

Для концентрированных систем (особенно при малых  $k$ , т. е. при сильном оттеснении примеси от поверхности раздела) нужно учитывать нелинейность уравнения ликвидуса и, главное, наличие особых точек на диаграммах фазового равновесия, в частности, соответствующих эвтектике или перитектике. Последние могут изменить характер протекания процесса затвердевания даже в качественном отношении и потому заслуживают отдельного рассмотрения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лодиз Р., Паркер Р. Рост монокристаллов.— М.: Мир, 1974.
2. Флеминг М. Процессы затвердевания.— М.: Мир, 1977.
3. Рубинштейн Л. П. Проблема Стефана.— Рига: Зинатне, 1967.
4. Иванцов Г. П. «Диффузионное» переохлаждение при кристаллизации бинарного сплава // ДАН СССР.— 1951.— Т. 81, № 2.
5. Овсепенко Д. Е., Костюченко В. П., Маслов В. В., Алфинцев Г. А. Влияние переохлаждения на структуру слитка никеля // Кинетика и механизм кристаллизации.— Минск: Наука и техника, 1973.
6. Алфинцев Г. А., Овсепенко Д. Е., Стойчев Н. В., Маслов В. В. Влияние кремния на переохлаждение железа и структура слитков железокремнистых сплавов после разных переохлаждений // Там же.
7. Борисов В. Т., Дураченко А. М., Духин А. П. и др. Исследование неравновесных явлений при кристаллизации сплавов и их влияния на формирование структуры // Проблемы металловедения и физики металлов.— 1976.— № 3.
8. Бурханов Г. С., Сорокин С. Р. Концентрационное переохлаждение в тугоплавких системах на основе вольфрама // Высокочистые и монокристаллические металлические материалы.— М.: Наука, 1987.
9. Борисов В. Т. Кристаллизация бинарного сплава при сохранении устойчивости // ДАН СССР.— 1961.— Т. 136, № 3.
10. Борисов В. Т., Виноградов В. В., Духин А. П. и др. О применимости теории квазиравновесной двухфазной зоны к описанию кристаллизации слитка // Изв. АН СССР. Металлы.— 1971.— № 6.
11. Борисов В. Т., Виноградов В. В., Тяжелыникова И. Л. Квазиравновесная теория двухфазной зоны и ее применение к затвердеванию сплавов // Изв. вузов. Черная металлургия.— 1977.— № 5.
12. Авдонин И. А. Математическое описание процессов кристаллизации.— Рига: Зинатне, 1980.
13. Проблемы роста кристаллов/Под ред. Н. Н. Шефталы и Е. И. Гиваргизова.— М.: Мир, 1968.
14. Ентов В. М., Максимов А. М., Цыпкин Г. Г. Об образовании двухфазной зоны при кристаллизации смеси в пористой среде // ДАН СССР.— 1986.— Т. 288, № 3.
15. Максимов А. М., Цыпкин Г. Г. Образование двухфазной зоны при взаимодействии влажных пород с охлажденным раствором соли // ИФЖ.— 1988.— Т. 55, № 3.
16. Самойлович Ю. А. О возможности кристаллизации расплава в режиме автоколебаний // ТВТ.— 1979.— Т. 17, № 5.
17. Соболев В. В., Трефилов П. М. О периодической кристаллизации бинарного сплава // ФХОМ.— 1984.— № 5.
18. Самойлович Ю. А., Крулевецкий С. А., Горяинов В. А., Кабаков З. К. Тепловые процессы при непрерывном литье стали.— М.: Металлургия, 1982.

г. Свердловск

Поступила 31/1 1989 г.

УДК 534.2:532

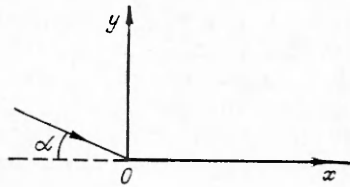
В. А. Мурга

#### ПОГЛОЩЕНИЕ ЗВУКА В БЛИЗИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОЙ ПЛОСКОСТИ

1. В известной работе Б. П. Константинова [1] исследовано поглощение звука в вязкой и теплопроводящей сжимаемой жидкости (или газе) при отражении плоской звуковой волны от бесконечной жесткой плоскости. При этом коэффициент поглощения, определяемый как отношение поглощенной энергии к падающей, при малых углах скольжения ( $\alpha \ll 1$ ) равен

$$(1.1) \quad d = 4M/(1 + 2M + 2M^2),$$

© 1990 Мурга В. А.



Р и с. 1

где  $M = k_0(v/2\omega)^{1/2}/\alpha$ ;  $k_0 = \omega/c$  ( $\omega$  — угловая частота колебаний,  $c$  — скорость звука);  $v$  — коэффициент кинематической вязкости жидкости (для краткости здесь и везде ниже считаем, что диссипация звуковой энергии обусловлена только вязкостью среды); предполагается также, что  $k_0(v/\omega)^{1/2} \ll 1$ . Особенно интересно поведение коэффициента  $d$  в области углов

скольжения  $\alpha \leq k_0(v/\omega)^{1/2}$ : здесь он резко меняется по углу и при  $\alpha = k_0(v/\omega)^{1/2}$  достигает максимума, равного  $2(\sqrt{2} - 1)$  и не зависящего от свойств жидкости и от частоты колебаний (эффект Константина [2]).

Отметим, что для реального случая конечной пластины именно в этой области углов скольжения формула (1.1) верно отражает процесс на таком большом расстоянии от края пластины, на котором сама падающая волна практически затухает из-за поглощения в свободном пространстве. В самом деле, из теории дифракции известно, что отраженную волну вблизи поверхности пластины можно считать плоской (как это принято в [1]) на таком расстоянии  $x$  от края пластины, когда выполняется условие  $\alpha^2 k_0 x \gg 1$ . Коэффициент поглощения звука в свободном пространстве  $\gamma = 2k_0^3 v/\omega$  [3], так что если  $\alpha \sim k_0(v/\omega)^{1/2}$ , то указанное условие принимает вид  $\gamma x \gg 1$ , что и означает сильное затухание падающей волны на расстоянии  $x$  вдоль пластины.

Для исследования звукопоглощения вблизи конечной пластины при любых малых углах скольжения и на таких расстояниях от края пластины, чтобы падающая волна еще не затухала, необходимо отказаться от предположения, что «отраженное» поле является плоской волной. Это исследование проведено в данной работе для случая полубесконечной плоскости. Показано, что влияние вязкости и условие прилипания на плоскости приводят к своеобразному «волноводному» эффекту, который состоит в том, что часть звуковой энергии распространяется вдоль плоскости, не удаляясь от нее, в виде неоднородной волны; это явление не имеет аналога в акустике идеальной жидкости.

2. Пусть на полубесконечную жесткую плоскость падает плоская монохроматическая звуковая волна с углом скольжения  $\alpha$  (двумерная задача). Расположение осей координат и направление падающей волны (указано стрелкой) показаны на рис. 1. Ось  $x$  направлена вдоль плоскости от передней кромки. Скорость частиц жидкости (с единичной амплитудой) в падающей волне дается выражением

$$(2.1) \quad \mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{k}}{k} e^{ik(x \cos \alpha - y \sin \alpha)}$$

( $\mathbf{k}$  — волновой вектор,  $k = k_0 + i\gamma$ , временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  всюду опущен). Для нахождения «отраженного» поля используем теорию Кирхгофа [4], согласно которой поле вектора скорости  $\mathbf{v}$  частиц вязкой сжимаемой жидкости, совершающей малые колебания, описывается уравнениями

$$(2.2) \quad \nabla^2 \mathbf{v}' + k^2 \mathbf{v}' = 0, \quad \nabla \times \mathbf{v}' = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{v}'' + \frac{i\omega}{v} \mathbf{v}'' = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}'' = 0,$$

причем  $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}''$ . Везде ниже рассматриваем поле в области  $y > 0$ . Следуя методу Фурье, ищем решение для продольной  $u'$  (вдоль оси  $x$ ) и поперечной  $v'$  компонент вектора  $\mathbf{v}'$  в виде

$$(2.3) \quad u' = \int_{-\infty}^{\infty} A_{\kappa} e^{i(\kappa x + \mu y)} d\kappa, \quad v' = \int_{-\infty}^{\infty} A_{\kappa} \mu e^{i(\kappa x + \mu y)} d\kappa/\kappa,$$

где  $A_{\kappa}$  — произвольная функция от  $\kappa$ ;  $\mu = (k^2 - \kappa^2)^{1/2}$ ; мнимая часть  $\mu$  должна быть положительна, чтобы выражения (2.3) имели физический смысл при  $y \rightarrow \infty$ . Очевидно, формулы (2.3) удовлетворяют первой паре

уравнений (2.2). Аналогично для продольной и поперечной компонент вектора  $\mathbf{v}''$  имеем

$$(2.4) \quad u'' = \int_{-\infty}^{\infty} B_{\kappa} e^{i(\kappa x + \sigma y)} d\kappa, \quad v'' = - \int_{-\infty}^{\infty} \kappa B_{\kappa} e^{i(\kappa x + \sigma y)} d\kappa / \sigma$$

( $\sigma = (i\omega/\nu - \kappa^2)^{1/2}$  (мнимая часть положительна),  $B_{\kappa}$  — произвольная функция от  $\kappa$ ). Выражения (2.4) удовлетворяют второй паре уравнений (2.2), причем  $u''$  и  $v''$  заметно отличаются от нуля лишь в области пограничного слоя толщиной  $\sim (\nu/\omega)^{1/2}$ .

Граничные условия при  $y = 0$  формулируем следующим образом. Для  $x > 0$  должно выполняться условие прилипания

$$u' + u'' + u_0 = 0, \quad v' + v'' + v_0 = 0$$

( $u_0$  и  $v_0$  — продольная и поперечная компоненты вектора  $\mathbf{v}_0$  (2.1)). На луче  $y = 0$ ,  $x < 0$  скорость частиц жидкости неизвестна. В идеальной жидкости можно было бы положить, что отраженное поле здесь отсутствует. Тогда решение будет правильным вблизи границ полной тени и тени отраженной волны (а также при условии  $k_0 x \gg 1$ ) [5]; в частности, при малых углах скольжения решение верно в области, где выполняется условие  $y/x \ll 1$ . Полное обоснование высказанного утверждения получается из решения задачи о дифракции электромагнитной волны на проводящей плоскости (Зоммерфельд, [6]).

В случае вязкой жидкости предположение о том, что на указанном луче отраженное поле отсутствует, строго говоря, неверно; однако в первом приближении можно считать его правильным, что вытекает из следующих рассуждений. Из физических соображений ясно, что влияние вязкости в области  $x < 0$  проявляется лишь в непосредственной близости от передней кромки, в «вязкой» области размером  $\sim (\nu/\omega)^{1/2}$ ; в остальной области поле в первом приближении такое же, как и в случае идеальной жидкости. Это одно из основных положений, на которых базируется теория пограничного слоя. Поэтому если в качестве граничных условий на луче принять  $u' + u'' = 0$ ,  $v' + v'' = 0$ , то в силу вышесказанного они являются неверными в вязкой области, где  $u''$  и  $v''$  заметно отличны от нуля. Поскольку размер вязкой области существенно мал по сравнению с другим характерным размером задачи — длиной волны звука (отношение этих величин — параметр  $\varepsilon = k_0(\nu/\omega)^{1/2} \ll 1$ ), — можно ожидать, что в первом приближении вязкая область на луче вообще не влияет на решение задачи, это влияние будет заметно лишь в последующих приближениях (которые в работе не рассматриваются). Сказанное следует из общих положений теории возмущений. Таким образом, первое приближение должно представлять собой первый член в разложении точного решения задачи в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon$ . Следующий член разложения пропорционален  $\varepsilon$  в первой степени.

Приведенное обоснование принятых граничных условий на луче  $y = 0$ ,  $x < 0$ , разумеется, не является строгим, однако с физической точки зрения оно довольно очевидно.

Используя (2.3), (2.4), а также разложение в интеграл Фурье функции

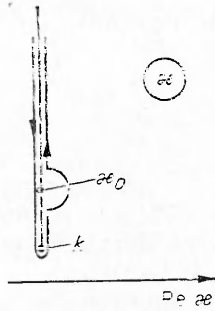
$$f(x) = \begin{cases} v_0 = \frac{\mathbf{k}}{k} e^{i\mathbf{h}\mathbf{m}\cos\alpha}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = \frac{\mathbf{k}}{k} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa x} \frac{d\kappa}{k \cos \alpha - \kappa},$$

с помощью граничных условий при  $y = 0$  имеем для  $A_{\kappa}$  и  $B_{\kappa}$ :

$$A_{\kappa} + B_{\kappa} = - \frac{i \cos \alpha}{2\pi (k \cos \alpha - \kappa)},$$

$$\mu A_{\kappa} / \kappa - \kappa B_{\kappa} / \sigma = \frac{i \sin \alpha}{2\pi (k \cos \alpha - \kappa)}.$$

Находя отсюда  $A_{\kappa}$  и используя (2.3), получаем после упрощений, свя-



Р и с. 2

занных с условиями  $\alpha \ll 1$  и  $k_0(v/\omega)^{1/2} \ll 1$ :

$$(2.5) \quad u' = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\kappa\alpha - \kappa^2 \sqrt{v/i\omega}) e^{i(\kappa x + \mu y)}}{(k \cos \alpha - \kappa) (\mu + \kappa^2 \sqrt{v/i\omega})} d\kappa$$

( $\cos \alpha = 1 - \alpha^2/2$ ). Выражение (2.5) описывает отраженное поле (продольную компоненту вектора скорости частиц жидкости) в потенциальной области, т. е. вне пограничного слоя (поскольку здесь  $u'' = 0$ ). В дальнейшем штрихи опускаем.

Мнимая часть  $\mu = (k^2 - \kappa^2)^{1/2}$  положительна при всех (вещественных)  $\kappa$ , если выбрать ту ветвь двузначной функции  $\mu(\kappa)$  (в плоскости комплексного переменного  $\kappa$ ), которая обладает положительной мнимой частью на отрезке вещественной оси  $-\omega/c \leq \kappa \leq \omega/c$ , и если провести разрезы из точек ветвления  $\kappa = k$  и  $\kappa = -k$  параллельно мнимой оси вверх и вниз. Выбранная ветвь  $\mu$  соответствует верхнему риманову листу.

Для вычисления интеграла (2.5) деформируем исходный контур интегрирования в плоскости комплексного переменного  $\kappa$ , оттянув его вверх на бесконечность. Можно показать, что интеграл по бесконечно удаленной части контура обращается в нуль, и остается выполнить интегрирование по берегам разреза (рис. 2). Кроме того, при таком деформировании контур пересекает полюс подынтегральной функции (2.5) в точке  $\kappa = k \cos \alpha$ , вклад в решение от вычета в этом полюсе есть

$$(2.6) \quad u_1 = \frac{\sqrt{i b - 1}}{\sqrt{i b + 1}} e^{ik(x \cos \alpha + y \alpha)}$$

( $b = \alpha(\omega/k_0^2 v)^{1/2}$ ). Полученное выражение описывает плоскую однородную волну, отраженную от пластины по законам геометрической акустики (см. [1]).

Подынтегральная функция (2.5) имеет еще один полюс (в верхней полуплоскости) в точке

$$(2.7) \quad \kappa_0 = k + ik_0^3 v / 2\omega$$

с точностью до отброшенных малых величин высших порядков (относительно параметра  $k_0^2 v / \omega$ ). Существенно, что второе слагаемое в правой части (2.7) — величина того же порядка, что и коэффициент поглощения  $\gamma$ , являющийся мнимой частью волнового числа  $k$ . Указанный полюс находится на линии разреза (рис. 2). В силу сделанного выбора ветви функции  $\mu(\kappa)$  знаменатель подынтегрального выражения в (2.5) обращается в нуль при подходе к полюсу справа от разреза; таким образом, полюс находится на правом верхнем (или на левом нижнем, что то же самое) берегу разреза. Контур интегрирования (по верхнему риманову листу) изображен на рис. 2. Малая полуокружность позволяет обойти особенность на правом берегу разреза. Интегрирование по малой полуокружности (при устремлении ее радиуса к нулю) дает

$$(2.8) \quad u_2 = \frac{1}{1 + \sqrt{i b}} e^{i(\kappa_0 x + \mu_0 y)}$$

$$(\mu_0 = (k^2 - \kappa_0^2)^{1/2} = k_0^2 (v/2\omega)^{1/2} (i - 1)).$$

Выражение (2.8) описывает плоскую неоднородную волну, распространяющуюся вдоль пластины, с амплитудой, зависящей от угла скольжения падающей волны, и с коэффициентом поглощения, равным  $\text{Im} \kappa_0 = \gamma + k_0^3 v / 2\omega = 7k_0^3 v / 6\omega$  (см. (2.7)). Если  $\alpha \gg k_0(v/\omega)^{1/2}$ , то  $b \gg 1$  и амплитуда волны (2.8) мала; если  $\alpha \leq k_0(v/\omega)^{1/2}$ , то амплитуда по порядку величины равна единице (при  $\alpha = 0$  амплитуда в точности равна единице). В случае идеальной жидкости ( $v = 0$ ,  $b = \infty$ )  $u_2 = 0$ .

Существование волны (2.8) связано с влиянием пограничного слоя на потенциальную область. Это влияние, как оказывается, приводит к

тому, что примыкающая к плоскости область шириной  $\sim (\omega/\nu)^{1/2}/k_0^2$  обладает в некотором роде свойством волновода. А именно, если источник звука находится в этой области, то часть звуковой энергии, излучаемая им в интервале углов скольжения  $0 \leq \alpha \leq k_0(\nu/\omega)^{1/2}$ , распространяется вдоль плоскости, не удаляясь от нее, в виде волны (2.8). Если  $\alpha \gg k_0(\nu/\omega)^{1/2}$ , то падающая волна не попадает в этот интервал углов и волна (2.8) образуется за счет энергии, излучаемой передней кромкой пластины (в этом интервале углов). При  $\alpha \leq k_0(\nu/\omega)^{1/2}$  в формировании этой волны включается сама падающая волна, что приводит к резкому возрастанию амплитуды (2.8).

Для вычисления интеграла (2.5) по оставшейся части деформированного контура наряду с условиями  $\alpha \ll 1$  и  $k_0(\nu/\omega)^{1/2} \ll 1$  используем условия  $k_0x \gg 1$  и  $k_0y \ll (k_0x)^{1/2}$ . Последнее позволяет заменить  $\exp(i\mu y)$  выражением  $1 + i\mu y$ ; малая добавка к единице сохранена для уточнения зависимости решения от  $y$ . После преобразований интеграл по обоим берегам разреза записывается в виде

$$(2.9) \quad u = \frac{2i}{\pi} (1 - \sqrt{i}b) e^{i(kx + \mu_0 y)} \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-a^2 \xi^2} d\xi}{(\xi^2 - ib^2)(1 - \xi^2)},$$

где  $a^2 = k_0^3 \nu x / 2\omega$ ;  $\xi^2 = 2s\omega / k_0^3 \nu$ ;  $\kappa = k + is$  ( $s$  вещественно). Интеграл (2.9) понимается в смысле главного значения, поскольку исключен участок интегрирования внутри бесконечно малой полуокружности, охватывающей полюс (в точке  $\xi = 1$ ). Вычисление этого интеграла приводит к двум слагаемым; первое

$$(2.10) \quad u_3 = - \frac{2b}{\sqrt{\pi}(1 + \sqrt{i}b)} e^{i(kx - w^2 + \mu_0 y)} \int_w^\infty e^{it^2} dt$$

( $w = ab = \alpha(k_0x/2)^{1/2}$ ) представляет собой дифракционное искажение. В случае идеальной жидкости ( $\nu = \mu_0 = 0$ ,  $b = \infty$ ) (2.10) переходит в выражение

$$(2.11) \quad u_3 = - \frac{2}{\sqrt{\pi i}} e^{i(kx - w^2)} \int_w^\infty e^{it^2} dt,$$

которое совпадает с упомянутым выше решением Зоммерфельда [6] (при  $\alpha \ll 1$ ) для случая, когда вектор напряженности магнитного поля поляризован параллельно передней кромке пластины; именно при этом имеет место полная аналогия между дифракцией электромагнитной волны на проводящей плоскости и звуковой волны (точнее, продольной компоненты скорости частиц жидкости) на жесткой плоскости в идеальной жидкости. Если  $\alpha \gg k_0(\nu/\omega)^{1/2}$  ( $b \gg 1$ ), то (2.10) слабо отличается от (2.11), однако при  $\alpha \leq k_0(\nu/\omega)^{1/2}$  отличие становится радикальным.

Второе слагаемое имеет вид

$$(2.12) \quad u_4 = \frac{2i}{\sqrt{\pi}(1 + \sqrt{i}b)} e^{i(\alpha \nu x + \mu_0 y)} \int_0^a e^{it^2} dt,$$

в случае идеальной жидкости оно обращается в нуль. На не очень больших расстояниях от кромки, когда  $a^2 = k_0^3 \nu x / 2\omega \ll 1$  (при этом, конечно,  $k_0x \gg 1$ ),  $u_4$  мало; когда  $a \sim 1$ , то  $u_4 \sim 1$ , в этом случае уже сказывается затухание падающей волны из-за поглощения в пространстве. При  $a \gg 1$  (падающая волна практически затухает)

$$u_4 \approx \frac{i}{\sqrt{\pi} a (1 + \sqrt{i}b)} e^{i(kx + \mu_0 y)}.$$

В последнем случае выражения (2.8), (2.10), (2.12) малы по сравнению

с (2.6), и, таким образом, последнее становится пригодным при всех углах скольжения, в том числе при  $\alpha = 0$ .

3. Величину поглощенной в пограничном слое звуковой энергии вычислим с помощью теоремы о диссипации энергии в жидкостях [3], согласно которой диссипированная энергия в слое (в единицу времени и на единицу площади пластины)

$$(3.1) \quad E = \eta \int_0^{\delta} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy,$$

где  $\eta = \nu\rho$ ;  $\rho$  — плотность жидкости;  $u$  — продольная компонента (вещественная) скорости в пограничном слое;  $\delta$  — толщина пограничного слоя. Поскольку в пограничном слое комплексная амплитуда  $u = u_e(1 - \exp[-(i\omega/\nu)^{1/2}y])$  ( $u_e$  — комплексная продольная скорость на внешней границе пограничного слоя), то осредненное по времени (3.1)

$$(3.2) \quad \bar{E} = \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_e|^2 \rho (\omega\nu)^{1/2}.$$

Величина  $u_e$  находится как сумма слагаемых (2.6), (2.8), (2.10), (2.12), а также  $u_0$  (падающая волна (2.1)) при  $y = 0$ . Если  $a \ll 1$  (наиболее интересный для приложений случай, когда затуханием в падающей волне можно пренебречь), то

$$(3.3) \quad u_e = 2e^{ik_0x} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \int_w^{\infty} e^{it^2} dt \right).$$

Примечательно, что, хотя перечисленные слагаемые по отдельности (кроме падающей волны) вследствие зависимости от вязкости резко меняются по углу в области  $\alpha \leq k_0(\nu/\omega)^{1/2}$ , результирующая скорость (3.3) не зависит от  $\alpha$  (для  $\alpha \ll 1$ ) и от вязкости, т. е.  $u_e$  ведет себя так же, как в случае идеальной жидкости, что представляется естественным, хотя и не очевидным заранее. Этот результат не имеет места при не слишком малых значениях параметра  $a$ .

Коэффициент  $d$  в пограничном слое получается, если разделить  $\bar{E}$  (3.2) на осредненную по времени величину потока энергии в падающей волне, приходящуюся на единицу площади пластины, т. е. на  $\rho c |v_0|^2 \alpha / 2$ ; таким образом, имеем

$$(3.4) \quad d = \frac{|u_e|^2 (\nu\omega)^{1/2}}{\alpha \sqrt{2} (c^2)^{1/2}},$$

поскольку  $|v_0| = 1$ . В частности, при одновременном выполнении условий  $a \ll 1$ ,  $\alpha \gg k_0(\nu/\omega)^{1/2}$ ,  $w = ab \gg 1$  из (3.3) следует  $|u_e| = 2$ , и тогда  $d = 2\sqrt{2}(\nu\omega/c^2)^{1/2}/\alpha = 4M$ , что совпадает с (1.1), поскольку здесь  $M \ll 1$ . В другом частном случае, когда  $a \ll 1$  и  $\alpha \leq k_0(\nu/\omega)^{1/2}$ ,  $w \ll 1$ , и из (3.3) получается  $|u_e| = 1$ , так что

$$(3.5) \quad d = (\nu\omega/c^2)^{1/2}/\alpha \sqrt{2} = M.$$

Это выражение справедливо при всех  $\alpha$  (в указанной области углов), в том числе и при  $\alpha = 0$ . Бесконечное значение  $d$  (3.5) при  $\alpha = 0$  не означает «бесконечно большого» поглощения, а является следствием принятого определения  $d$ ; «размерное» поглощение (3.2) вообще не зависит от  $\alpha$ . Таким образом, полученный результат (3.5), как и должно быть, принципиально отличается от результата (1.1), который, в силу сказанного, неприменим в области малых углов скольжения ( $\alpha \leq k_0\sqrt{\nu/\omega}$ ) для таких расстояний  $x$  от края пластины, на которых падающая волна еще не затухает из-за поглощения в пространстве ( $k_0x \gg 1$ , но  $k_0^2\nu x/\omega \ll 1$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Константинов Б. П. О поглощении звуковых волн при отражении от твердой границы // ЖТФ. — 1939. — Т. 9, № 3.
2. Дулов В. А. Эффект Брюстера в акустике и эффект Константинова // Акуст. журн. — 1980. — № 5.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. — М.: Гостехиздат, 1954.
4. Стретт Дж. В. (лорд Рэлей). Теория звука. — М.: ГИТТЛ, 1955. — Т. 2.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1967.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: ГИФМЛ, 1959.

г. Ленинград

Поступила 13/IV 1988 г.,  
в окончательном варианте — 23/II 1989 г.

УДК 532.546:536.421

А. А. Кислицын, Р. И. Нигматулин

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА НАГРЕВА НЕФТЯНОГО ПЛАСТА ВЫСОКОЧАСТОТНЫМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Одним из перспективных способов интенсификации добычи высоковязких нефтей и газогидратов, а также борьбы с осложнениями в скважинах, связанными с выпадением парафинов и газогидратов, является применение высокочастотного электромагнитного излучения [1—4]. Благодаря глубокому проникновению и возникающему вследствие этого объемному тепловыделению электромагнитное излучение способно обеспечить гораздо более высокую скорость и равномерность нагрева и более высокий КПД, чем традиционные способы теплового воздействия — нагретым паром или горячей жидкостью. Однако для реализации таких возможностей необходимо детально исследовать происходящие при этом процессы тепломассопереноса, чтобы найти оптимальные режимы воздействия. Первые теоретические оценки глубины прогрева и распределения температуры в прогретой зоне сделаны в [1]. В дальнейшем оценки уточнялись [2—4], однако исследований на двумерных моделях до настоящего времени не проводилось. В то же время при толщине пласта  $H \sim 1$  м, глубине проникновения излучения  $l \sim 10 \dots 100$  м и времени нагрева порядка десятков и сотен часов, весьма существенной будет утечка тепла в породы, прилегающие к пласту сверху и снизу. Следствие утечки — установление со временем стационарного температурного распределения (тогда как в одномерной осесимметричной модели при наличии источника постоянной мощности в начале координат температура во всей области со временем неограниченно растет).

Размер прогретой зоны, определяемый глубиной проникновения некоторой фиксированной изотермы, при фиксированной мощности источника и толщине пласта зависит от теплофизических параметров среды и коэффициента поглощения  $\alpha = 1/l$ . Последний, в свою очередь, зависит от частоты электромагнитного излучения, и им, следовательно, можно управлять. При малом  $\alpha$  (большая глубина проникновения излучения  $l$ ) энергия источника рассеивается в большой области и растекается в прилегающие породы, не производя необходимого нагрева. При большом  $\alpha$  (малая глубина  $l$ ) происходит сильный нагрев небольшой области, окружающей источник, возникает существенный градиент температуры, и тепло интенсивно растекается вверх и вниз в прилегающие породы, не обеспечивая необходимого радиального прогрева. В обоих случаях прогретая зона мала и нагрев неэффективен. Имеется, следовательно, некоторый оптимальный коэффициент поглощения, при котором (при фиксированной мощности источника) может быть получен наибольший размер прогретой зоны. Очевидно, существует также и оптимальное время нагрева (при каждом значении  $\alpha$ ), при котором отношение объема прогретой зоны к затраченной энергии максимально.

Определение этих оптимальных параметров, а также уточнение других величин, характеризующих процесс высокочастотного нагрева пласта, и является целью данной работы.]

**Модель и система уравнений.** Исследование проводилось на двумерной осесимметричной модели, изображенной на рис. 1. Нефтяной пласт толщины  $H$  заключен между плоскостями, перпендикулярными оси  $z$  (верхняя плоскость отмечена линией  $\beta$ ). Сверху и снизу пласт окружает неограниченная среда, ее теплофизические характеристики отличаются от характеристик пласта. В скважину, поверхность которой обозначена