О ВЛИЯНИИ ПЕРЕМЕННОСТИ МОДУЛЯ УПРУГОСТИ НА ВЕЛИЧИНУ ТЕРМОУПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРЕВЕ СТЕРЖНЯ

В. М. Кульгавчук, А. А. Учаев

(Москва)

При практическом использовании теплового удара в стержне с грузом на конец по методике [1] для изучения устойчивости стержня и динамического модуля упругости при повышенных температурах в определенных условиях необходимо учитывать влияние переменности модуля упругости на величину термоупругих сил. Рассмотрению этого вопроса посвящено данное сообщение.

Рассмотрим поведение упругого стержня длиной l массой m, закрепленного на одном конце $x = 0$, с сосредоточенной массой M на другом конце $x = l$, при быстром нагреве. Ввиду того что модуль упругости материала стержня зависит от температуры, которая в свою очередь будет функцией времени, в дальнейшем полагаем, что модуль упругости $E = E(t)$ будет функцией времени.

Динамическое уравнение равновесия для массы M имеет вид

$$Mu^{\cdot\cdot} + \sigma F = 0 \tag{1}$$

Здесь u — перемещение конца стержня с грузом M в осевом направлении, σ — продольные напряжения на этом конце, F — площадь поперечного сечения стержня, точка в позиции штриха означает дифференцирование по времени t.

Пренебрегая термоупругим взаимодействием и используя связь между напряжением и деформацией

$$\sigma(t) = E(t)\,[l^{-1}u(t) - \alpha T(t)] \tag{2}$$

где α — коэффициент линейного расширения, $T(t)$ — повышение температуры к моменту времени t, преобразуем уравнение равновесия к виду

$$Mu^{\cdot\cdot} + E(t)Fl^{-1}u = E(t)F\alpha T(t) \tag{3}$$

Считаем, что стержень нагревается по длине и поперечному сечению равномерно и повышение его температуры можно выразить уравнением

$$T(t) = T_+ t / t^* \quad (0 \leqslant t \leqslant t^*), \qquad T(t) = T_+ \quad (t > t^*) \tag{4}$$

Здесь T_+ — максимальное повышение температуры, t^* — время нагрева. Ввиду того, что для многих материалов зависимость модуля упругости от температуры в широком интервале можно аппроксимировать линейной функцией [2], используя условие (4) представим эту зависимость в форме

$$E(t) = E_0(1 - \lambda)t / t^* \quad (0 \leqslant t \leqslant t^*), \qquad (\lambda = 1 - E_1 / E_0)$$

$$E(t) = E_1 \qquad (t > t^*) \tag{5}$$

Здесь $\lambda = 1 - E_1 / E_0$ — параметр, E_0, E_1 — модуль упругости при исходной температуре и после ее повышения на T_+.

Подставляя (4) и (5) в уравнение (3), получим

$$u^{\cdot\cdot} + \omega^2\eta u = \omega^2\eta l\alpha T_+ t / t^* \tag{6}$$

$$\omega = \frac{c}{l}\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{1/2}, \quad c = \left(\frac{E_0}{\rho}\right)^{1/2}, \quad \gamma = \frac{m}{M}, \quad \eta = 1 - \lambda t / t^*$$

ρ — плотность материала стержня

Решением однородного уравнения (6) будут функции [3]

$$u_1(t) = \eta^{1/2} J_{1/3}\left[\frac{2}{3}\,\frac{\omega t^*}{\lambda}\,\eta^{3/2}\right], \qquad u_2(t) = \eta^{1/2} Y_{1/3}\left[\frac{2}{3}\,\frac{\omega t^*}{\lambda}\,\eta^{3/2}\right] \tag{7}$$

Здесь $J_{1/3}(z)$ и $Y_{1/3}(z)$ — бесселевы функции первого и второго рода.

При нулевых начальных данных перемещение и скорость движения $u^{\cdot}$ конца стержня $x = l$ определяются выражениями

для $0 \leqslant t \leqslant t^*$

$$\frac{u(t)}{l\alpha T_+} = \frac{\pi}{3\lambda}\,\eta^{1/2}\left[J_{1/3}(\beta)\,Y_{1/3}(\beta\eta^{3/2}) - Y_{1/3}(\beta)\,J_{1/3}(\beta\eta^{3/2})\right] + \frac{t}{t^*}$$

$$\frac{u^{\cdot}(t)}{l\alpha T_+\omega} = \frac{\pi}{3\lambda}\left[\frac{1}{3\beta}\,\eta^{-1/2}\left(Y_{1/3}(\beta)\,J_{1/3}(\beta\eta^{3/2})\right) - J_{1/3}(\beta)\,Y_{3/2}(\beta\eta)^{3/2}\right) +$$

$$+\,\eta\left(Y_{1/3}(\beta)\,J^{\cdot}(\beta\eta^{3/2}) - J_{1/3}(\beta)\,Y_{1/3}^{\cdot}(\beta\eta^{3/2})\right) + \frac{1}{\omega t^*}\Big] \qquad (8)$$

для $t > t^*$

$$\frac{u(t)}{l\alpha T_+} = 1 + \frac{\pi}{3}\,\frac{\varphi^{1/2}}{\lambda}\,A\left[1 + \frac{1}{\varphi^2}\left(\frac{1}{{}^1\!/\!_2\pi\beta A} - \frac{\varphi^{-1/2}}{{}^1\!/\!_2\pi\beta A}\,\frac{J_{1/3}(\beta)}{J_{1/3}(\beta\varphi^{3/2})} - \right.\right.$$

$$\left.\left.-\,\varphi\,\frac{J_{-2/3}(\beta\varphi^{3/2})}{J_{1/3}(\beta\varphi)^{3/2}}\right)^2\right]^{1/2}\sin\left[\omega_1(t - t^*) + \delta\right]$$

$$\frac{u^{\cdot}(t)}{l\alpha T_+\omega_1} = \frac{\pi}{3}\,\frac{\varphi^{1/2}}{\lambda}\,A\left[1 + \frac{1}{\varphi^2}\left(\frac{1}{{}^1\!/\!_2\pi\beta A} - \frac{\varphi^{-1/2}}{{}^1\!/\!_2\pi\beta A}\,\frac{J_{1/3}(\beta)}{J_{1/2}(\beta\varphi^{3/2})} - \right.\right.$$

$$\left.\left.-\,\varphi\,\frac{J_{-2/3}(\beta\varphi^{3/2})}{J_{1/2}(\beta\varphi^{3/2})}\right)^2\right]^{1/2}\cos\left[\omega_1(t - t^*) + \delta\right] \qquad (9)$$

Здесь

$$A = \left[J_{1/3}(\beta)\,Y_{1/3}(\beta\varphi^{3/2}) - J_{1/3}(\beta\varphi^{3/2})\,Y_{1/3}(\beta)\right] \qquad (\varphi = 1 - \lambda)$$

$$\beta = \frac{2}{3}\,\frac{\omega t^*}{\lambda}, \qquad \omega_1 = \frac{c_1}{l}\cdot\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{1/2} \qquad c_1 = \left(\frac{E_1}{\rho}\right)^{1/2}, \qquad \mathrm{tg}\,\delta = \frac{u(t^*) - l\alpha T_+}{u^{\cdot}(t^*)/\omega_1}$$

В формулах (9) значения $u(t)^*$ и $u^{\cdot}(t^*)$ вычисляются согласно (8) при $t = t^*$. Термоупругие напряжения в стержне найдем, используя формулу (2)

для $0 \leqslant t \leqslant t^*$

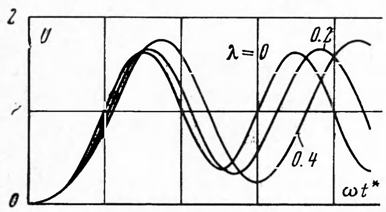
$$\frac{\sigma(t)}{E_0\alpha T_+} = \frac{\pi}{3\lambda}\,\eta^{3/2}\left[J_{1/3}(\beta)\,Y_{1/3}(\beta\eta^{3/2}) - J_{1/3}(\beta\eta^{3/2})\,Y_{1/2}(\beta)\right] \qquad (10)$$

для $t > t^*$

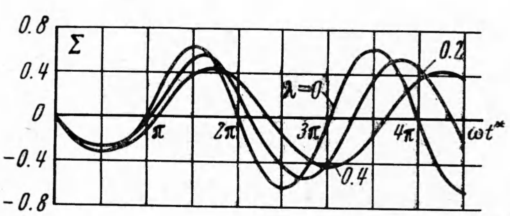
$$\frac{\sigma(t)}{E_0\alpha T_+} = \frac{\pi}{3\lambda}\,\varphi^{3/2}A\left[1 + \frac{1}{\varphi^2}\left(\frac{1}{{}^1\!/\!_2\pi\beta A} - \frac{\varphi^{-1/2}}{{}^1\!/\!_2\pi\beta A}\,\frac{J_{1/3}(\beta)}{J_{1/3}(\beta\varphi^{3/2})} - \right.\right.$$

$$\left.\left.-\,\varphi\,\frac{J_{-2/3}(\beta\varphi^{3/2})}{J_{1/2}(\beta\varphi^{3/2})}\right)^2\right]^{3/2}\sin\left[\omega_1(t - t^*) + \delta\right] \qquad (11)$$

Таким образом, перемещение конца стержня $x = l$, его скорость и напряжения в стержне при переменном модуле упругости полностью определяются (8) — (11).



Фиг. 1



Фиг. 2

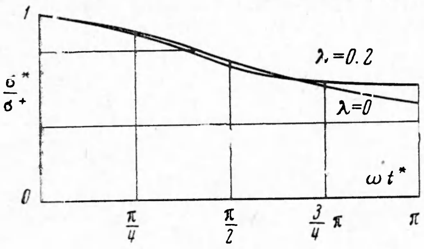
Рассмотрим предельный случай, когда время нарастания температуры t^* значительно меньше основного периода собственных колебаний стержня с грузом на конце

$2\pi / \omega$. При этом в формуле (9) $\beta \to 0$. Используя представления функций Бесселя в виде ряда [4], ограничиваясь первым членом разложения при малых значениях аргумента, будем иметь

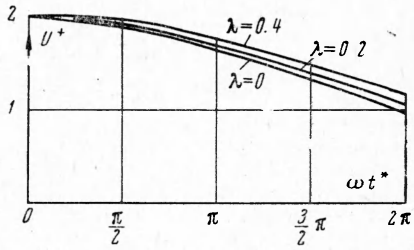
$$\frac{u(t)}{l\alpha T_+} = 1 - \cos \omega_1 t, \qquad \frac{\sigma(t)}{E_1 \alpha T_+} = \cos \omega_1 t \tag{12}$$

Из выражения (12) вытекает, что в этом случае, как и следовало ожидать, частота собственных колебаний и максимальная амплитуда термоупругих напряжений определяются значением модуля упругости после нагрева на T_+. На фигурах здесь и дальше приняты обозначения $U = u / l\alpha T_+$ и $\Sigma = \sigma / E_0 \alpha T_+$.

Влияние параметра λ и времени нагрева ωt^* на перемещение конца стержня и напряжения в нем, в то время, когда колебания вынужденные (во время нагрева) и когда они свободные (после нагрева), можно видеть из фиг. 1 и 2, где приведены зависимости $u(t)$ и $\sigma(t)$ при $\omega t^* = \pi$ и различных значениях параметра λ. С ростом λ

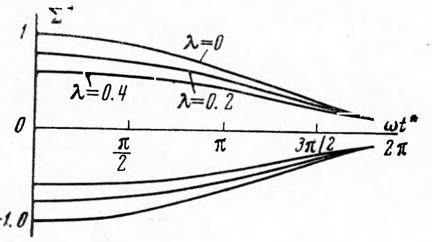


Фиг. 3



Фиг. 4

увеличивается период свободных колебаний; это объясняется уменьшением модуля упругости E при нагреве (см. соотношение (1) работы [1]). Напряжения сжатия во время нагрева имеют меньшую амплитуду, чем после него (фиг. 2). Для различных времени нагрева ωt^* и параметра λ отношение максимального напряжения сжатия в первой четверти периода к максимальному напряжению сжатия после нагрева σ^* / σ^+ представлены на фиг. 3.



Фиг. 5

На фиг. 4 и 5 приведены зависимости максимальных перемещения u^+ и напряжения σ^+ от времени нагрева ωt^* и параметра λ. Из этих зависимостей видно, что при $\omega t^* < {}^1/_2\pi$ максимальные перемещения слабо зависят от параметра λ; влияние λ на напряжения примерно пропорционально величине λ.

Анализ представленных на фиг. 1 и 2 данных показывает, что при времени нагрева, не превышающем четверти периода, расчет перемещений и термоупругих напряжений можно производить без большой погрешности, как для случая мгновенного нагрева с периодом свободных колебаний и модулем упругости, взятыми при максимальной температуре нагрева, т. е. по соотношению (12).

Поступила 13 VIII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Кульгавчук В. М., Мухранов А. П. Возбуждение продольных колебаний стержней при пропускании по ним импульсов электрического тока большой плотности. ПМТФ, 1967, № 3.
2. Köster W. Die Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmodul reiner Metalle. Z. Metallkunde, 1948, Bd 39, Nr 1.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., Физматгиз, 1961.
4. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Гостехиздат, 1951.