac{p_{li}}{\rho_l} + g(\eta - z) - \Big(z + \frac{z^2}{2} \frac{(-1)^l}{h_l}\Big) \frac{\partial}{\partial t} \frac{D\eta}{D_0 t} -$$
$$- \Big[z + \frac{z^2}{2}\Big(\frac{(-1)^l}{h_l} - B_l\Big) - \frac{z^3}{3}\Big(A_l + B_l \frac{(-1)^l}{h_l}\Big) - \frac{z^4}{4} A_l \frac{(-1)^l}{h_l}\Big] \boldsymbol{u}_{0i} \cdot \nabla \frac{D\eta}{D_0 t}. \tag{10}$$

Затем, применяя скалярно оператор ∇ к уравнению (5) и с помощью уравнения неразрывности (4) заменяя $\nabla\cdot\boldsymbol{u}_l$ на $-\partial w_l/\partial z$ в первых трех членах (5), получаем

$$-\frac{\partial^2 w_l}{\partial t\,\partial z}-\boldsymbol{u}_{0l}\cdot\nabla\frac{\partial w_l}{\partial z}+\nabla w_l\cdot\frac{d\boldsymbol{u}_{0l}}{dz}+\nabla\cdot\Big(\boldsymbol{u}_l\cdot\nabla\boldsymbol{u}_l+w_l\,\frac{\partial\boldsymbol{u}_l}{\partial z}\Big)+{}$$
$$+\frac{1}{\rho_l}\,\nabla^2 p_l=\nu_l\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_l). \qquad (11)$$

Подставляя профили скоростей (1) и (8) во вторые, третьи и четвертые члены уравнений (11), зависимости (10) — в пятые, проинтегрируем уравнения (11) по координате z от $-h_2$ до η при $l=2$ и от η до h_1 при $l=1$. В результате получаем

$$\frac{\partial w_i}{\partial t}+\frac{\partial\eta}{\partial t}\,\nabla\cdot\boldsymbol{u}_i+\frac{A_l}{3}\,h_l^2\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\nabla\Big[w_i\Big(1+(-1)^l\,\frac{2\eta}{h_l}\Big)\Big]+\Big(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_i-B_l\,\frac{D\eta}{D_0t}\Big)\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\nabla\eta-{}$$
$$-\,[(-1)^l h_l+\eta]\Big(\frac{1}{\rho_l}\,\nabla^2 p_{li}+g\nabla^2\eta\Big)-\frac{h_l^2}{3}\Big[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{3}{4}\Big(1+A_l\,\frac{h_l^2}{5}\Big)\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\nabla\Big]\frac{D}{D_0t}\,\nabla^2\eta-{}$$
$$-\int\limits_{-(-1)^l h_l}^{\eta}\nabla\cdot\Big((\boldsymbol{u}_l\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_l+w_l\,\frac{\partial\boldsymbol{u}_l}{\partial z}\Big)\,dz=\frac{1}{\rho_l}\,(\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_{lz}-\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_{iz})+\nu_l\nabla\eta\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{u}_l}{\partial z^2}\Big|_{z=0}. \qquad (12)$$

Здесь напряжения $\boldsymbol{\tau}_{lz}=\nu_l\rho_l\,\partial\boldsymbol{u}_l/\partial z$ при $z=(-1)^l h_l$; поправки третьего порядка малости опущены. Для вычисления оставшихся интегралов, содержащих лишь члены второго порядка малости, достаточно определить линейную связь горизонтальных составляющих скоростей жидкостей с возмущением границы раздела. Рассмотрим краевые условия и уравнения (12) в первом приближении, т. е. без учета не только нелинейных, инерционных и капиллярных членов, но и нестационарных трений:

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}+A_l\,\frac{h_l^2}{3}\,\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\nabla\Big)\frac{D\eta}{D_0t}-(-1)^l h_l\Big(\frac{1}{\rho_l}\,\nabla^2 p_i+g\nabla^2\eta\Big)=0. \qquad (13)$$

Из условия тождественности этих уравнений, описывающих один и тот же волновой процесс, определим лапласиан давления на границе раздела:

$$\nabla^2 p_{li}=-\rho_1\rho_2\Big(\frac{gH}{\chi}\,\nabla^2\eta+R_f\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\nabla\frac{D\eta}{D_0t}\Big). \qquad (14)$$

Здесь $\chi=\rho_1 h_2+\rho_2 h_1$; $R_f=(\nu_1\rho_1 h_2+\nu_2\rho_2 h_1)(\nu_2\rho_2 h_1^2-\nu_1\rho_1 h_2^2)/(3\nu_1\nu_2\rho_1\rho_2 h_1 h_2\chi H)$. Если основные возмущения распространяются лишь в определенном направлении (вектор фазовой скорости линейных волн $\boldsymbol{c}$ почти параллелен вектору $\nabla\eta$), то можно заменить операторы

$$\nabla\eta=-\frac{\boldsymbol{c}}{c^2}\,\frac{\partial\eta}{\partial t},\qquad \nabla^2=\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Тогда формулу (14) можно записать в виде зависимости

$$\frac{\partial^2 p_{li}}{\partial t^2}=-\rho_1\rho_2\Big[\frac{gH}{\chi}-R_f\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\boldsymbol{c}\Big(1-\frac{\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\boldsymbol{c}}{c^2}\Big)\Big]\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}.$$

Проинтегрировав данное уравнение один раз по времени, получим

$$\frac{\partial p_{li}}{\partial t}=-\rho_1\rho_2\Big(\frac{gH}{\chi}-R_f u_{0c}^2\Big)\frac{\partial\eta}{\partial t},\qquad u_{0c}^2=\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\boldsymbol{c}\Big(1-\frac{\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\boldsymbol{c}}{c^2}\Big).$$

Здесь постоянная интегрирования полагается равной нулю, так как согласно сделанному ранее предположению при отсутствии возмущений $\partial p_i/\partial t = 0$. В результате имеем

$$\nabla p_{li} = -\rho_1\rho_2\Big(\frac{gH}{\chi} - R_f u_{0c}^2\Big)\nabla\eta. \tag{15}$$

Проинтегрируем линеаризованные и бездиссипативные горизонтальные составляющие уравнений движения (5) по вертикальной координате z от $-h_2$ до η при $l = 2$ и от η до h_1 при $l = 1$. Во вторые и третьи члены этих уравнений подставим профили скоростей (1), в третьи слагаемые — профили скоростей (9), а гидростатические связи $p_l = p_{li} + \rho_l g(\eta - z)$ и выражения (15) — в последние члены данных уравнений. В результате получаем уравнения движения в горизонтальной плоскости

$$\Big[1 - \frac{S_c}{2}\Big(1 + \frac{A_l}{3}\,h_l^2\Big)\Big]\frac{\partial \boldsymbol{u}_l}{\partial t} + \Big[\frac{\boldsymbol{c}}{c^2}\,g_l + (-1)^l\,\frac{\boldsymbol{u}_{0i}}{2h_l}\,\frac{c_f^2}{c^2}\Big(1 - \frac{A_l}{3}\,h_l^2\Big)\Big]\frac{\partial\eta}{\partial t} = 0, \tag{16}$$

где $g_l = \rho_1\rho_2(gH/\chi - R_f u_{0c}^2)/\rho_l - g$; $S_c = \boldsymbol{u}_{0i}\cdot\boldsymbol{c}/c^2$; $c_f^2 = c^2(1 - S_c)$. Отметим, что в рассматриваемом приближении $\boldsymbol{u}_l$ не зависит от вертикальной координаты. Проинтегрировав уравнения (16) по времени, определяем связи горизонтальных скоростей жидкостей с возмущением границы раздела:

$$\boldsymbol{u}_l = -\frac{\boldsymbol{c}g_l h_l + (-1)^l\boldsymbol{u}_{0i}c_f^2(1 - A_l h_l^2/3)/2}{h_l c^2[1 - S_c(1 + A_l h_l^2/3)/2]}\,\eta = \frac{\boldsymbol{c}_l}{h_l}\,\eta. \tag{17}$$

Поскольку в сделанных предположениях при отсутствии возмущений $\boldsymbol{u}_l = 0$, постоянная интегрирования вновь положена равной нулю.

Нахождение фазовой скорости и трения на границах. Для определения зависимости фазовой скорости $\boldsymbol{c}$ от величины и направления установившегося потока подставим $\nabla^2 p_{li}$ из (14) в систему уравнений (13). Получаем уравнение для возмущения границы раздела, решение которого будем искать в виде линейной моногармонической волны, распространяющейся под углом φ к направлению вектора стационарного течения $\boldsymbol{u}_{0i}$. В итоге для модуля фазовой скорости имеем формулу

$$c = \Big||\boldsymbol{u}_{0i}|\cos\varphi(1 + S_f)/2 \pm \sqrt{c_0^2 + \boldsymbol{u}_{0i}^2[\cos\varphi(1 - S_f)/2]^2}\,\Big|,$$

где $S_f = (\nu_1 h_2 + \nu_2 h_1)(\nu_1\rho_1 h_2 + \nu_2\rho_2 h_1)/(3\nu_1\nu_2\chi H)$; $c_0^2 = gh_1h_2(\rho_2 - \rho_1)/\chi$. Как и предполагалось, спутное течение увеличивает фазовую скорость возмущений, а противоток уменьшает ее.

Для нахождения напряжений трения $\boldsymbol{\tau}_{lz}$ вблизи всех границ используем уравнения движения (5) без учета нелинейных и инерционных членов:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_l}{\partial t} + \boldsymbol{u}_{0l}\cdot\nabla\boldsymbol{u}_l + w_l\,\frac{d\boldsymbol{u}_{0l}}{dz} + g\nabla\eta + \frac{1}{\rho_l}\,\nabla p_{li} = \nu_l\,\frac{\partial^2\boldsymbol{u}_l}{\partial z^2}. \tag{18}$$

Используя формулы (1) для $\boldsymbol{u}_{0l}$, формулы (9) для w_l, соотношения (15) для ∇p_{li} и заменяя $\boldsymbol{u}_{0l}\cdot\nabla\boldsymbol{u}_l$ на $-(\boldsymbol{u}_{0l}\cdot\boldsymbol{c}/c^2)(\partial\boldsymbol{u}_l/\partial t)$, уравнения движения (18) запишем в виде

$$\Big(1 - \frac{\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\boldsymbol{c}}{c^2}\,(1 - A_l z^2 - B_l z)\Big)\frac{\partial\boldsymbol{u}_l}{\partial t} - \boldsymbol{u}_{0i}(2A_l z + B_l)\Big(1 + (-1)^l\frac{z}{h_l}\Big)\frac{D\eta}{D_0 t} +$$
$$+ \Big((-1)^l\,\frac{c_0^2}{h_l} + \rho_1\rho_2\,\frac{R_f}{\rho_l}\,u_{0c}^2\Big)\nabla\eta = \nu_l\,\frac{\partial^2\boldsymbol{u}_l}{\partial z^2}. \tag{19}$$

Заменив в этих уравнениях $\partial\eta/\partial t$ на $-\boldsymbol{c}\cdot\nabla\eta$ и разделив все члены на ν_l, получаем

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{u}_l}{\partial z^2}-\frac{1}{\nu_l}\Big(1-\frac{\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\boldsymbol{c}}{c^2}\,(1-A_lz^2-B_lz)\Big)\frac{\partial\boldsymbol{u}_l}{\partial t}=$$
$$=-\frac{g_l}{\nu_l}\,\nabla\eta+\frac{\boldsymbol{u}_{0i}}{\nu_l}\,(2A_lz+B_l)\Big(1+(-1)^l\,\frac{z}{h_l}\Big)[(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_{0i})\cdot\nabla\eta]. \qquad (20)$$

Решения уравнений (20) будем искать методом разделения переменных:

$$\boldsymbol{u}_l(t,x,y,z)=\boldsymbol{u}'_l(t,z)f_l(x,y).$$

Сначала рассмотрим пограничные слои вблизи крышки и дна. В этом случае $z\approx-(-1)^lh_l$, и правые части уравнений (20) значительно упрощаются (перестают зависеть от z). Следовательно, применив к уравнениям (20) преобразование Лапласа по времени, получим

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{V}_l(s,z)}{\partial z^2}-\frac{s}{\nu_l}\,\boldsymbol{V}_l(s,z)=\frac{\boldsymbol{G}_{\nabla l}(s,x,y)}{\nu_lf_l(x,y)}-\frac{\boldsymbol{u}'_{l0}}{\nu_l}\equiv\boldsymbol{P}_{\nabla l}(s). \qquad (21)$$

Здесь $\boldsymbol{V}_l(s,z)$, $\boldsymbol{G}_{\nabla l}(s,x,y)/\nu_l$ — изображения $\boldsymbol{u}'_l(t,z)$ и правых частей уравнений (20) при $z=-(-1)^lh_l$. Правые части уравнений (21) являются функциями только переменной s, так как их левые части не зависят от координат x, y, а скорости жидкостей в каждом из слоев не зависят от вертикальной координаты z в начальный момент времени $t=0$. Допущение о малой толщине пограничных слоев, не ухудшая точности, позволяет поставить условие отсутствия касательных напряжений на больших расстояниях от рассматриваемых поверхностей: при $z=-\infty$ для крышки, при $z=+\infty$ для дна, при $z=-\infty$, $z=+\infty$ для поверхности раздела (пограничные слои практически "бесконечно" глубоко утоплены в жидкости).

Выполнив замену $\boldsymbol{V}'_l=\boldsymbol{V}_l+\boldsymbol{P}_{\nabla l}\nu_l/s$, уравнения (21) запишем в виде линейных однородных уравнений. Тогда решения, удовлетворяющие краевым условиям $\boldsymbol{V}_l=0$ при $z=-(-1)^lh_l$ и $\partial\boldsymbol{V}_l/\partial z=0$ при $z=(-1)^l\infty$, легко определяются:

$$\boldsymbol{V}_l(s,z)=\boldsymbol{P}_{\nabla l}(s)\,\frac{\nu_l}{s}\Big[\exp\Big(-\sqrt{\frac{s}{\nu_l}}\,[(-1)^lz+h_l]\Big)-1\Big].$$

Отсюда находим значения производных у крышки и дна:

$$\frac{\partial\boldsymbol{V}_l}{\partial z}\Big|_{z=-(-1)^lh_l}=-(-1)^l\boldsymbol{P}_{\nabla l}(s)\sqrt{\frac{\nu_l}{s}}.$$

Применив к данным формулам обратное преобразование Лапласа, для вязких трений о крышку и дно в пространстве оригиналов получаем выражения типа свертки:

$$\boldsymbol{\tau}_{lz}=\nu_l\rho_l\,\frac{\partial\boldsymbol{u}_l}{\partial z}\Big|_{z=-(-1)^lh_l}=(-1)^l\sqrt{\nu_l}\rho_l\Big(\frac{g_l}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{\nabla\eta\,dt'}{\sqrt{t-t'}}+\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,\boldsymbol{u}_{l0}(x,y)\Big). \qquad (22)$$

Заметим, что в уравнениях (22) $t>0$, а члены, содержащие переменные $\boldsymbol{u}_{l,0}(x,y)$ и $\eta_0(x,y)$, оказывают влияние лишь в области, возмущенной в начальный момент времени. Для остального пространства влияние этих членов незначительно.

Рассмотрим пограничные слои вблизи границы раздела ($z\approx0$ в правых частях уравнений (19), которые также перестают зависеть от координаты z). Кроме того, заменяя $\nabla\eta$ на $-(\boldsymbol{c}/c^2)\,\partial\eta/\partial t$, получаем уравнения горизонтального движения

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{u}_l}{\partial z^2}-\frac{1}{\nu_l}\,\frac{c_f^2}{c^2}\,\frac{\partial\boldsymbol{u}_l}{\partial t}=\Big(\frac{\boldsymbol{c}}{c^2}\,\frac{g_l}{\nu_l}-\boldsymbol{u}_{0i}\,\frac{B_l}{\nu_l}\,\frac{c_f^2}{c^2}\Big)\frac{\partial\eta}{\partial t}.$$

Используя преобразование Лапласа по времени, запишем эти уравнения в виде

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{V}_l}{\partial z^2} - \boldsymbol{V}_l \, \frac{s}{\nu_l} \, \frac{c_f^2}{c^2} = \frac{\boldsymbol{G}_{tl}}{\nu_l f_l} - \frac{\boldsymbol{u}_{l0}}{\nu_l} \, \frac{c_f^2}{c^2} \equiv \boldsymbol{P}_{tl}(s). \tag{23}$$

Из совместного решения уравнений (23) с краевыми условиями $\partial \boldsymbol{V}_l / \partial z = 0$ при $z = -(-1)^l \infty$ (так как эти пограничные слои также практически “бесконечно” глубоко утоплены в слоях жидкости), $\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}_2$ и $\nu_1 \rho_1 \, \partial \boldsymbol{V}_1 / \partial z = \nu_2 \rho_2 \, \partial \boldsymbol{V}_2 / \partial z$ при $z = 0$ (непрерывность скоростей и касательных напряжений) находим профили для изображений:

$$\boldsymbol{V}_l(s, z) = \frac{(-1)^l}{s_c} \, \frac{\psi}{\psi_l} \, [\nu_2 \boldsymbol{P}_{t2}(s) - \nu_1 \boldsymbol{P}_{t1}(s)] \exp\Big((-1)^l \sqrt{\frac{s_c}{\nu_l}} \, z\Big) - \frac{\nu_l}{s_c} \, \boldsymbol{P}_{tl}(s).$$

Здесь $s_c = s c_f^2 / c^2$; $\psi_l = \sqrt{\nu_l} \rho_l$; $\psi = \psi_1 \psi_2 / (\psi_1 + \psi_2)$. Вновь используя обратное преобразование Лапласа, а также замену для оператора градиента и простые равенства

$$\int\limits_0^t \nabla \eta(t', x, y) \, dt' = -\frac{\boldsymbol{c}}{c^2} \int\limits_0^t \frac{\partial \eta(t', x, y)}{\partial t'} \, dt' = \frac{\boldsymbol{c}}{c^2} \, [\eta_0(x, y) - \eta(t, x, y)],$$

из этих формул получаем выражения для горизонтальной составляющей скорости частиц жидкостей и вязкого трения на границе раздела слоев:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{u}_i = [\eta(t, x, y) - \eta_0(x, y)] \boldsymbol{f}_s + \frac{\psi_1 \boldsymbol{u}_{1,0}(x, y) + \psi_2 \boldsymbol{u}_{2,0}(x, y)}{\psi_1 + \psi_2}, \\ \boldsymbol{f}_s = \boldsymbol{u}_{0i} \, \frac{\psi_1 B_1 + \psi_2 B_2}{\psi_1 + \psi_2} + \boldsymbol{c} \Big(\frac{c_0^2}{c_f^2} \, \frac{\psi_2 h_1 - \psi_1 h_2}{h_1 h_2 (\psi_1 + \psi_2)} + \boldsymbol{u}_{0i} \cdot \boldsymbol{c} \, \frac{R_f}{c^2} \frac{\rho_1 \psi_2 + \rho_2 \psi_1}{\psi_1 + \psi_2} \Big); \end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\tau}_{iz} = \nu_l \rho_l \, \frac{\partial \boldsymbol{u}_l}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\psi}{\sqrt{\pi t}} \, \frac{c_f}{c} \, [\boldsymbol{u}_{1,0}(x, y) - \boldsymbol{u}_{2,0}(x, y)] + \\ + \frac{\psi}{\sqrt{\pi}} \, \frac{c_f}{c} \Big[\boldsymbol{u}_{0i}(B_1 - B_2) - \boldsymbol{c} \Big(\frac{c_0^2 H}{c_f^2 h_1 h_2} - (\rho_2 - \rho_1) \boldsymbol{u}_{0i} \cdot \boldsymbol{c} \, \frac{R_f}{c^2} \Big) \Big] \int\limits_0^t \frac{\partial \eta(t', x, y)}{\partial t'} \, \frac{dt'}{\sqrt{t - t'}}. \end{gathered} \tag{25}$$

Отметим, что в уравнениях (24), (25) $t > 0$, а члены, содержащие переменные $\boldsymbol{u}_{l,0}$ и η_0, оказывают влияние лишь в области, возмущенной в начальный момент времени.

Наконец, из уравнений (18) при $z = 0$ находим выражения для значений вторых производных нестационарных скоростей жидкостей по вертикальной координате вблизи границы раздела слоев, входящих в правые части уравнений (12):

$$\nu_l \, \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_l}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t} + \boldsymbol{u}_{0i} \cdot \nabla \boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_{0i} B_l \, \frac{D\eta}{D_0 t} - g_l \nabla \eta. \tag{26}$$

Таким образом, имеем все необходимые соотношения для вывода уравнения на возмущение $\eta(t, x, y)$.

Эволюционное уравнение для волн на границе раздела. Подставив зависимости (15), (17), (26) в члены второго порядка малости уравнений (12), получаем

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \boldsymbol{u}_{0i} \cdot \nabla \frac{\partial \eta}{\partial t} - \boldsymbol{u}_{0i} \cdot \nabla (\boldsymbol{u}_i \cdot \nabla \eta) + \frac{A_l}{3} \, h_l^2 \boldsymbol{u}_{0i} \cdot \nabla \Big[\Big(1 + (-1)^l \, \frac{2\eta}{h_l}\Big) \frac{D\eta}{D_0 t} + \boldsymbol{u}_i \cdot \nabla \eta \Big] -$$

$$-\frac{1}{2h_l}\Big((-1)^l(\boldsymbol{c}_l\cdot\nabla)^2\eta^2-\boldsymbol{c}_l\cdot\nabla\frac{D\eta^2}{D_0t}\Big)-(-1)^l\frac{h_l}{\rho_l}\nabla^2p_{li}-(-1)^lgh_l\nabla^2\eta+\frac{g_l}{2}\nabla^2\eta^2-$$
$$-\frac{h_l^2}{3}\Big[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{3}{4}\Big(1+A_l\frac{h_l^2}{5}\Big)\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\nabla\Big]\frac{D}{D_0t}\nabla^2\eta=\frac{1}{\rho_l}\nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}_{lz}-\boldsymbol{\tau}_{iz}). \qquad (27)$$

В (27) сгруппирован ряд членов и использовано интегрирование по частям:

$$\int\limits_{-(-1)^lh_l}^{0}w_l\frac{\partial\boldsymbol{u}_l}{\partial z}\,dz=\boldsymbol{u}_i\frac{D\eta}{D_0t}-\int\limits_{-(-1)^lh_l}^{0}\boldsymbol{u}_l\frac{\partial w_l}{\partial z}dz=\boldsymbol{u}_i\frac{D\eta}{D_0t}-\frac{\boldsymbol{c}_l}{2h_l}\frac{D\eta^2}{D_0t}.$$

Для того чтобы свести систему (27) к одному уравнению (исключив давление на границе раздела из оставшихся линейных членов), умножим (27) на h_2/ρ_2 при $l=1$ и на h_1/ρ_1 при $l=2$, а затем сложим получившиеся выражения. В результате имеем

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-c_0^2\nabla^2\eta+(1+S_f)\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\nabla\frac{\partial\eta}{\partial t}+S_f(\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\nabla)^2\eta-(1-S_f)\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\nabla(\boldsymbol{u}_i\cdot\nabla\eta)-$$
$$-\Big[H_\rho^2\Big(\frac{1}{3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{7}{12}\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\nabla\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{4}(\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\nabla)^2\Big)+S_A\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\nabla\frac{D}{D_0t}-\sigma\frac{h_1h_2}{\chi}\nabla^2\Big]\nabla^2\eta+$$
$$+\frac{\rho_1h_2}{2h_1\chi}\Big(\frac{D}{D_0t}+\boldsymbol{c}_1\cdot\nabla\Big)\boldsymbol{c}_1\cdot\nabla\eta^2+\frac{\rho_2h_1}{2h_2\chi}\Big(\frac{D}{D_0t}-\boldsymbol{c}_2\cdot\nabla\Big)\boldsymbol{c}_2\cdot\nabla\eta^2-$$
$$-C_{N\Delta}\nabla^2\eta^2-R_\nu\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\nabla\frac{D\eta^2}{D_0t}=\frac{1}{\chi}\nabla\cdot(h_1\boldsymbol{\tau}_{2z}+h_2\boldsymbol{\tau}_{1z}-H\boldsymbol{\tau}_{iz}), \qquad (28)$$

где $S_A=h_1h_2(\rho_1h_1^3A_1+\rho_2h_2^3A_2)/(20\chi)$; $C_{N\Delta}=[c_0^2(\rho_2h_1/h_2-\rho_1h_2/h_1)+u_{0c}^2\rho_1\rho_2R_fH]/(2\chi)$; $R_\nu=(\nu_2-\nu_1)(\nu_1\rho_1h_2+\nu_2\rho_2h_1)/(3\nu_1\nu_2\chi H)$; $H_\rho^2=h_1h_2(\rho_1h_1+\rho_2h_2)/\chi$.

С учетом сделанных допущений о длинноволновом характере возмущений малой амплитуды и о том, что эти возмущения распространяются только в одном направлении, в членах второго порядка малости можно провести следующие замены: $\partial\eta/\partial t$ на $-\boldsymbol{c}\cdot\nabla\eta$ в нелинейных членах, ∇ на $-(\boldsymbol{c}/c^2)\partial/\partial t$ в дисперсионных членах, ∇^2 на $(1/c^2)\,\partial^2/\partial t^2$ в инерционных и капиллярном членах. Тогда уравнение (28) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-c_0^2\nabla^2\eta+(1+S_f)\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\nabla\frac{\partial\eta}{\partial t}+S_f(\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\nabla)^2\eta-(1-S_f)\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\nabla(\boldsymbol{u}_i\cdot\nabla\eta)-$$
$$-C_d\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2\eta+\frac{\rho_1h_2}{2h_1\chi}(\boldsymbol{u}_{0i}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}_1)\cdot\nabla(\boldsymbol{c}_1\cdot\nabla\eta^2)+\frac{\rho_2h_1}{2h_2\chi}(\boldsymbol{u}_{0i}-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c}_2)\cdot\nabla(\boldsymbol{c}_2\cdot\nabla\eta^2)-$$
$$-C_{N\Delta}\nabla^2\eta^2-R_\nu\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\nabla[(\boldsymbol{u}_{0i}-\boldsymbol{c})\cdot\nabla\eta^2]=\frac{1}{\chi}\nabla\cdot(h_1\boldsymbol{\tau}_{2z}+h_2\boldsymbol{\tau}_{1z}-H\boldsymbol{\tau}_{iz}), \qquad (29)$$

где $C_d=H_\rho^2(1/3-7S_c/12+S_c^2/4)+S_A(S_c^2-S_c)-\sigma h_1h_2/(c^2\chi)$. Подставив выражения для трения на всех границах системы (22), (25) и выражения для скоростей вблизи поверхности раздела (24) в уравнение (29), имеем в нем лишь три неизвестные величины: η, $\boldsymbol{u}_{l0}$ (начальное возмущение $\eta_0(x,y)$ считается известным), причем $\boldsymbol{u}_{l0}$ содержатся лишь в членах второго порядка малости. Следовательно, в уравнении (29) $\boldsymbol{u}_{l0}$ можно заменить на $\boldsymbol{c}_l\eta_0/h_l$. В результате получаем основное эволюционное уравнение для возмущения

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + (1+S_f)\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\nabla\frac{\partial\eta}{\partial t} - c_0^2\nabla^2\eta + S_f(\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\nabla)^2\eta - C_d\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\nabla^2\eta - C_{Nxx}\,\frac{\partial^2\eta^2}{\partial x^2} -$$

$$- C_{Nxy}\,\frac{\partial^2\eta^2}{\partial x\partial y} - C_{Nyy}\,\frac{\partial^2\eta^2}{\partial y^2} + \int\limits_0^t \Big(C_{Bxx}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + C_{Bxy}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y} + C_{Byy}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\Big)\frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} =$$

$$= (\boldsymbol{f}_{N0}\cdot\nabla)(\eta_0\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\nabla\eta) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,\boldsymbol{f}_{L0}\cdot\nabla\eta_0. \qquad (30)$$

В этом уравнении коэффициенты определяются только геометрическими (h_1, h_2, φ) и физическими $(g, \rho_1, \rho_2, \nu_1, \nu_2, \boldsymbol{u}_{0i}, \sigma)$ параметрами рассматриваемой задачи:

$$C_{Nxx} = C_{N\Delta} - R_\nu u_{0i}(c_x - u_{0i}) + \frac{R_S}{2}\,u_{0i}f_{sx} + \frac{k_{2x}d_{2x} - k_{1x}d_{1x}}{2h_1h_2\chi},$$

$$C_{Nxy} = \frac{R_S}{2}\,(u_{0i}f_{sy} + v_{0i}f_{sx}) - R_\nu[u_{0i}(c_y - v_{0i}) + v_{0i}(c_x - u_{0i})] +$$

$$+ \frac{k_{2x}d_{2y} + k_{2y}d_{2x} - k_{1x}d_{1y} - k_{1y}d_{1x}}{2h_1h_2\chi}, \qquad R_S = 1 - S_f,$$

$$C_{Nyy} = C_{N\Delta} - R_\nu v_{0i}(c_y - v_{0i}) + \frac{R_S}{2}\,v_{0i}f_{sy} + \frac{k_{2y}d_{2y} - k_{1y}d_{1y}}{2h_1h_2\chi},$$

$$\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{c}_1\rho_1h_2^2, \qquad \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{c}_2\rho_2h_1^2, \qquad \boldsymbol{d}_1 = \boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{c} + \boldsymbol{u}_{0i}, \qquad \boldsymbol{d}_2 = \boldsymbol{c}_2 + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{u}_{0i},$$

$$C_{Bxx} = C_{B\Delta} + \frac{\psi_H}{\sqrt{\pi}\chi}\,c_xf_{Bx}, \qquad C_{B\Delta} = \frac{\psi_1g_1h_2 - \psi_2g_2h_1}{\sqrt{\pi}\chi}, \qquad \psi_H = \psi H\,\frac{c_f}{c},$$

$$C_{Bxy} = \frac{\psi_H}{\sqrt{\pi}\chi}\,(c_xf_{By} + c_yf_{Bx}), \qquad C_{Byy} = C_{B\Delta} + \frac{\psi_H}{\sqrt{\pi}\chi}\,c_yf_{By},$$

$$\boldsymbol{f}_B = \frac{\boldsymbol{c}c_0^2H}{c_f^2h_1h_2} + \boldsymbol{u}_{0i}(B_2 - B_1) - R_f(\rho_2 - \rho_1)\,\frac{\boldsymbol{c}}{c^2}\,\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\boldsymbol{c},$$

$$\boldsymbol{f}_{L0} = \frac{\psi_H(\boldsymbol{c}_2h_1 - \boldsymbol{c}_1h_2) - \psi_1\boldsymbol{c}_1h_2^2 + \psi_2\boldsymbol{c}_2h_1^2}{h_1h_2\chi}, \qquad \boldsymbol{f}_{N0} = R_S\Big(\frac{\psi_1\boldsymbol{c}_1h_2 + \psi_2\boldsymbol{c}_2h_1}{h_1h_2(\psi_1+\psi_2)} - \boldsymbol{f}_s\Big).$$

В модельном уравнении (30) учтены не только длинноволновые вклады инерции слоев жидкости и поверхностного натяжения, слабая нелинейность возмущений и нестационарное трение на всех границах данной системы, но и установившийся поток вязкой жидкости в горизонтальном канале. Отметим, что эволюционное уравнение (30) пригодно для описания трансформации волн, распространяющихся в произвольном горизонтальном направлении (под любым углом к вектору скорости течения), а члены, содержащиеся в его правой части, отличны от нуля лишь в области начального возмущения.

Численные решения задач о трансформации различных волн. В работе [6] приведены результаты расчетов по эволюционному уравнению, подобному уравнению (30), выполненные с помощью неявной трехслойной конечно-разностной схемы. Эти модельные уравнения отличаются не только видом коэффициентов, но и тем, что в уравнение (30) входят члены со вторыми смешанными производными. Для того чтобы избавиться от слагаемых, содержащих одну производную по времени и одну производную по горизонтальной координате, перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью $u_f = u_{0i}(1 + S_f)/2$

в направлении роста координаты x и со скоростью $v_f = v_{0i}(1+S_f)/2$ в направлении роста координаты y. Тогда уравнение (30) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t_f^2} - c_0^2\nabla_f^2\eta + S_f(\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\nabla_f)^2\eta - (\boldsymbol{u}_f\cdot\nabla_f)^2\eta - \frac{C_d}{R_{uv}^2}\frac{\partial^2}{\partial t_f^2}\Big(\frac{\partial^2\eta}{\partial x_f^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y_f^2}\Big) - C_{Nxx}\frac{\partial^2\eta^2}{\partial x_f^2} -$$

$$- C_{Nxy}\frac{\partial^2\eta^2}{\partial x_f\partial y_f} - C_{Nyy}\frac{\partial^2\eta^2}{\partial y_f^2} - \int\limits_0^{t_f}\Big(C_{Bxx}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_f^2} + C_{Bxy}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_f\partial y_f} + C_{Byy}\frac{\partial^2\eta}{\partial y_f^2}\Big)\frac{dt'}{\sqrt{t_f - t'}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,\boldsymbol{f}_{L0}\cdot\nabla_f\eta_0 + (\boldsymbol{f}_{N0}\cdot\nabla_f)(\eta_0\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\nabla_f\eta). \qquad (31)$$

Здесь $t_f = t$; $\nabla_f = (\partial/\partial x_f, \partial/\partial y_f)$; $R_{uv} = 1 - \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{u}_f/c^2$; $x_f = x - u_f t$; $y_f = y - v_f t$. Теперь различие между уравнением (31) и уравнением из работы [6] состоит лишь в том, что в уравнении (31) не учитывается наклон дна, а уравнение из [6] не содержит слагаемых, аналогичных членам со вторыми смешанными производными по горизонтальным координатам и последнему слагаемому в правой части данного уравнения (схемы для них на основе центральных разностей общеизвестны). На рис. 2–4 представлены результаты вычислений эволюции одиночных возмущений, выполненных с шагом по координатам x и y, равным соответственно 2 и 10 см, и с шагом по времени, равным 0,5 с.

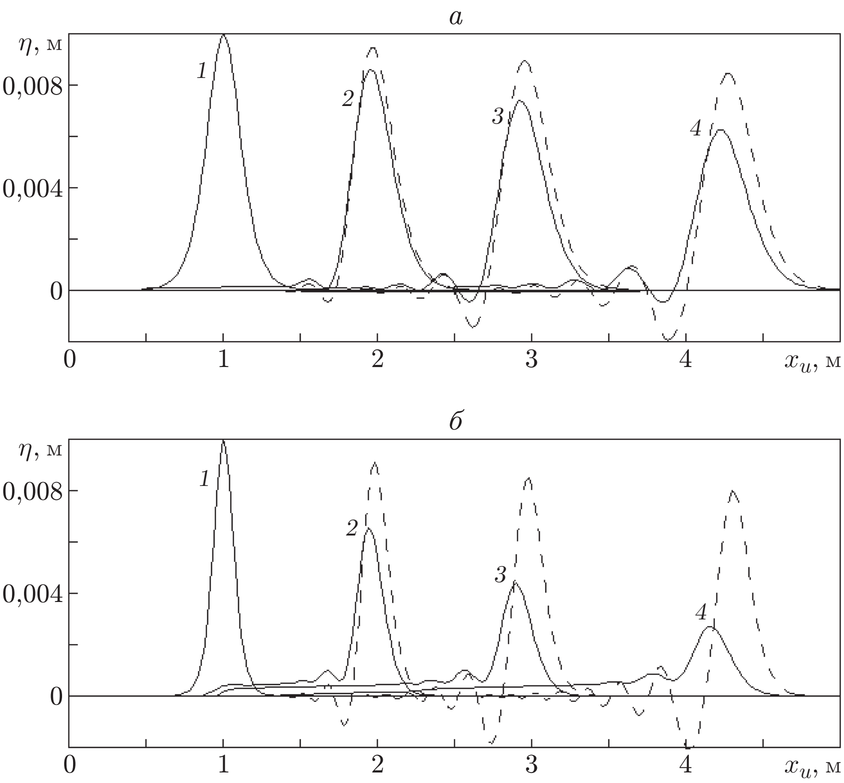

Рис. 2. Профили умеренно длинных возмущений в различные моменты времени t ($h_1 = 5$ см, $h_1/h_2 = 5/4$, $\rho_1 = 1$ г/см^3, $\rho_1/\rho_2 = 0{,}98$, $\nu_1 = 1$ мм^2/с, $\nu_1/\nu_2 = 0{,}23$, $\sigma = 45$ мН/м):

а — $u_0^* = -0{,}5$; *б* — $u_0^* = 0{,}5$; сплошные линии — с учетом нестационарного трения, штриховые — без учета диссипации; *1* — $t = 0$, *2* — $t = 15$ с, *3* — $t = 30$ с, *4* — $t = 50$ с

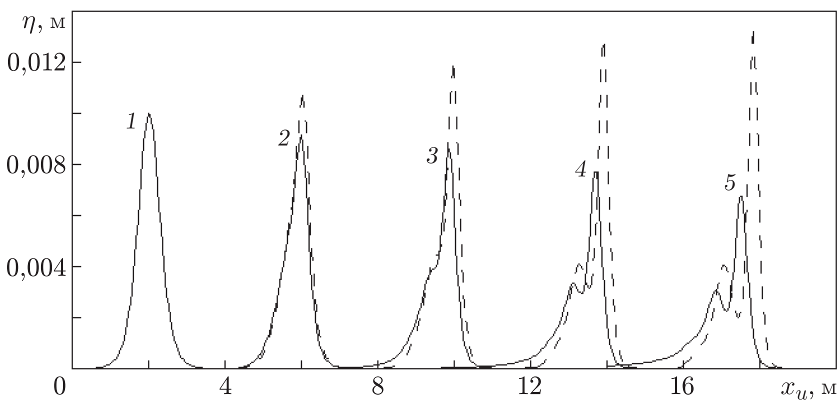

Рис. 3. Профили достаточно длинных волн в различные моменты времени t ($h_1 = 6$ см, $h_1/h_2 = 2$, $\rho_1 = 1$ г/см^3, $\rho_1/\rho_2 = 0{,}98$, $\nu_1 = 1$ мм^2/с, $\nu_1/\nu_2 = 0{,}23$, $\sigma = 45$ мН/м, $u_0^* = -0{,}5$):
сплошные линии — с учетом нестационарного трения, штриховые — без учета диссипации; *1* — $t = 0$, *2* — $t = 60$ с, *3* — $t = 120$ с, *4* — $t = 180$ с, *5* — $t = 240$ с

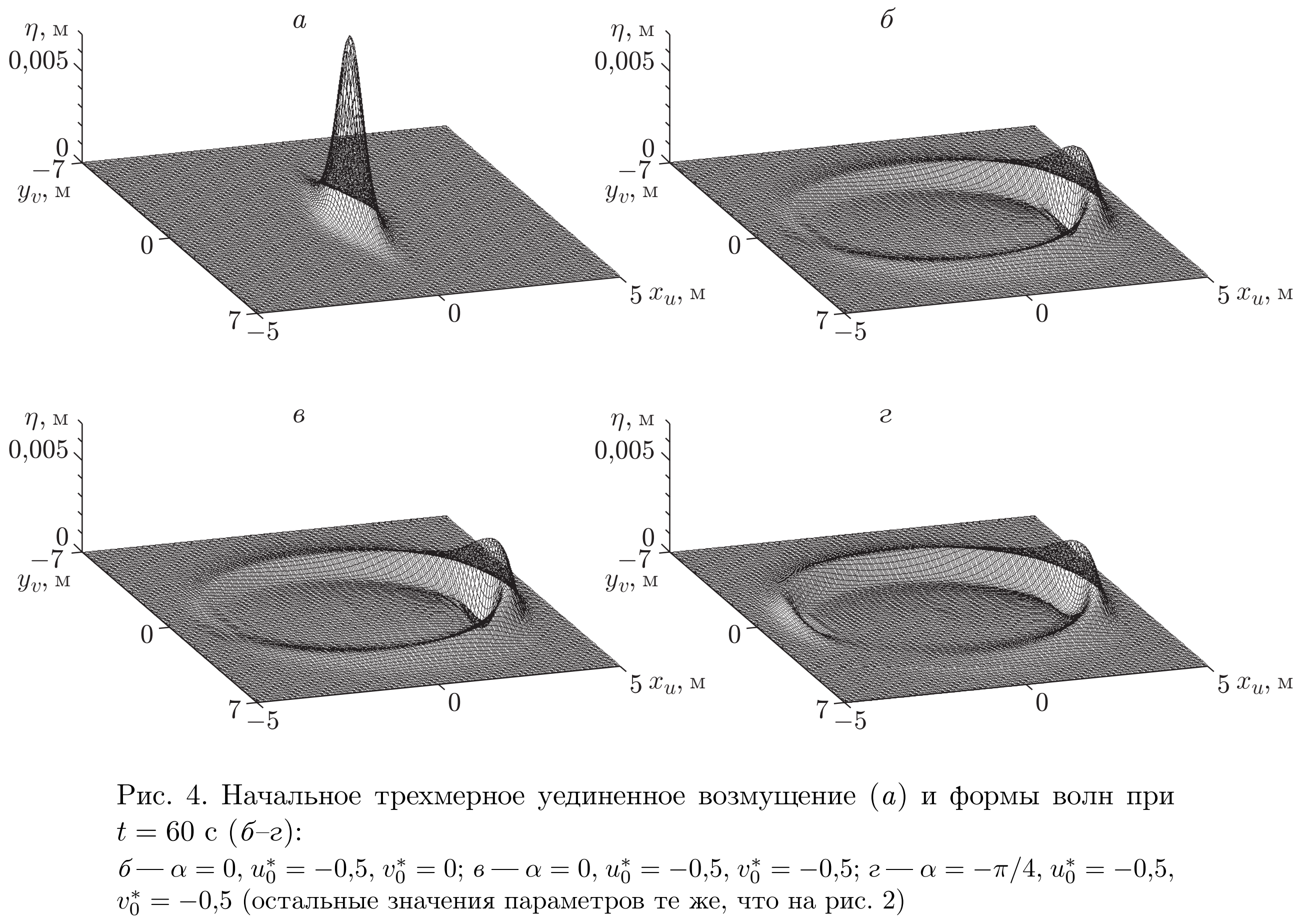

Рис. 4. Начальное трехмерное уединенное возмущение (*а*) и формы волн при $t = 60$ с (*б–г*):
б — $\alpha = 0$, $u_0^* = -0{,}5$, $v_0^* = 0$; *в* — $\alpha = 0$, $u_0^* = -0{,}5$, $v_0^* = -0{,}5$; *г* — $\alpha = -\pi/4$, $u_0^* = -0{,}5$, $v_0^* = -0{,}5$ (остальные значения параметров те же, что на рис. 2)

Сначала рассмотрим задачи, в которых исходными возмущениями (на первом и втором слоях по времени) являются плоские (не зависящие от координаты y) уединенные волны

$$\eta = \eta_s \operatorname{sech}^2(\xi/L), \qquad (32)$$

подобные солитонному (бездиссипативному) решению одномерного уравнения (29):

$$L = L_s = U\sqrt{\frac{6C_d}{\eta_a C_{Nxx}}}, \qquad U = \frac{u_{0i}(1+S_f)}{2} + \sqrt{\frac{u_{0i}^2(1-S_f)^2}{4} + c_0^2 + \frac{2}{3}\,\eta_a C_{Nxx}}.$$

Здесь $\xi = x - Ut$. Следовательно, задание частной производной по времени в начальный момент не вызывает затруднений. Отметим, что компоненты скорости горизонтального потока v_{0l} оказывают влияние лишь в случае, когда производные по координате y не равны нулю.

Если исходные возмущения являются умеренно длинными (зависимость (32) при $L = L_s/2$), то их передние фронты становятся более пологими и за ними возникают медленно затухающие осцилляции (см. рис. 2). Как и в случае отсутствия установившегося потока (см. [7]), не только уменьшается амплитуда возмущений, но и появляются диссипативные хвосты. На рис. 2 видно влияние нестационарного трения на границах, так как при $u_0^* = -0{,}5$ значение главного диссипативного коэффициента C_{Bxx} приблизительно в два раза меньше, чем при $u_0^* = 0{,}5$ (см. [5]). В случае бóльших вязких потерь колебания за основной волной почти исчезают и возмущения не меняют знак.

Если исходная волна является достаточно длинной (зависимость (32) при $L = 2L_s$), то в случае отсутствия диссипации сначала возмущение трансформируется в треугольное с крутым передним и растянутым задним фронтами, а затем из него выделяется цепочка уединенных волн с уменьшающейся амплитудой (см. рис. 3). Учет нестационарных трений не позволяет расти головному возмущению и тормозит образование цепочки солитонов.

Рассмотрим эволюцию слабонелинейной волны, уединенной в пространстве. На рис. 4 приведены результаты расчетов для исходного возмущения

$$\eta = \eta_s \operatorname{sech}^2(\xi_x/L_s) \operatorname{sech}^2(0{,}25\xi_y/L_s),$$

где $\xi_x = x - tU\cos\alpha$; $\xi_y = y - tU\sin\alpha$; α — угол между направлением распространения волны и осью Ox. Видно, что возмущение трансформируется в волну подковообразной формы. Наличие установившегося течения по трансверсальной координате приводит к более сильному затуханию возмущения. Изменение начального направления движения волны влияет в основном на асимметрию "дужек подковы".

Ранее подобные возмущения наблюдались на поверхности стекающих пленок жидкости (см., например, [8–10]), однако физика процесса в указанных ситуациях существенно различается. Силой, возвращающей возмущенную горизонтальную границу в положение равновесия, является гравитация, а дисперсия обусловлена, прежде всего, инерцией слоев и поверхностным натяжением. Для волн на свободной границе пленки жидкости баланс силы тяжести и трения о вертикальную твердую стенку создает установившийся поток и определяет фазовую скорость возмущений. Кроме того, если волны на такой поверхности могут двигаться лишь вниз по течению, то возмущения горизонтальной границы раздела способны распространяться и против потока. Наконец, в случае волн на свободной поверхности вертикальной пленки жидкости подковообразные конфигурации могут быть стационарными (диссипация компенсируется накачкой), а затухание возмущений в горизонтальном канале принципиально неустранимо.

Заключение. Получено модельное эволюционное интегродифференциальное уравнение для умеренно длинных волн малой, но конечной амплитуды, распространяющихся под любым углом к вектору установившегося течения. Предложенный метод может быть применен не только для слоистых течений Пуазейля, но и для других профилей потока. С учетом нестационарных напряжений трения на всех границах системы численно исследована трансформация нелинейных уединенных плоских и трехмерных возмущений. Показано влияние скорости и направления установившегося потока на амплитуду и форму волн.

Авторы выражают благодарность П. И. Гешеву и О. Ю. Цвелодубу за обсуждение ряда вопросов и полезные советы, а также А. А. Литвиненко за разработку первоначальной версии программы расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Peregrine D. H.** Interactions of water waves and currents // Adv. Appl. Mech. 1976. V. 16. P. 9–117.
2. **Степанянц Ю. А.** Распространение волн в сдвиговых потоках / Ю. А. Степанянц, А. Л. Фабрикант. М.: Наука, 1996.
3. **Ляпидевский В. Ю.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
4. **Полухин Н. В., Пелиновский Е. Н., Талипова Т. Г., Муякшин С. И.** О влиянии сдвиговых течений на вертикальную структуру и кинематические параметры внутренних волн // Океанология. 2004. Т. 44, № 1. С. 26–33.
5. **Архипов Д. Г., Хабахпашев Г. А.** Моделирование длинных нелинейных волн на границе раздела горизонтального потока двухслойной вязкой жидкости в канале // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2005. № 1. С. 143–158.
6. **Литвиненко А. А., Хабахпашев Г. А.** Численное моделирование нелинейных достаточно длинных двумерных волн на воде в бассейнах с пологим дном // Вычисл. технологии. 1999. Т. 4, № 3. С. 95–105.
7. **Хабахпашев Г. А.** Трансформация длинных нелинейных волн в двухслойной вязкой жидкости между пологими дном и крышкой // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 6. С. 45–57.
8. **Петвиашвили В. И., Цвелодуб О. Ю.** Подковообразные солитоны на стекающей вязкой пленке жидкости // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238, № 6. С. 1321–1323.
9. **Алексеенко С. В.** Волновое течение пленок жидкости / С. В. Алексеенко, В. Е. Накоряков, Б. Г. Покусаев. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1992.
10. **Алексеенко С. В., Антипин В. А., Гузанов В. В. и др.** Стационарные уединенные трехмерные волны на вертикально стекающей пленке жидкости // Докл. РАН. 2005. Т. 405, № 2. С. 193–195.

Поступила в редакцию 20/VI 2006 г.