УДК 539.376; 539.42

ПОЛЗУЧЕСТЬ ДЛИННОЙ УЗКОЙ МЕМБРАНЫ В СТЕСНЕННЫХ УСЛОВИЯХ ВПЛОТЬ ДО РАЗРУШЕНИЯ

А. М. Локощенко, В. В. Терауд

Институт механики Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова, 119192 Москва
E-mails: loko@imec.msu.ru, ldrnww@gmail.com

С использованием различных подходов и краевых условий проведено моделирование процесса деформирования длинной узкой прямоугольной мембраны, расположенной внутри жесткой клиновидной матрицы. Получены основные соотношения, характеризующие напряженно-деформированное состояние мембраны на различных стадиях деформирования. Приведены результаты численных экспериментов, в которых исследовались особенности деформирования мембран.

Ключевые слова: мембрана, ползучесть, стесненные условия, закон Кулона, разрушение.

Введение. Для описания деформирования мембраны используется дробно-степенная сингулярная модель установившейся ползучести материала [1]

$$\dot p_u = C\Big(\frac{\sigma_u}{\sigma_b - \sigma_u}\Big)^n, \tag{1}$$

где σ_u, $\dot p_u$ — интенсивности напряжений и скоростей деформаций ползучести; σ_b — предел кратковременной прочности материала при соответствующей температуре; C, n — постоянные.

Решение рассматриваемой задачи, основанное на степенной связи интенсивностей напряжений и скоростей деформаций ползучести при напряжениях, не превышающих предела текучести материала, представлено в работе [2]. Решения задачи о деформировании мембраны в стесненных условиях с учетом упрочнения материала приведены в [3, 4]. В отличие от работ [2–4], в которых допускается появление бесконечных напряжений ($\sigma_u \to \infty$) в начальный момент времени, в данной работе для их исключения дополнительно учитывается мгновенное деформирование. В [5] с использованием степенной модели ползучести материала описано стесненное деформирование мембраны внутри жесткой матрицы с учетом трения о стенки в отсутствие разрушения. В настоящей работе рассматривается возможность разрушения мембраны на любой стадии деформирования.

1. Постановка задачи. Рассмотрим деформирование длинной узкой прямоугольной мембраны шириной $2a$ с начальной толщиной H_0, закрепленной вдоль длинных сторон и нагруженной равномерным давлением q, которое может изменяться во времени t по произвольному закону.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 11-08-00007, 12-08-31166).

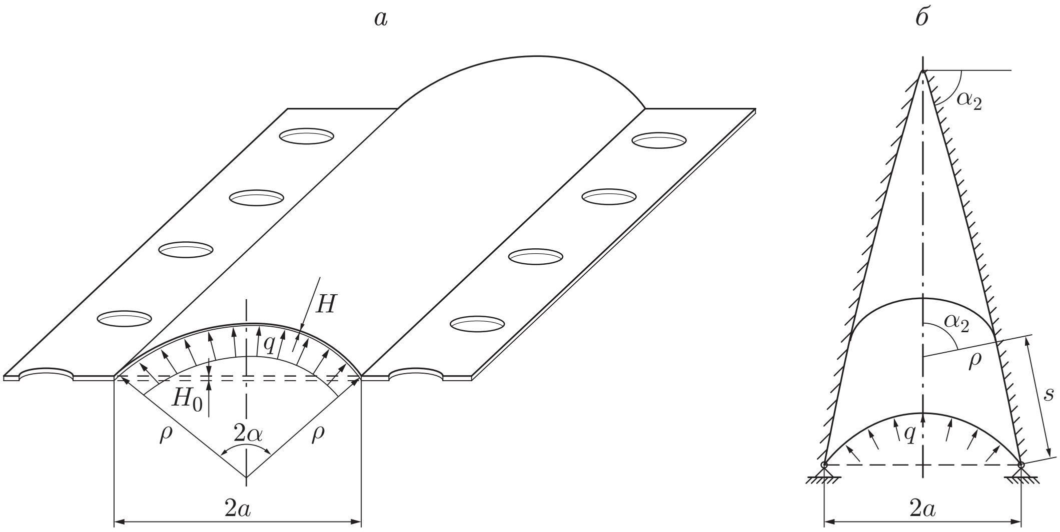

Рис. 1. Деформирование мембраны:
а — свободное деформирование мембраны под действием давления;
б — деформирование мембраны внутри матрицы

Решение данной задачи описывает три стадии деформирования. На первой стадии (стадии упругого деформирования) плоская в начальном состоянии мембрана под действием давления q мгновенно упруго деформируется, приобретая форму незамкнутой круговой цилиндрической оболочки с центральным углом $2\alpha = 2\alpha_1$ и радиусом кривизны ρ (рис. 1,*а*). На второй стадии (стадии свободного деформирования) мембрана деформируется в условиях установившейся ползучести вплоть до момента, в который она касается стенок матрицы, при этом угол раствора мембраны равен $2\alpha = 2\alpha_2$. На третьей стадии (стадии стесненного деформирования) в процессе ползучести мембрана деформируется внутри жесткой матрицы при наличии трения о ее стенки (рис. 1,*б*). При моделировании напряженно-деформированного состояния мембраны рассматриваются радиальное σ_r, окружное σ_θ, осевое σ_z главные напряжения и соответствующие компоненты тензора деформаций ε_r, ε_θ, ε_z (при $t > 0$ — компоненты тензора деформаций ползучести p_r, p_θ, p_z).

Для исключения бесконечных напряжений в начальный момент времени t предполагается, что в момент нагружения ($t = 0$) мембрана обладает упругими свойствами. При анализе дальнейшего изменения формы мембраны ($t > 0$) учитываются только деформации ползучести.

Напряженное состояние мембраны можно полагать безмоментным. Поскольку длина мембраны значительно превышает ее ширину, можно считать, что реализуется случай плоской деформации.

2. Стадия мгновенного упругого деформирования. Упругое деформирование мембраны описывается с помощью закона Гука с учетом несжимаемости материала мембраны.

Введем следующие безразмерные переменные:

$$\bar{q} = \frac{q}{\sigma_b}, \quad \bar{H} = \frac{H}{H_0}, \quad \bar{H}_0 = \frac{H_0}{a}, \quad k = \frac{E}{\sigma_b},$$
$$\bar{t} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,Ct, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{H_0}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_b} \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{2}$$

Здесь E — модуль Юнга; H, ρ — толщина и радиус кривизны мембраны. Ниже при анализе деформирования мембраны черта над безразмерными переменными опускается.

Рассматривая элемент мембраны и записывая уравнения его равновесия в проекциях на нормаль и касательную, получаем

$$\sigma_\theta = q\rho/H, \qquad \sigma_\theta H = \mathrm{const}\,. \tag{3}$$

Из уравнений равновесия свободной мембраны (3), закона Гука и геометрических соотношений находим связь давления q, угла α_1, появляющегося при упругом деформировании, а также значений толщины H_1, напряжения $\sigma_{\theta 1}$ и деформации $\varepsilon_{\theta 1}$ при $\alpha = \alpha_1$:

$$\begin{gathered} q = \frac{4}{3}\, H_0 k \sin\,\alpha_1 \Big(1 - \frac{\sin\,\alpha_1}{\alpha_1}\Big), \qquad H_1 = \frac{\sin\,\alpha_1}{\alpha_1}, \\ \sigma_{\theta 1} = \frac{q}{H_1 H_0 \sin\,\alpha_1}, \qquad \varepsilon_{\theta 1} = \frac{\alpha_1}{\sin\,\alpha_1} - 1. \end{gathered} \tag{4}$$

Следует отметить, что соотношения (4) позволяют исключить недопустимые в начальный момент времени бесконечные напряжения.

3. Стадия свободного деформирования. На стадии свободного деформирования возможно моделирование процесса ползучести мембраны до момента ее касания стенок матрицы, т. е. до момента, в который угол раствора мембраны станет равным $2\alpha_2$.

Из (3) следует, что $\rho = \rho(t)$, т. е. деформируемая срединная поверхность мембраны является частью поверхности кругового цилиндра с углом раствора 2α. Для тонкостенных цилиндрических оболочек обычно принимается $\sigma_r = 0$. В этом случае из гипотезы пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций ползучести следует

$$\sigma_z = \sigma_\theta/2. \tag{5}$$

Ниже под скоростями понимаются производные по безразмерному времени t. В рассматриваемом плоском деформированном состоянии скорость осевой деформации ползучести $\dot p_z$ принимается равной нулю: $\dot p_z = 0$.

В силу условия плоского деформирования из условия несжимаемости получаем

$$\dot p_r = -\dot p_\theta, \qquad \dot p_u = \sqrt{\frac{2}{3}}\,(\dot p_r^2 + \dot p_\theta^2 + \dot p_z^2)^{0,5} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\dot p_\theta. \tag{6}$$

Из рис. 1 следует

$$H = \frac{\sin\alpha}{\alpha}. \tag{7}$$

Из (6), (7) находим

$$\dot p_\theta = -\dot p_z = -\frac{\dot H}{H} = \Big(\frac{1}{\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha\Big)\dot\alpha. \tag{8}$$

Уравнения (3), (5), (8) позволяют записать выражение для окружного напряжения σ_θ и интенсивности напряжений σ_u в зависимости от угла раствора α:

$$\begin{gathered} \sigma_\theta = \frac{q\rho}{H} = \frac{q\alpha}{H_0 \sin^2\alpha}; \\ \sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}}\,((\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2)^{0,5} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sigma_\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{q\alpha}{H_0 \sin^2\alpha}. \end{gathered} \tag{9}$$

Подставляя (6), (8), (9) в (1), получаем зависимость угла раствора α от времени t при $q(t) = \mathrm{const}$:

$$t = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha} \Big(\frac{1}{\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha\Big)\Big(\frac{2H_0 \sin^2\alpha}{\sqrt{3}\,q\alpha} - 1\Big)^n\, d\alpha.$$

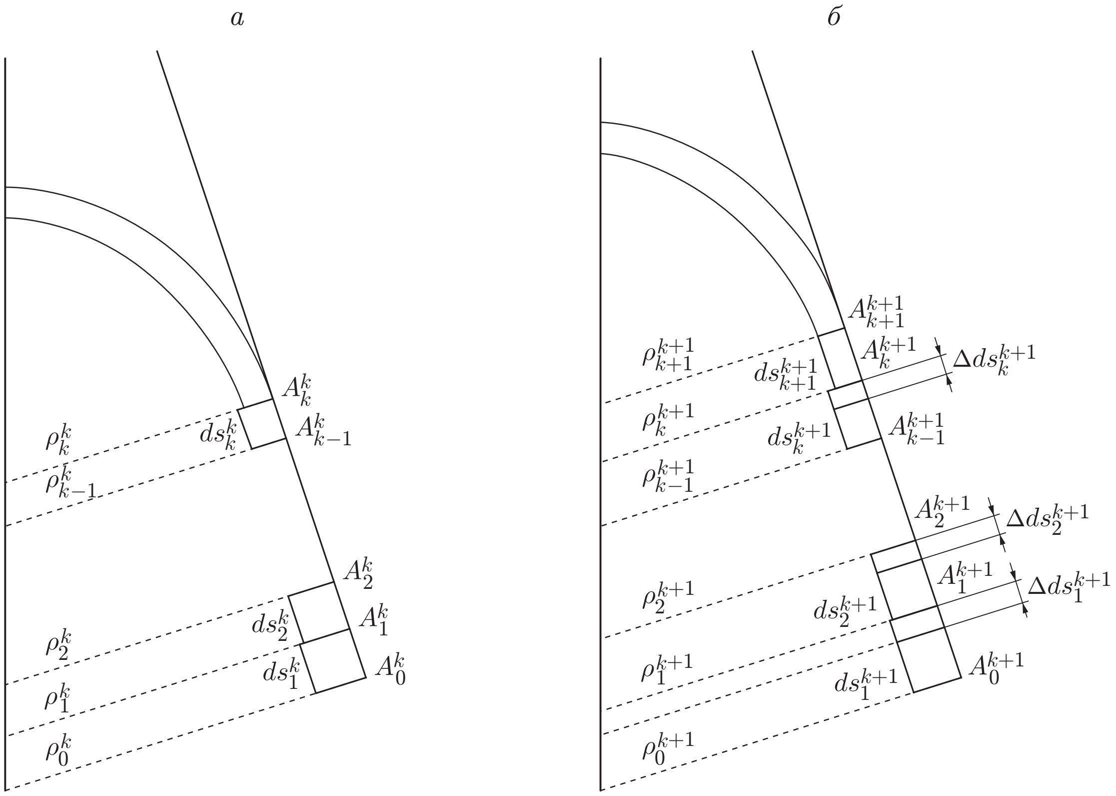

Рис. 2. Схема пошагового вычисления характеристик стесненного деформирования мембраны:
а — шаг k; *б* — шаг $k+1$

4. Стадия стесненного деформирования. Началом процесса стесненного деформирования считается момент времени $t = t_1$, в который угол α достигает величины α_2.

Задача решается итерационным методом. Применяется аппроксимация производных по первому порядку точности. Произвольная $(k+1)$-я итерация (шаг) характеризуется приращением времени dt^{k+1} и наличием соответствующего этому приращению дополнительного участка свободной части мембраны $d(s_{k+1}^{k+1})$, который начинает контактировать со стенками матрицы (рис. 2). Нижние числовые индексы при параметрах, характеризующих отдельный участок, обозначают шаг, на котором произошло прилегание этого участка к матрице, а верхние индексы — шаг по времени. На границе мембраны и матрицы принимается закон трения Кулона с коэффициентом трения μ. При этом известны значения параметров, полученные на предыдущих шагах: $q^1, \ldots, q^k$; $dt^1, \ldots, dt^k$; $\rho_0^k, \ldots, \rho_k^k$; $ds_1^k, \ldots, ds_k^k$; $H_0^k, \ldots, H_k^k$; $(\sigma_\theta)_0^k, \ldots, (\sigma_\theta)_k^k$; $(\dot{p}_\theta)_0^k, \ldots, (\dot{p}_\theta)_k^k$.

Зададим время dt^{k+1}. На $(k+1)$-м шаге необходимо вычислить ds_{k+1}^{k+1}, $(\sigma_\theta)_{k+1}^{k+1}$, H_{k+1}^{k+1} и найти новые значения рассматриваемых величин.

За время dt^{k+1} отрезок $A_i^k A_{i+1}^k$ удлиняется на величину $\Delta(ds_i^{k+1})$. За это же время свободная часть мембраны касается матрицы на участке длиной ds_{k+1}^{k+1}. Следовательно, за время dt^{k+1} контактирующая часть мембраны удлиняется на величину, равную $\sum\limits_{i=1}^{k} \Delta(ds_i^{k+1}) + ds_{k+1}^{k+1}$.

Вследствие ползучести участок $A_i^k A_{i+1}^k$ удлиняется под действием напряжения. Среднее напряжение на этом участке равно $0{,}5[(\sigma_\theta)_{i-1}^k + (\sigma_\theta)_i^k]$, соответственно удлинение этого участка составляет

$$\Delta(ds_i^{k+1}) = \Big(\frac{(\sigma_\theta)_{i-1}^k + (\sigma_\theta)_i^k}{4/\sqrt{3} - ((\sigma_\theta)_{i-1}^k + (\sigma_\theta)_i^k)}\Big)^n (ds_i^k)\, dt^{k+1}.$$

Следовательно, длина участка $A_i^k A_{i+1}^k$ равна

$$ds_i^{k+1} = ds_i^k + \Delta(ds_i^{k+1}).$$

За время dt^{k+1} дуга $\alpha_2\rho_k^k$ переходит в дугу $\alpha_2(\rho_k^k + d\rho_k^{k+1}) + ds_{k+1}^{k+1}$, поэтому приращение окружной деформации равно

$$d(p_\theta)_{k+1}^{k+1} = \frac{\alpha_2(\rho_k^k + d\rho_k^{k+1}) + ds_{k+1}^{k+1} - \alpha_2\rho_k^k}{\alpha_2\rho_k^k}. \qquad (10)$$

Из геометрических соотношений следует

$$d\rho_k^{k+1} = -\Big(\sum_{i=1}^{k} \Delta(ds_i^{k+1}) + ds_{k+1}^{k+1}\Big) \operatorname{ctg}\alpha. \qquad (11)$$

Подставляя уравнение равновесия (3) в соотношение (1), получаем

$$(\dot p_\theta)_{k+1}^{k+1} = \Big(\frac{1}{1 - \sqrt{3}\,\rho_k^k q^{k+1}/(2H_0 H_k^k)} - 1\Big)^n. \qquad (12)$$

Исключая $(\dot p_\theta)_{k+1}^{k+1}$ из уравнения (12), с помощью (10), (11) находим

$$ds_{k+1}^{k+1} = \Big(\frac{1}{1 - \sqrt{3}\,\rho_k^k q^{k+1}/(2H_0 H_k^k)} - 1\Big)^n \frac{\alpha_2\rho_k^k}{1 - \alpha_2 \operatorname{ctg}\alpha_2}\, dt^{k+1} + \frac{\alpha_2 \operatorname{ctg}\alpha_2}{1 - \alpha_2 \operatorname{ctg}\alpha_2} \sum_{i=1}^{k} \Delta(ds_i^{k+1}).$$

Положения точек и соответственно значения радиусов на следующем шаге нетрудно найти из геометрических соотношений:

$$\rho_i^{k+1} = \frac{1}{\sin\alpha_2} - \operatorname{ctg}\alpha_2 \sum_{j=1}^{i} ds_j^{k+1}.$$

Так как радиальная скорость деформации равна $\dot p_r = -\dot p_\theta = \dot H/H$, то, записывая производную $\dot H$ в виде конечных разностей, получаем соотношение, из которого определяются значения толщины участков мембраны:

$$H_i^{k+1} = H_i^k + dH_i^{k+1} = H_i^k \Big[1 - \Big(\frac{1}{1 - \sqrt{3}\,\rho_k^k q^{k+1}/(2H_0 H_k^k)} - 1\Big)^n\Big].$$

Значения напряжения σ_θ вычисляются из уравнения равновесия элемента $A_i^k A_{i+1}^k$, которое с использованием закона трения Кулона записывается следующим образом:

$$(\sigma_\theta)_{k+1}^{k+1} H_{k+1}^{k+1} H_0 = (\sigma_\theta)_k^{k+1} H_k^{k+1} H_0 + \mu q^{k+1} ds_{k+1}^{k+1} =$$
$$= (\sigma_\theta)_{k-1}^{k+1} H_{k-1}^{k+1} H_0 + \mu q^{k+1} ds_{k+1}^{k+1} + \mu q^{k+1} ds_k^{k+1} = \ldots$$
$$\ldots = (\sigma_\theta)_0^{k+1} H_0^{k+1} H_0 + \mu q^{k+1} \sum_{i=k+1}^{1} ds_i^{k+1} = q^{k+1} \rho_{k+1}^{k+1}.$$

Следовательно, значения напряжения σ_θ равны

$$(\sigma_\theta)_{k+1}^{k+1} = \frac{\rho_{k+1}^{k+1} q^{k+1}}{H_0 H_{k+1}^{k+1}}, \qquad (\sigma_\theta)_i^{k+1} = \frac{(\sigma_\theta)_{i+1}^{k+1} H_{i+1}^{k+1}}{H_i^{k+1}} - \mu \frac{ds_{i+1}^{k+1} q^{k+1}}{H_0 H_i^{k+1}}.$$

5. Разрушение мембраны. Будем считать, что разрушение происходит в момент времени t^* при $\sigma_u(t^*) = \sigma_b$. Для описания разрушения на стадии стесненного деформирования введем параметр $\bar{s} = s/a$ (далее черта над s опускается), характеризующий безразмерную длину участка контакта мембраны и матрицы.

Возможны два варианта завершения процесса деформирования: заполнение пространства внутри матрицы: $s = s^0$ $(s^0 = 1/\cos\alpha_2)$ за конечное или бесконечное время или разрушение мембраны внутри незаполненной матрицы.

6. Результаты расчетов. В качестве примера рассмотрим деформирование мембраны из алюминиевого сплава Д16Т при температуре 400 °C. Ранее были получены следующие константы этого материала для модели (1): $C = 9{,}37 \cdot 10^5$ МПа$^{-n}\cdot$ с$^{-1}$, $n = 3{,}4$, $\sigma_b = 88{,}3$ МПа [6].

Выбраны следующие безразмерные параметры мембраны: толщина мембраны $H_0 = 0{,}01$, давление $q = 2{,}8 \cdot 10^{-4}$, угол раствора матрицы $\alpha_2 = 80°$, коэффициент трения о стенки матрицы $\mu = 0$; 0,1; 0,3. Расчеты показывают, что $H_1 = 0{,}97$, окончанию второй стадии соответствуют значения параметров $H_2 = 0{,}71$, $t_2 = 0{,}38 \cdot 10^8$.

На рис. 3 приведены зависимости толщины мембраны H (кривые *1–3*) и напряжения σ_θ (кривые *4–6*) от времени деформирования t. На стадии стесненного деформирования величины H и σ_θ зависят от коэффициента трения μ. При $\mu = 0$; 0,1; 0,3 процесс стесненного деформирования заканчивается по-разному: при отсутствии трения происходит заполнение мембраны за бесконечное время $t^* \to +\infty$, при $\mu = 0{,}1$ — заполнение матрицы за время $t = 1{,}67 \cdot 10^8$, при $\mu = 0{,}3$ — разрушение мембраны при $t = 1{,}26 \cdot 10^8$. В момент окончания процесса деформирования толщины в центре мембраны равны $H = 0{,}22$; 0,09; 0,07 при $\mu = 0$; 0,1; 0,3 соответственно.

На рис. 4 приведены распределение толщины мембраны H (кривые *1–5*) и конечное распределение напряжения σ_θ^* (кривые *6, 7*) в поперечном сечении мембраны для трех стадий деформирования. В конце первой и второй стадий $H(x) = \text{const}$. В случае $\mu = 0$ толщина мембраны в конце стадии стесненного деформирования по всей ширине постоянна (кривая *3*). Кривые *4, 6* и *5, 7* соответствуют окончанию стадии стесненного деформирования при $\mu = 0{,}1$; 0,3 соответственно. В конце стадии стесненного деформирования при

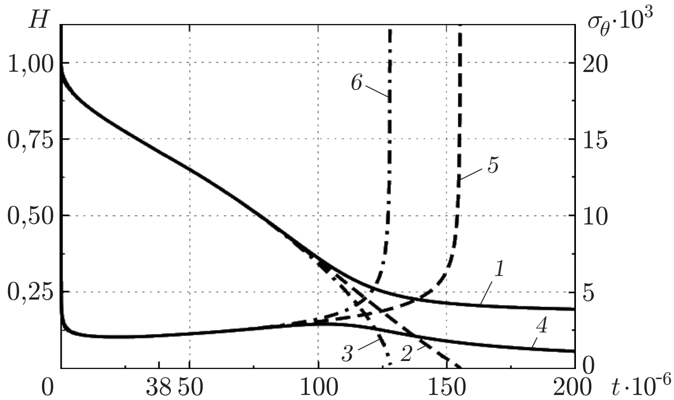

Рис. 3. Зависимости толщины мембраны (*1–3*) и напряжений (*4–6*) от времени: *1, 4* — $\mu = 0$; *2, 5* — $\mu = 0{,}1$; *3, 6* — $\mu = 0{,}3$

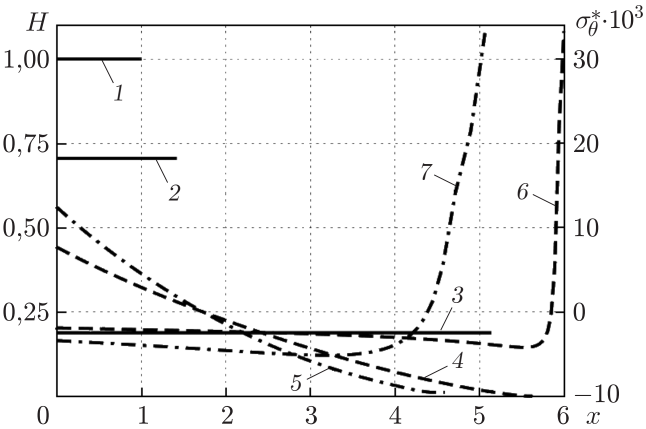

Рис. 4. Распределения толщины мембраны H (*1–5*) и напряжения σ_θ^* (*6, 7*) по ширине мембраны для трех стадий деформирования:
1 — в конце стадии упругого деформирования, *2* — в конце стадии свободного деформирования ($t = 0{,}38 \cdot 10^8$), *3–7* — в конце стадии стесненного деформирования (*3* — $\mu = 0$; *4, 6* — $\mu = 0{,}1$; *5, 7* — $\mu = 0{,}3$)

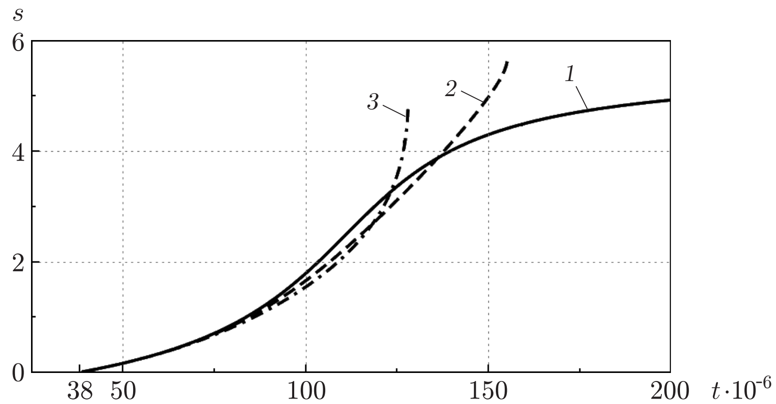

Рис. 5. Зависимость длины контактирующего участка мембраны от времени:
1 — $\mu = 0$; *2* — $\mu = 0{,}1$; *3* — $\mu = 0{,}3$

$\mu > 0$ толщина мембраны H не является величиной, постоянной вдоль координаты x (кривые *4, 5*), что обусловлено наличием трения о стенки матрицы. Заметим, что при большем трении различие максимальной и минимальной толщин становится более существенным. В случае заполнения матрицы толщина мембраны в центре минимальная ($H = 0{,}07$), а вблизи края максимальная ($H = 0{,}61$). Результаты анализа кривой *2* показывают, что при $t = 38 \cdot 10^6$ ширина мембраны равна 1,45. Ширина мембраны, соответствующая полному заполнению матрицы, равна $s^0 = 5{,}57$.

На рис. 5 представлена зависимость безразмерной длины контактирующего со стенкой матрицы участка мембраны от безразмерного времени t при различных значениях коэффициента трения. Из рис. 5 следует, что при малых временах ($t < 10^8$) наибольшая длина контактирующего участка матрицы имеет место при отсутствии трения и с увеличением коэффициента μ уменьшается. Такой характер зависимости $s(t)$ объясняется тем, что трение препятствует увеличению длины контактирующего участка мембраны. При $t > 10^8$ характер зависимости $s(t)$ меняется: наибольшая длина контактирующего участка наблюдается при $\mu = 0{,}3$ и с уменьшением коэффициента μ уменьшается. При $t > 10^8$ в случае ненулевого трения происходит интенсивное уменьшение толщины мембраны, вследствие чего возрастают напряжения в свободной части мембраны и повышается скорость деформирования мембраны.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шестериков С. А., Юмашева М. А.** Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести // Механика твердого тела. 1984. № 1. С. 86–91.
2. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974.
3. **Малинин Н. Н.** Ползучесть в обработке металлов. М.: Машиностроение, 1986.
4. **Романов К. И.** Механика горячего формоизменения металлов. М.: Машиностроение, 1993.
5. **Локощенко А. М.** Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. М.: Моск. гос. индустр. ун-т, 2007.
6. **Локощенко А. М., Терауд В. В.** Экспериментальное подтверждение моделирования осадки цилиндров при ползучести // Машиностроение и инж. образование. 2011. № 1. С. 49–53.

Поступила в редакцию 16/XI 2012 г.