РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
2008, том 44, № 4

УДК 519.234

УТОЧНЕННЫЙ МЕТОД ОЦЕНИВАНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ТИПА УЭЛЧА

В. Г. Алексеев, В. А. Суходоев

Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН, г. Звенигород Московской обл.
E-mail: aleks.v.g@mail.ru

Повторно рассмотрена оценка спектральной плотности типа Уэлча. Сформулированы практические рекомендации, позволяющие существенно ускорить вычисление рассматриваемой статистической оценки.

Введение. Данную работу следует рассматривать как продолжение [1], где была предложена новая модификация оценки спектральной плотности типа Уэлча.

Будем предполагать, что исследуемый случайный процесс $\{X(k),\ k = 0, \pm 1, \ldots\}$ стационарен в широком смысле, центрирован (т. е. удовлетворяет условию $\langle X(k)\rangle \equiv 0$), гауссов, а его спектральная плотность $f(\omega)$, $\omega \in \Pi = [-\pi, \pi]$, продолженная периодическим образом за пределы отрезка Π, по крайней мере дважды дифференцируема, причем

$$\sup_{\omega} \left| f''(\omega) \right| < K < \infty.$$

Пусть N – объем выборки, по которой строится оценка спектральной плотности $f(\omega)$. Предложенная в работе [1] модификация оценки типа Уэлча опирается на разложения в ряд Фурье полиномиальных тригонометрических ядер типа Джексона $J_{l,n}(\mu)$ и определяется формулой

$$f_N(\omega) = (QT)^{-1} \sum_{t=-(T-1)}^{T-1} a(t) \left| \sum_{k=-(m-1)}^{m-1} b(k) X(tL+k) e^{ik\omega} \right|^2. \tag{1}$$

Здесь

$$a(t) = (2\pi)^{-1} \int_{\Pi} e^{it\mu} J_{1,T}(\mu)\, d\mu = \begin{cases} 1 - |t|/T, & |t| \le T, \\ 0, & |t| > T; \end{cases}$$

$$Q = Q(l,n) = 2\pi \sum_{k=-(m-1)}^{m-1} b^2(k); \tag{2}$$

$$b(k)=b_{l,\,n}(k)=(2\pi)^{-1}\int\limits_{\Pi} \mathrm{e}^{ik\mu} J_{l,\,n}(\mu)\,d\mu;$$

m, T, L, l и n – целочисленные параметры оценки (1). При этом из анализа формулы (1) легко следует, что объем выборки $N=2m+2(T-1)L-1$.

Предлагаемые в данной работе уточнения к [1] ни в коей мере не касаются ни исходных предположений относительно исследуемого случайного процесса $X(k)$, ни построения оценки $f_N(\omega)$ спектральной плотности, ни ее важнейших статистических характеристик. Уточнения, формулируемые в виде двух последующих рекомендаций, направлены исключительно на упрощение и ускорение вычислений при построении оценки $f_N(\omega)$. В результате рекомендуемая нами статистическая оценка $f_N(\omega)$ может быть получена ценой совсем небольших усилий.

Рекомендация 1. Вычисление величины $Q=Q(l,n)$ по формуле (2) больших трудностей не представляет, так как число слагаемых в правой ее части всегда конечно. Есть, однако, и другой путь для вычисления величины $Q=Q(l,n)$. Как было установлено в [1],

$$2\pi\sum_{k=-(m-1)}^{m-1} b^2(k)=\int\limits_{\Pi} J_{l,\,n}^2(\mu)\,d\mu=\frac{2\pi C_{l,\,n}^2}{C_{2l,\,n}}, \tag{3}$$

где $C_{l,\,n}$ – нормирующий множитель при ядре $J_{l,\,n}(\mu)$, обеспечивающий выполнение равенства

$$\int\limits_{\Pi} J_{l,\,n}(\mu)\,d\mu=2\pi.$$

Для $l=1,2,3,4,5$ нормирующие множители $C_{l,\,n}$ равны

$$\frac{1}{n},\ \frac{3}{2n^3+n},\ \frac{20}{11n^5+5n^3+4n},\ \frac{315}{151n^7+70n^5+49n^3+45n}$$

и соответственно

$$\frac{36288}{15619n^9+7350n^7+5187n^5+4100n^3+4032n}.$$

Для следующих пяти значений l нормирующие множители $C_{l,\,n}$ описываются соотношениями:

$$C_{6,\,n}=1663200(655177n^{11}+311465n^9+221991n^7+175835n^5+$$
$$+147532n^3+151200n)^{-1},$$
$$C_{7,\,n}=74131200(27085381n^{13}+12969957n^{11}+9312303n^9+$$
$$+7426991n^7+6222216n^5+5411952n^3+5702400n)^{-1},$$
$$C_{8,\,n}=6810804000(2330931341n^{15}+1122261140n^{13}+$$

$$+810231422n^{11}+649783420n^{9}+547079533n^{7}+$$

$$+474040840n^{5}+422422704n^{3}+454053600n)^{-1},$$

$$C_{9,n}=6586804224000(2127599641825n^{17}+$$

$$+1028698099572n^{15}+745869914790n^{13}+$$

$$+600758842684n^{11}+507984908145n^{9}+441774822216n^{7}+$$

$$+391570804240n^{5}+355088118528n^{3}+387459072000n)^{-1}$$

и соответственно

$$C_{10,n}=608225502044160(186538565778065n^{19}+$$

$$+90496498798563n^{17}+65840293789842n^{15}+53214295814966n^{13}+$$

$$+45153019574949n^{11}+39402824784999n^{9}+35020505740616n^{7}+$$

$$+31553016189552n^{5}+28994613043968n^{3}+32011868528640n)^{-1}.$$

Если $l \le 5$, то, подставляя в правую часть формулы (3) готовые значения величин $C_{l,n}$ и $C_{2l,n}$, находим нужную величину $Q = Q(l,n)$, не прибегая к суммированию по формуле (2).

Для $l = 8, 9, 10$ величины $C_{l,n}$ не были известны в тот период, когда готовилась к печати работа [1]. Они были вычислены значительно позже. При их вычислении вновь использовался прием, с помощью которого в [2] были найдены величины $C_{l,n}$, $l = 5, 6, 7$. Для $l > 10$ нормирующие множители $C_{l,n}$ пока еще не известны.

Рекомендация 2. Обратимся к формуле (1), определяющей оценку $f_N(\omega)$. Величины $b(k) = b_{l,n}(k)$, входящие в правую ее часть, являются коэффициентами Фурье ядра $J_{l,n}(\mu)$. В нашем распоряжении имеются точные формулы для вычисления коэффициентов Фурье $b(k)$ для всех $l = 1, 2, 3, 4, 5$. Однако исследователя, приступающего к статистическому анализу того или иного случайного процесса, будут интересовать не столько формулы, сколько точные числовые значения коэффициентов Фурье $b(k)$. Сегодня мы имеем возможность указать на то обстоятельство, что для всех $l = 2, 3, 4, 5$ и $n = 2, 4, 8, 16, 32$, а также для $l = 6$ и $n = 2, 4, 8, 16$ (т. е. в общей сложности для 24 значений двумерного параметра (l, n)) имеются таблицы с точными числовыми значениями коэффициентов Фурье $b(k)$ [3–10].

В помощь читателю приводим таблицу, в которой для каждого из 24 перечисленных выше значений двумерного параметра (l, n) даны следующие сведения:

а) общее число отличных от нуля коэффициентов Фурье $b(k)$ (величина $2m-1$),

б) приближенное значение величины $Q = Q(l, n)$,

l	Сведения	$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$
2	$2m-1$ $Q(l, n)$ Ссылка	5 1,72 [3]	13 0,77 [3]	29 0,381 [3]	61 0,188 [3]	125 0,094 [3]
3	$2m-1$ $Q(l, n)$ Ссылка	7 1,42 [4]	19 0,64 [4]	43 0,312 [4]	91 0,155 [4]	187 0,077 [8]
4	$2m-1$ $Q(l, n)$ Ссылка	9 1,23 [5]	25 0,55 [5]	57 0,271 [5]	121 0,134 [5]	249 0,067 [8]
5	$2m-1$ $Q(l, n)$ Ссылка	11 1,11 [6]	31 0,496 [6]	71 0,243 [6]	151 0,121 [7]	311 0,060 [9]
6	$2m-1$ $Q(l, n)$ Ссылка	13 1,01 [10]	37 0,454 [10]	85 0,222 [10]	181 0,110 [10]	–

в) ссылка на литературу, в которой может быть найдена таблица с коэффициентами Фурье $b(k)$.

Заключение. Укажем на то обстоятельство, что оценка спектральной плотности типа Уэлча (именуемая в литературе также периодограммой Уэлча или же (в работах И. Г. Журбенко) оценкой, получаемой осреднением по сдвигу во времени) широко используется во всем мире. В частности, С. Л. Марпл [11, § 5.7.3] считает оценку типа Уэлча самым популярным периодограммным методом спектрального оценивания. Сходное утверждение (со ссылкой на ряд работ зарубежных авторов) может быть найдено и в [12, Sect. 19]. Наконец, в работах [13, 14] указывается на ряд важных достоинств оценки типа Уэлча. Это именно та оценка, которая рекомендуется читателю для приоритетного использования в практике прикладного спектрального оценивания. Предлагаемые в данной работе рекомендации существенно ускоряют вычисление оценки типа Уэлча в большинстве случаев, которые могут встретиться на практике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеев В. Г.** Оценка спектральной плотности типа Уэлча. Случай дискретного аргумента // Автометрия. 2001. № 6. С. 91.
2. **Алексеев В. Г.** Ядра типа Джексона и Джексона – Валле-Пуссена и их вероятностные применения // Теория вероятностей и ее применения. 1996. **41**, № 1. С. 170.
3. **Алексеев В. Г.** О некоторых новых линейных цифровых фильтрах // Радиотехника и электроника. 1996. **41**, № 2. С. 206.
4. **Алексеев В. Г.** Ядра типа Джексона и их применение к построению фильтров низких частот // Проблемы передачи информации. 1994. **30**, № 1. С. 97.
5. **Алексеев В. Г.** Полиномиальные тригонометрические ядра и их применение к построению фильтров низких частот // Проблемы передачи информации. 1996. **32**, № 4. С. 16.

6. **Алексеев В. Г.** Новые дискретные фильтры нижних частот // Радиотехника. 2002. № 6. С. 44.
7. **Алексеев В. Г.** Новый дискретный фильтр нижних частот // Радиотехника. 2004. № 8. С. 40.
8. **Алексеев В. Г.** Новые цифровые фильтры нижних частот // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. 2005. **48**, № 1. С. 39.
9. **Алексеев В. Г.**, **Суходоев В. А.** Ядра типа Джексона и их применение к построению фильтров нижних частот // Электромагнитные волны и электронные системы. 2006. **11**, № 2–3. С. 30.
10. **Алексеев В. Г.**, **Суходоев В. А.** Новые улучшенные цифровые фильтры нижних частот // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. **12**, № 4. С. 12.
11. **Марпл-мл. С. Л.** Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
12. **Yaglom A. M**. Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions. N. Y.: Springer-Verlag, 1987. Vols. I, II.
13. **Журбенко И. Г.** О работах по анализу временны́х рядов на кафедрах теории вероятностей и математической статистики МГУ // Теория вероятностей и ее применения. 1989. **34**, № 1. С. 202.
14. **Журбенко И. Г** Спектральная плотность, непараметрическая оценка // Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия /Под ред. Ю. В. Прохорова. М.: Большая Российская Энциклопедия, 1999. С. 631.

Поступила в редакцию 18 июня 2007 г.