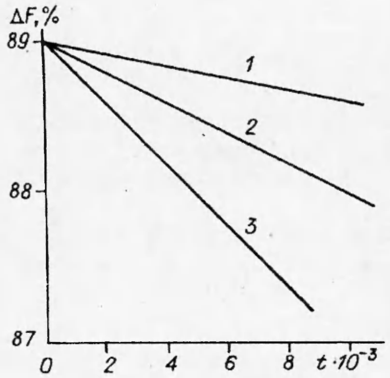

временем и тем быстрее, чем больше размер частиц, хотя это изменение по исследуемому интервалу времени относительно невелико (порядка 2 %). На рисунке линии *1—3* отвечают $R_1 = 5 \cdot 10^{-6}, 10^{-5}, 25 \times \times 10^{-6}$ м и $R_2 = 10^{-5}, 2 \cdot 10^{-5}, 5 \cdot 10^{-5}$ м.

Проведенный количественный анализ проблемы коагуляции основан на использовании при выводе уравнения (1) формулы расчета геометрической вероятности столкновения частиц, что приводит к завышенным, по сравнению с реальными, результатам по числу слипающихся частиц. Это обусловлено пренебрежением в идеализированной модели кинетики коагуляции обычно имеющего место на практике явления обтекания мелкими частицами крупных частиц [8, 9]. В связи с этим в целях уточнения расчетов ядро уравнения Смолуховского корректируют коэффициентом захвата [1].

В таком случае, хотя и приходят к уравнению, имеющему по сравнению с (1) более сложную структуру, количественный анализ этого уравнения в принципе может быть проведен по той же методике, что и по соотношению (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Волощук В.М., Седунов Ю.С.** Процессы коагуляции в дисперсных системах. — Л.: Гидрометеоиздат, 1975.
2. **Волощук В.М.** Кинетическая теория коагуляции. — Л.: Гидрометеоиздат, 1984.
3. **Маделунг Э.** Математический аппарат физики. — М.: Наука, 1968.
4. **Хаппель Д., Бреннер Г.** Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. — М.: Мир, 1976.
5. **Гришин С.Д., Тишин А.П., Хайрутдинов Р.И.** Неравновесное двухфазное течение в сопле Лаваля с коагуляцией частиц полидисперсного конденсата // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1969. — № 2.
6. **Крайко А.Н., Шрайбер А.А.** К построению модели, описывающей в одномерном приближении двухфазное течение с коагуляцией частиц полидисперсного конденсата // ПМТФ. — 1974. — № 2.
7. **Бабуха Г.Л., Шрайбер А.А.** Взаимодействие частиц полидисперсного материала в двухфазных потоках. — Киев: Наук. думка, 1972.
8. **Фукс Н.А.** Механика аэрозолей. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.
9. **Стернин Л.Е., Маслов Б.Н., Шрайбер А.А. и др.** Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. — М.: Машиностроение, 1980.

г. Москва

Поступила 16/X 1992 г.,
в окончательном варианте — 25/IV 1993 г.

УДК 532.516

Б.А. Луговцов

ВОЗМОЖНА ЛИ СПОНТАННАЯ ЗАКРУТКА ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ?

В ряде работ [1—4] высказана гипотеза о возможности возникновения спонтанной закрутки осесимметричного течения при отсутствии явных источников вращения, когда осесимметричное течение без вращения заведомо возможно. Смена типа симметрии (осевая симметрия — вращательноосевая) связывается с бифуркацией исходного режима при некотором числе Рейнольдса, когда уравнение для вращательной компоненты допускает нетривиальные решения, соответствующие устойчивому режиму, а режим без вращения становится неустойчивым. При этом в установившемся течении начальное возмущение полностью забывается и интенсивность вращения от него не зависит (однако направление вращения определяется начальным возмущением). Это явление названо авторами самовращением или вихревым динамо [4].

Представляется, что высказанная гипотеза чрезвычайно интересна, могла бы существенным образом повлиять на подходы к объяснению многих явлений природы и носит принципиальный характер. Поэтому очень важно получить убедительные доказательства справедливости или ошибочности этого предположения.

В настоящей работе приводятся аргументы, дающие основания для серьезных сомнений в справедливости высказанной гипотезы и существования явления спонтанной закрутки.

Если вязкость жидкости постоянна (не зависит от координат) и движение жидкости ламинарное, стационарное и вращательно-симметричное, то уравнение для $\Gamma = rv_\varphi$ в цилиндрической системе координат с осью z имеет вид (в общепринятых обозначениях)

$$v_r \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + v_z \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} \right). \tag{1}$$

Для этого уравнения справедлив двухсторонний принцип максимума: максимум и минимум Γ достигаются на границе. Это обстоятельство отмечается в [3, 4]. Отсюда следует, что для стационарных ламинарных осесимметричных течений с условием $\Gamma = 0$ на границе, являющейся поверхностью вращения, спонтанная закрутка отсутствует.

В [4], однако, утверждается, что если на части границы заданы условия отсутствия вращательного трения, то спонтанная закрутка возможна и в однородной жидкости. Пример такого течения приведен в [3], где рассмотрена задача о течении между пористым вращающимся диском и плоскостью.

Можно показать, что это утверждение ошибочно. Спонтанная закрутка не возникает и в случае, если на части границы задано условие $\Gamma = 0$, а на участке границы, являющейся свободной поверхностью, заданы условия

$$\tau_\varphi = \sigma_{\varphi r} n_r + \sigma_{\varphi z} n_z = 0, \; v_r n_r + v_z n_z = 0, \tag{2}$$

где τ_φ — азимутальная составляющая вектора касательного напряжения на свободной поверхности; $\mathrm{n} = (n_r, 0, n_z)$ — внешняя нормаль к ней;

$$\sigma_{\varphi r} = \frac{\eta}{r} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial r} - \frac{2\Gamma}{r} \right), \; \sigma_{\varphi z} = \frac{\eta}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial z}$$

— компоненты тензора вязких напряжений; η — коэффициент динамической вязкости.

Действительно, умножая уравнение (1) на r и интегрируя его в меридиональной плоскости по области, ограниченной осью симметрии и границей l, получаем

$$\oint_l \left(r \frac{\partial \Gamma}{\partial n} - 2\Gamma n_r \right) dl = 0.$$

На участках границы, где $\tau_\varphi = 0$, и на оси симметрии подынтегральное выражение тождественно обращается в нуль, а на участках границы l' (длина участка l' отлична от нуля), где $\Gamma = 0$, имеем

$$\int_{l'} r \frac{\partial \Gamma}{\partial n} dl = 0.$$

Отсюда следует, что внутри области должна быть линия, на которой $\Gamma = 0$ и которая делит исходную область на две, каждая из них с точки зрения граничных условий эквивалентна исходной.

Повторение описанной процедуры для этих областей приводит к делению каждой из них линией $\Gamma = 0$ на две. Многократно проводя эту процедуру, получаем, что $\Gamma \equiv 0$ внутри области течения.

Отметим, что граничное условие (2) и условие $\Gamma = 0$ на l обеспечивают необходимый контроль осевой составляющей момента импульса жидкости, при котором имеет смысл говорить о спонтанной закрутке. Если в (2) отказаться от условия непротекания свободной поверхности ($v_r n_r + v_z n_z \neq 0$), то осевая компонента момента импульса может вноситься извне и в этом случае говорить о самовращении не имеет смысла. Как раз такой случай и рассматривается в [3].

Таким образом, возникновение спонтанной закрутки в случае ламинарного осесимметричного течения однородной вязкой жидкости невозможно.

В [1, 2] предполагается, что при развитии неустойчивости и возникновении стационарного турбулентного течения возможен механизм, в результате которого, по крайней мере, в приосевой области возникает закрученная струя, обладающая осевой составляющей момента импульса.

В обоснование этого предположения в [1, 2] проведено исследование устойчивости модельного течения в безграничной жидкости, соответствующего круглой струе, истекающей из трубы в покоящуюся на бесконечности жидкость. Найдено, что при определенных условиях возникает закрученная струя.

Рассмотрим этот пример для развившегося турбулентного течения. Естественно предполагать, что осредненное течение стационарно, обладает вращательной симметрией и в цилиндрической системе координат (r, φ, z) имеет вид $\mathrm{v} = [0, v_\varphi(r), v_z(r)]$. Параллельность осредненного течения обеспечивается наличием соответствующих массовых сил, которые поддерживают ламинарный профиль $v_z = U(r)$ исходного течения. Предполагая, что турбулентный характер течения можно учесть введением турбулентной вязкости $\nu_t = \nu_t(r) > 0$, и вводя обозначение $\nu_* = \nu_*(r) = \nu + \nu_t(r)$, для Γ получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r} r\nu_* \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial r} - \frac{2\Gamma}{r}\right) = 0$$

с граничными условиями $\Gamma(0) = \Gamma(\infty) = 0$. Нетрудно видеть, что единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям, есть $\Gamma = 0$, т.е. течение без закрутки, что не согласуется с результатами [2].

Рассмотрим осесимметричное течение внутри области, ограниченной пористой поверхностью вращения, на которой $\Gamma = 0$, но жидкость может протекать через нее (v_r и v_z задаются так, что выполняется условие, обеспечивающее сохранение массы). Тогда, используя для описания турбулентного течения уравнения Навье — Стокса с турбулентным коэффициентом вязкости, для Γ получим уравнение

$$\frac{\partial r v_r \Gamma}{\partial r} + \frac{\partial r v_z \Gamma}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} r\nu_* \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial r} - \frac{2\Gamma}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z} r\nu_* \frac{\partial \Gamma}{\partial z},$$

интегрируя которое в меридиональной плоскости по области, ограниченной осью симметрии и границей, имеем

$$\oint r\nu_* \frac{\partial \Gamma}{\partial n} dl = 0,$$

откуда следует существование линии $\Gamma = 0$ внутри области. Повторяя этот процесс, так же как в случае постоянной вязкости, приходим к выводу, что $\Gamma \equiv 0$ внутри рассматриваемой области течения, т.е. спонтанная закрутка отсутствует.

Этот результат противоречит обсуждаемой гипотезе и дает основания для сомнений в ее справедливости.

Отметим, что результаты [3, 4], полученные в случае автомодельных конических течений с турбулентной вязкостью, нельзя считать примерами существования явления спонтанной закрутки (или самовращения), так как в этих примерах Г остается конечной на бесконечности и происходит перераспределение закрутки, а не ее возникновение.

Рассмотрим в качестве близкого к коническим течениям аналога турбулентный вихрь Бюргерса, предполагая, что турбулентная вязкость и, следовательно, $\nu_* = \nu_*(r)$ зависят только от r. В этом случае имеется решение

$$v_r = -ar,\ v_z = 2az,\ \Gamma = \Gamma(r),$$

причем для Г получаем уравнение

$$-ar^2 \frac{\partial}{\partial r} r^2\omega = \frac{\partial}{\partial r} \nu_* r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r}, \tag{3}$$

где $\omega = \Gamma / r^2$.

Пусть на бесконечности $\Gamma(\infty) = 0$. Тогда $\omega r^2 \to 0$ при $r \to \infty$, а $\omega(0) = \omega_0$. Умножим уравнение (3) на ω. В результате имеем

$$-\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{2} ar^4\omega^2 = \frac{\partial}{\partial r} \nu_* r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r} - \nu_* r^3 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)^2. \tag{4}$$

Интегрируя уравнение (4) по r от 0 до ∞, с учетом граничных условий получим

$$\int_0^\infty \nu_* r^3 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)^2 dr = 0,$$

откуда следует $\omega \equiv 0$, т.е. и в этом случае спонтанная закрутка отсутствует.

Таким образом, хотя для более сложных моделей замыкания уравнений турбулентного течения вопрос остается открытым, явление спонтанной закрутки осесимметричного потока, по-видимому, не имеет места.

Экспериментальное подтверждение или опровержение выдвинутой гипотезы весьма проблематично. Основная трудность связана с тем обстоятельством, что закрутка может возникать в результате отклонения от точной симметрии в реальных установках, что достаточно трудно проконтролировать. Имеющиеся к настоящему времени эксперименты свидетельствуют не в пользу спонтанной закрутки. Известно, например, что вихрь в ванне при тщательном соблюдении необходимых условий симметрии не возникает.

Отметим, что если на границе области или при $r \to \infty$ для уравнения (3) Г имеет отличное от нуля значение, то, так как принцип максимума в случае переменной вязкости, вообще говоря, не имеет места, внутри области Г может принимать значения, бóльшие, чем на границе. Это можно было бы трактовать так же, как спонтанную закрутку.

В связи с этим в качестве альтернативы рассматриваемой гипотезе можно сформулировать предположение о том, что зависимость турбулентной вязкости от координат должна быть такой, чтобы принцип максимума имел место.

В заключение заметим, что в принципе возможна бифуркация исходного осесимметричного течения в неосесимметричное течение с вращением, где $\Gamma = \Gamma(r, \varphi, z) \neq 0$ с $\Gamma = 0$ на осесимметричной границе. В этом случае аналогом отсутствия спонтанной закрутки было бы выполнение условия

$$\int_0^{2\pi} \Gamma(r, \varphi, z) d\varphi = 0.$$

В случае турбулентного течения требование выполнения данного условия накладывало бы дополнительные условия на модели замыкания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштик М.А., Жданова Е.М., Штерн В.Н. Спонтанная закрутка затопленной струи // ДАН СССР. — 1984. — Т. 277, № 4. — С. 815—818.
2. Гольдштик М.А., Жданова Е.М., Штерн В.Н. Возникновение вращательного движения в результате гидродинамической неустойчивости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1985. — Т. 273, № 1. — С. 50—55.
3. Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами. — Новосибирск: Наука, 1989.
4. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Турбулентное вихревое динамо // ПММ. — 1989. — Т. 53, № 4. — С. 613.

г. Новосибирск *Поступила 26/VII 1993 г.*

УДК 532.62

Л.К. Антановский

ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНЫХ ВЕЩЕСТВ НА ПРОЦЕСС УТОНЬШЕНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ

1. Физическая постановка задачи. Настоящая работа имеет своей целью объяснить и смоделировать иногда наблюдаемый в экспериментах аномально медленный процесс утоньшения вертикальной пленки жидкости в поле силы тяжести. Рассматривается случай, когда заведомо известно, что равновесие гравитационных и капиллярных сил невозможно. Например, пленка обыкновенной воды со средней толщиной $H = 0{,}01$ см, образованная на квадратной рамке со стороной $L = 1$ см, иногда имеет «время жизни» порядка нескольких секунд. Однако простейшие расчеты показывают, что, стартуя с состояния покоя, вертикальный слой чистой воды в поле тяжести Земли ($g = 981$ см/с^2) достигает нулевой толщины за несколько сотых секунды. Это же подтверждается следующими простыми оценками. Принимая плотность, кинематический коэффициент вязкости и коэффициент поверхностного натяжения воды соответственно равными $\rho = 1$ г/см^3, $\nu = 0{,}01$ см^2/с, $\sigma = 72$ г/с^2, легко видеть, что отношения сил капиллярности и вязкости к силе тяжести являются крайне малыми:

$$\frac{\sigma H}{\rho g L^3} \sim 7 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{\nu}{g^{1/2} L^{3/2}} \sim 3 \cdot 10^{-4}.$$

Таким образом, характерное время утоньшения свободной пленки определяется в первую очередь силой тяжести, что дает $(L/g)^{1/2} \sim 0{,}03$ с.

Попытки учета короткодействующих сил взаимодействия межфазных поверхностей пленки не привели к существенному увеличению ее «времени жизни». Кроме того, наиболее сильные стерические взаимодействия [1], характерные для полимерных жидкостей с длинными молекулами, к воде имеют слабое отношение. Все это привело нас к исследованию эффекта поверхностно-активных веществ (ПАВ), которые всегда присутствуют в жидкости в виде каких-либо загрязнений. Избыточная концентрация ПАВ уменьшает поверхностное натяжение межфазной границы, поэтому, согласно принципу минимума свободной энергии, ПАВ способны легко адсорбироваться жидкостью даже из окружающего воздуха.

Предлагается вниманию следующий механизм типа Ле-Шателье—Брауна, который способен существенно увеличить «время жизни» пленки. В начальной стадии процесса утоньшения тяжесть увлекает жидкость с растворенными ПАВ на свободной границе вниз. В результате возникает градиент