

УДК 622.271.3

**ОПТИМИЗАЦИЯ МЕТОДА ПРОЕКТИРОВАНИЯ КАРЬЕРА,
РАЗМЕРА ВЫЕМОЧНЫХ БЛОКОВ
И ПРОБЛЕМА МЕЖБЛОЧНОГО ИНТЕРВАЛА**

К. Мигер¹, Р. Димитракопулос¹, Д. Эйвис²

¹*COSMO — Лаборатория стохастического планирования ведения горных работ,
Кафедра горного дела, металлов и материаловедения,
Университет Макгилла, Квебек, Канада, E-mail: cmeagh1@cs.mcgill.ca,
E-mail: roussos.dimitrakopoulos@mcgill.ca*

²*Факультет вычислительной науки и техники,
Университет Макгилла, Квебек, Канада, E-mail: avis@cs.mcgill.ca*

Приведен обзор методов проектирования выемки породных блоков в контексте проблемы “межблочного интервала” — термин, характеризующий непостоянство интервала между последовательно вынимаемыми блоками. В результате ухудшается эффективность планирования отработки породного массива открытым способом в смысле максимизации NPV. Рассмотрены алгоритм Лерча–Гроссмана, методы потокораспределения в сетях, базовый алгоритм дерева графа и алгоритм параметризованного карьера Сеймура с точки зрения их использования при проектировании выемки блоками с учетом проблемы межблочного интервала.

Представлены области текущих и будущих исследований по определению размера вынимаемых блоков, что позволит исключить проблему межблочного интервала. Предложена концепция учета дисконтирования при проектировании открытой выемки блоками с увеличением NPV.

Проектирование блочной выемки, оптимизация добычи открытым способом, замыкание кардинально ограниченного графа

ВВЕДЕНИЕ

Важной частью горнорудных проектов является проектирование карьера и производственное планирование на срок его существования. Оптимизация долгосрочного планирования связана с максимизацией денежных потоков, как правило, исчисляющихся сотнями миллионов долларов. Планирование срока существования рудника определяет технический план, которого следует придерживаться с момента разработки карьера и до его закрытия и последующей рекультивации земельного отвода, что является сложной задачей для выполнения вследствие крупномасштабности и неопределенности вовлеченных параметров — геологических, горно-технических, финансовых и экологических.

Работа осуществлена при финансовой поддержке NSERC CDR, грант № 335696, и BHP Billiton, NSERC, исследовательский грант № 239019, предоставленный членам COSMO Лаборатории стохастического планирования ведения горных работ: AngloGold Ashanti, Barrick Gold, BHP Billiton, De Beers, Newmont и Vale.

Традиционно оптимизация процесса проектирования карьера заключается в определении конечных границ его бортов, которые, в свою очередь, определяют, что в конечном счете будет извлечено, а также в разделении карьера на выемочные блоки, т. е. легкоуправляемые объемы материалов. Выемочные блоки могут рассматриваться как отдельные структурные единицы, имеющие собственный рабочий фронт и динамику ведения горных работ, позволяющие проектировщику разрабатывать краткосрочный план. Они также учитываются при составлении ежегодного графика добычи, таким образом можно использовать учетную ставку при расчете чистого дисконтированного дохода (NPV — Net Present Value) карьера. Модель рудного тела создается при помощи разнообразных методов [1–4]. Опираясь на эту модель и методы оптимизации, устанавливаются конечные границы бортов карьера, удовлетворяющие физическим ограничениям и ограничениям на угол откоса борта. Выемочные блоки генерируются из модели рудного тела, построенной в пределах конечных границ бортов карьера.

Традиционные методы планирования производства осуществляются с помощью выемочных блоков, спроектированных таким образом, чтобы максимизировать экономическую ценность или содержание металла в каждом блоке. Существует несколько основных проблем, касающихся методов проектирования выемочных блоков, которые ведут к созданию неоптимальных производственных планов, например: (а) несоблюдение требований относительно сорта и качества руды; (б) игнорирование неопределенности при определении содержания металла; (в) значительные вариации размеров выемочных блоков и межблочных интервалов; (г) непринятие во внимание дисконтирование в процессе оптимизации в расчете на то, что экономичный подход позволит максимизировать NPV. Следует особо подчеркнуть, что конечный NPV, который можно получить в процессе добычи, сильно зависит от конфигурации выемочного блока, которая определяет последовательность выемки руды. Невозможно создать оптимальный производственный план, используя неоптимальную конфигурацию выемочного блока. Производственные планы, основанные на неоптимальной конфигурации выемочного блока, не способны произвести максимальный NPV проекта карьера [3–8].

Распространенным методом формирования выемочных блоков является использование алгоритма, который позволяет определить конечный контур карьера, повторив это многократно, рассчитывая модель рудного тела, в которой экономические показатели блока уменьшаются рядом убывающих множителей. Пространство рудного тела разделяется на вложенные контуры; это делается путем масштабирования экономической стоимости блоков каждый раз, когда мы используем алгоритм оптимизации для определения оптимальных границ бортов карьера. Затем рассчитывается NPV, считая, что каждый вложенный контур разрабатывается сверху вниз. Вложенный контур с максимальным NPV принимается в качестве оптимального.

Ряд полученных вложенных контуров позволит проектировщику получить возможные варианты конфигурации выемочного блока. Такой подход реализуется с помощью алгоритма Лерча–Гроссмана в программном комплексе Whittle, предназначенном для решения задач планирования горных работ [8]. Строится эвристический ряд дисконтированных контуров карьера до тех пор, пока дальнейшее построение становится нерентабельным. Конечный контур используется в качестве максимальных границ карьера. Недостатком такого подхода является то, что размеры контура могут значительно варьировать. Простым примером этого может служить ситуация, когда участок с большими запасами руды располагается под крупным породным массивом. Начинать разработку горного объекта будет нецелесообразно до тех пор, пока масштабный коэффициент не достигнет определенного порогового значения (рис. 1). Зна-

чительная разница расстояний между последовательными блоками составляет то, что часто называется проблемой межблочных интервалов, и она весьма распространена при разработке конструкций, которые целесообразны с технической точки зрения и не требуют ручного перепроектирования, влияние которого на процесс оптимизации может оказаться непредсказуемым.

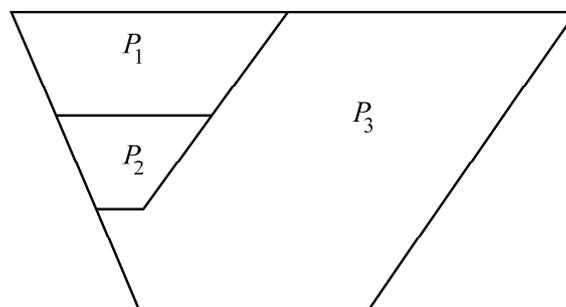


Рис. 1. Схема проекта открытого рудника с изображением трех выемочных блоков и проблемы межблочных интервалов

Формирование ряда контуров описанным способом также имеет тот недостаток, что контур, сформированный для заданного множителя, может быть не целостным. Единичные выемочные блоки могут иметь множество участков, расположенных далеко друг от друга, что делает процесс извлечения нерациональным и непрактичным. В идеале выемочный блок должен быть целостным. Еще одна сложность с описанной техникой состоит в том, что прочие геометрические ограничения, связанные с выемочными блоками, не учитываются. К таким ограничениям может относиться требование, чтобы основание карьера имело выпуклую форму минимальной возможной ширины. Проектировщику, как правило, приходится решать подобные задачи вручную.

Существующие алгоритмы оптимизации проектирования выемочных блоков и самого рудника обычно предназначены для рассмотрения только одной определенной модели рудного тела. Как правило, оптимизация планирования и проектирования карьера имеет два основных недостатка:

— входные данные считаются полностью определенными, хотя таковыми и не являются; таким образом, неопределенность горно-геологических и рыночных условий не учитывается;

— традиционные математические модели не могут обрабатывать неопределенные входные данные в отличие от стохастически описанных входных данных. Последствия этих недостатков продемонстрированы в примере [3], в котором при оптимизации проектирования открытого золотого рудника было выявлено, что NPV, рассчитанный с учетом неопределенности геологических условий, оказался на 50 % меньше того, что спрогнозировано при помощи традиционного моделирования. Такая разница обусловлена значительными расхождениями в оценке предполагаемых денежных потоков и демонстрирует, что результаты, полученные от совмещения традиционных моделей рудного тела и сложных нелинейных алгоритмов оптимизации, могут оказаться неадекватными. Более того, этот и другие примеры [4, 9] показывают концептуальную и вычислительную несостоятельность, а также технологические ограничения методов проектирования и производственного планирования рудника, используемых в настоящее время при оптимизации в условиях неопределенности. С усовершенствованием методов стохастического моделирования необходимы новые алгоритмы для обработки множества равно-возможных моделей рудного тела. Методы должны обеспечивать робастную оптимизацию на всех моделях рудного тела.

ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДОВ

АЛГОРИТМ ЛЕРЧА–ГРОССМАНА

Наиболее общепринятым методом для определения конечных границ бортов карьера и конфигурации выемочных блоков является алгоритм Лерча–Гроссмана (Л–Г) [10] в программном комплексе Whittle [8], в котором используются эвристические методы учета дисконтирования. Жао и Ким [11] разработали 3D алгоритм, основанный на подходе Л–Г. Это был первый алгоритм, позволяющий определить максимальные границы крупных карьеров за разумное время. Алгоритм рассматривает задачу проектирования конечных границ бортов карьера в контексте теории графов и строит ориентированный граф $G = (V, A)$, узлами которого являются выемочные блоки модели рудного тела. Введение в терминологию и систему обозначений теории графов имеется в [12].

Если блок, представленный узлом x_i , необходимо извлечь ранее блока, представленного узлом x_j , то ребро графа направлено от узла $x_i \in V$ к узлу $x_j \in V$. Узел x_i может иметь вес c_i , который обозначает экономическую стоимость блока, представленного узлом x_i . В настоящее время проблема определения конечного контура карьера заключается в определении так называемого максимального замыкания графа в G . “Замыкание графа” представляет собой такое подмножество $V' \subset V$ множества узлов, при котором от узла в V' к узлу в $V - V'$ не отходит ни одно ребро (рис. 2).

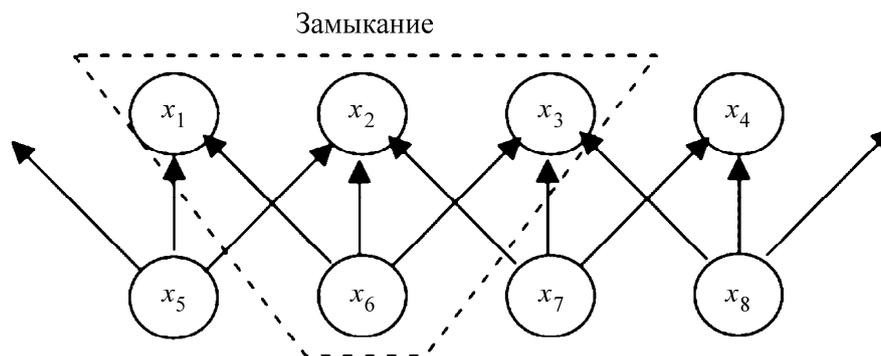


Рис. 2. Схема замыкания графа, узлы графа, обозначенные x_i , представляют блоки модели рудного тела

Из определения графа G понятно, что его замыкание представляет физически допустимый контур: если бы это было не так, то блок, не входящий в замыкание и не удовлетворяющий ограничениям по углу откоса, имел бы направленное к нему ребро, исходящее из узла в замыкании, что противоречит определению замыкания графа. При любом допустимом контуре множество узлов в пределах границ контура четко определяет замыкание графа. Из этого следует, что между конструкцией допустимых контуров карьера и замыканиями графа существует взаимно-однозначное соответствие. Замыканием графа с максимальным весом является замыкание $V' \subset V$, при котором $\sum_{v \in V'} c_v$ имеет максимальное значение. Максимальный вес замыкания графа соответствует конечному контуру карьера.

Алгоритм Л–Г начинается с добавления пустого корневого узла x_0 к графу G с ребрами, направленными от x_0 к каждому узлу в G (рис. 3). Приведем определения некоторых основных терминов, используемых в теории графов. Лес — это граф без циклов. Связный лес называется деревом. Связующее дерево T является подграфом G в множестве узлов $V(G)$ таким об-

разом, что ребра связующего дерева представляют собой подмножество ребер в G , а T является деревом. При упоминании дерева или связующего дерева графа будем считать, что ребра неориентированные. Ветвь b_v определяется как поддерево связующего дерева с корнем в производной (от x_0) v . Масса ветви — это сумма весов узлов в ветви. Ветвь считается сильной, если ее масса имеет положительное значение, в противном случае она считается слабой. Узел считается слабым, если он — часть слабой ветви, и сильным, если он — часть сильной ветви. Ребра называются положительными, если они направлены от корня x_0 , в противном случае они называются отрицательными. Ребро является связующим элементом между множеством узлов и корнем связующего дерева. Положительные ребра, которые поддерживают ветвь с положительной общей массой, обозначаются ps , в противном случае они обозначаются pw . Аналогично отрицательное ребро, поддерживающее сильную ветвь, обозначается mw ; отрицательное ребро, поддерживающее ветвь с отрицательной общей массой, обозначается ms . Связующее дерево с корнем в x_0 считается нормализованным, если только сильные ребра, которые в нем содержатся, соединены с корнем x_0 .

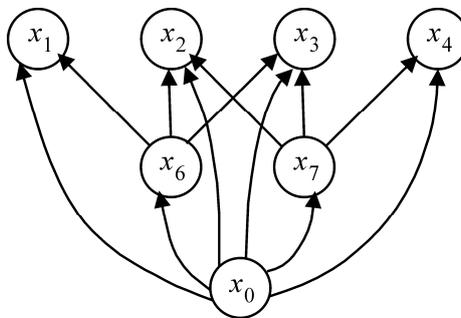


Рис.3. Граф G с формальным узлом x_0 и ребрами, построенными от него ко всем другим узлам

Для определения максимального замыкания при помощи алгоритма Л–Г формируется ряд нормализованных деревьев до тех пор, пока множество сильных ветвей нормализованного дерева не будут соответствовать замыканию графа. Дерево $T = (x_0 \cup V(G), E')$, где $E' = \{(x_0, v) : v \in V(G)\}$, является нормализованным связующим деревом, поскольку все сильные ребра соединены с корнем.

Начиная с нормализованного дерева T все положительные ветви будут иметь явно больший вес, чем конечные границы борта карьера, поскольку изначально это соответствует выбору всех блоков с положительным весом. Очевидно, что такой контур карьера не будет удовлетворять ограничениям по углу откоса борта. Подход с использованием алгоритма Л–Г заключается в том, чтобы моделировать нормализованные деревья все меньшей и меньшей величины до тех пор, пока ограничения по углу откоса борта не будут удовлетворены, и положительная масса ветвей не будет соответствовать конечным границам бортов карьера модели рудничного тела. Основным шагом алгоритма является определение ребра $a = (x_s, x_w)$ от сильного узла x_s к слабому узлу x_w в графе G (b_s — сильная ветвь, которой принадлежит x_s , и b_w — слабая ветвь, которой принадлежит x_w). Можно предположить, что это не удовлетворяет ограничениям по углу откоса борта, поскольку выбор всех положительных масс ветвей соответствует выбору ряда блоков, над которыми расположен другой ряд неизвлеченных блоков. При возникновении такой ситуации две ветви объединяются, и алгоритм производит новое нормализованное

дерево. Если r_s — корень сильной ветви, то объединение двух ветвей заключается в том, чтобы удалить ребро (x_0, r_s) от T и добавить ребро (x_s, x_w) . После объединения ветвей новая ветвь перемещается, чтобы обновить массу узлов в комбинированной ветви. Если сильное ребро (a, b) не примыкает к корню x_0 , нужно устранить ребро (a, b) и добавить ребро (x_0, a) от корня к узлу a , если a не соединен с корнем, когда ребро (a, b) удалено (или добавить ребро (x_0, b) , если b не соединен с корнем, когда (a, b) удалено). Этот процесс называется ренормализация. Когда в графе G нет ребра (x_s, x_w) , расположенного таким образом, что x_s является членом сильной ветви, а x_w расположено выше x_s и является членом слабой ветви, алгоритм заканчивается. Множество сильных ветвей образует замыкание графа, которое фактически имеет максимальный вес.

Небольшой пример действия алгоритма

После добавления всех узлов от формального узла x_0 следует начинать с нормализованного дерева (рис. 4). Ребро определяется там, где конечный узел ребра принадлежит сильной ветви, а его ведущий узел — слабой ветви. Две ветви объединяются, и нормализованное дерево изменяется.

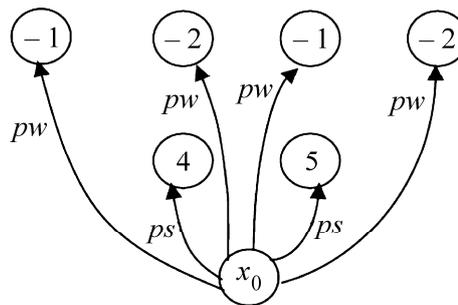


Рис. 4. Исходное нормализованное дерево: ps — положительные ребра, поддерживающие сильную ветвь; pw — положительные ребра, поддерживающие слабую ветвь

На рис. 5 изображены процессы объединения x_1 и x_6 и нормализации дерева.

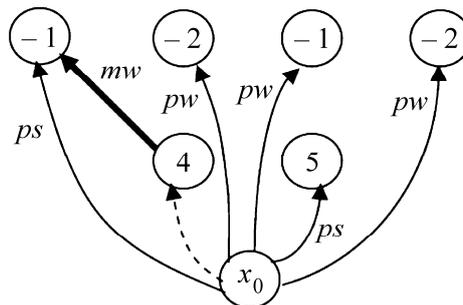


Рис. 5. Соединяющиеся ветви x_4 и x_6 ; ребро, обозначенное штриховой линией, удалено; mw — отрицательное ребро, поддерживающее сильное ребро

На рис. 6 показан результат распознавания перекрывающихся слабых ветвей выше узла x_6 (где x_6 имеет значение 4) и ренормализации дерева. Когда алгоритм заканчивается, сильные ветви соединяются с пустым узлом из максимального замыкания.

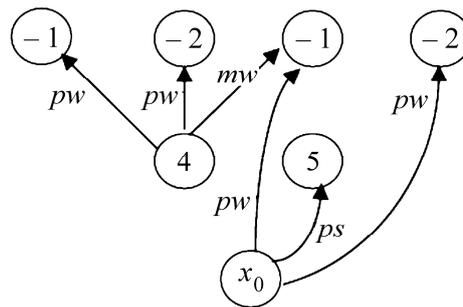


Рис. 6. Схема дерева после соединения всех слабых ветвей выше x_6

На рис. 7 изображено конечное нормализованное дерево, которое представляет собой замыкание графа, обладающее тем свойством, что сильные ребра, исходящие из пустого узла, представляют замыкание. Следовательно, не существует четких методов преобразования алгоритма Л–Г для решения непосредственно проблемы межблочных интервалов при помощи создания замыканий графов заданного размера.

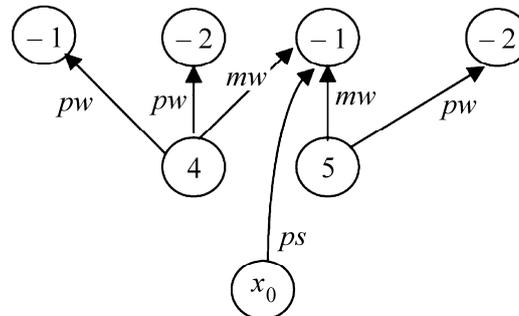


Рис. 7. Сильные ветви, связанные с формальным узлом, представляют замыкание конечного графа

ПАРАМЕТРИЗОВАННЫЙ АЛГОРИТМ СЕЙМУРА ДЛЯ ГРАНИЦ КАРЬЕРА

Модификация Сеймуром [13] алгоритма Лерча–Гроссмана известна как параметризация. Параметризация дает максимально рентабельные карьеры в качестве функции другого параметра (где этот параметр определен для каждого блока модели рудного тела). В качестве параметра Сеймуром выбран объем карьера. При необходимости построить кривую зависимости экономической рентабельности карьера от значения параметра (рис. 8) алгоритм Сеймура может точно отражать те конфигурации карьера, которые расположены на верхней выпуклой оболочке этого множества точек. Если верхняя выпуклая оболочка определена и целесообразные контуры карьера существуют и близки к требуемым значениям параметра, то можно использовать такие контуры для проектирования выемочных блоков одного размера.

Алгоритм придерживается метода Л–Г с введением параметризованных переменных и дополнительной способностью замечать, когда поддерево можно рассматривать в качестве небольшого карьера. Вместо того чтобы производить одно конечное дерево (представляющее максимальное замыкание графа — конечные границы борта карьера), он производит множество ветвей, сила которых определяется отношением их величины к массе. Пороговая величина используется для определения того, является ли ветвь сильной или слабой. Изменяя пороговую величину, можно образовать ряд вложенных контуров. Совокупность сильных ветвей образует нормализованное дерево, которое алгоритм Л–Г отображает при минимальном значении пороговой величины.



Рис. 8. Верхняя выпуклая оболочка кривой зависимости объема карьера от его размера

Суммарная величина узла — это сумма значений всех узлов ветви, которые имеют к нему доступ. Суммарная масса узла — это сумма масс всех узлов ветви, которые имеют к нему доступ. Суммарная сила узла — это суммарная величина, разделенная на суммарную массу. Сила ветви — суммарная сила корневого узла, представляющая сумму всех значений ветви, разделенную на массу ветви. Ветвь является сильной, если ее сила больше или равна заданной пороговой величине, в противном случае ветвь считается слабой. При сравнении двух ветвей ветвь большей силы называется сильной, а ветвь меньшей силы — слабой. Конструкция обеспечивает то, что ребро не может быть направлено к нижележащей ветви меньшей силы.

Прежде всего нужно обозначить каждый узел как самостоятельную ветвь. Затем для каждого узла x_s в каждой сильной ветви необходимо выяснить наличие перекрывающего узла, принадлежащего более слабой (или равной по силе) ветви. Когда узел x_w более слабой (или равной по силе) ветви перекрывает узел более сильной ветви, ребро направлено от узла более сильной ветви к узлу более слабой ветви, следуя правилам определения месторасположения ребра.

Определение местоположения ребра

Для определения местоположения ребра нужно преобразовать узел сильной ветви в ее корень, что можно сделать путем изменения направления ребер в промежутке между сильным узлом x_s и корнем сильной ветви. Затем необходимо скорректировать суммарные массы и суммарную величину. В процессе перенаправления (“переключения” корней) ребра могут быть удалены, если они направлены вниз от узла, суммарная сила которого больше силы ветви. Это разделяет ветвь на две и не позволяет сильному узлу поддерживать более слабые, не перекрывающие узлы. В результате происходит ослабление сильной ветви. Корневое ребро более сильной ветви направлено к перекрывающему узлу более слабой ветви и объединяет две ветви в одну. Сила объединенной ветви изменяется. Это достигается при помощи направления более слабой ветви от узла к корню, перенаправления ребер и корректировки суммарной массы и силы. В процессе корректировки слабой ветви ребра удаляются, если они исходят от узла, суммарная сила которого больше силы ветвей. Если не было построено ни одного ребра (не было найдено ни одного узла более слабой ветви, перекрывающего узел более сильной ветви), алгоритм заканчивается. Ни один из узлов не имеет слабой перекрывающей ветви. Ветви сортируются в порядке убывания их силы b_1, \dots, b_l . Эта последовательность контуров карьера представляет выпуклую оболочку с максимальными значениями переменной параметризации.

Несмотря на то что данный подход может обеспечить полезные результаты, на практике установлено [13], что алгоритм является слишком затратным по времени для крупных карьеров. Эвристические методы соединения смежных блоков и усреднения их величины для уменьшения размера блочной модели обычно используются для определения приемлемого ра-

бочего цикла за счет формирования наиболее оптимального выемочного блока. Кроме того, если карьеры, расположенные на верхней выпуклой оболочке, будут расположены далеко друг от друга с точки зрения размера, то проблема межблочных интервалов останется нерешенной, поскольку алгоритм не отобразит карьеры желаемого размера (рис. 9). Алгоритм Сеймура будет отражать два вложенных контура на верхней выпуклой оболочке, но при этом не будет отражать каких-либо потенциально полезных конфигураций, лежащих между этими размерами, расположенными ниже выпуклой оболочки.

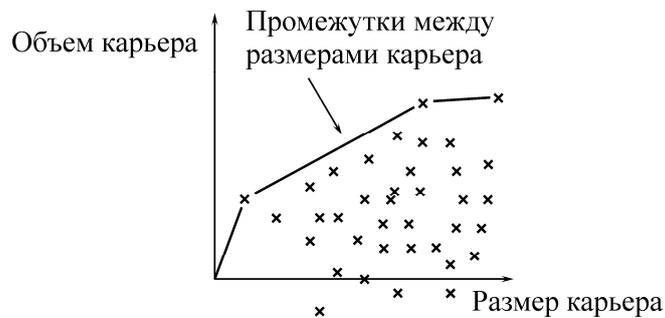


Рис. 9. Верхняя выпуклая оболочка кривой зависимости объема карьера от его размера показывает значительную разницу между возможными размерами карьера

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКА В СЕТИ

Пикард [14] показал, как достичь максимального замыкания графа при помощи алгоритмов нахождения максимального потока в сети, что позволяет определить конечные границы бортов карьера.

Проблема нахождения максимального потока в сети выглядит следующим образом: задан направленный граф G с определенной пропускной способностью ребер, узел-источник s и узел стока t ; необходимо узнать максимальный поток, который может пройти от узла-источника s к узлу стока t , не превышая пропускной способности. Ребро (i, j) с пропускной способностью $c_{i,j}$ может провести максимально $c_{i,j}$ единиц потока от узла i к узлу j . Поток должен также удовлетворять ограничению сохранения потока в каждом узле, выраженному в $V(G) - \{s, t\}$. Согласно этому ограничению, входящий и исходящий потоки должны быть равны. Минимальный срез — это совокупность ребер с “хвостами” в подмножестве узлов $S \subseteq V(G) - \{t\}$, содержащих s , и “головами” в $V(G) - S$, таким образом, общая пропускная способность в срезе будет минимальна во всех подобных срезах. Поскольку любой поток, идущий от s к t , должен удовлетворять максимальной пропускной способности минимального среза, максимальный $s - t$ поток соответствует максимальному размеру минимального среза. При заданном максимальном потоке $s - t$ можно определить минимальный срез.

Пикард [14] показал, что для заданного графа G (для которого необходимо определить максимальное замыкание) можно построить вспомогательный граф G' , в котором минимальный срез будет соответствовать максимальному замыканию G . Для построения графа G' нужно взять исходный граф G и добавить два новых узла — источник s и сток t . Затем следует провести ребра из s к каждому узлу, имеющему положительный вес в графе G , а от каждого узла, имеющего отрицательный вес, провести ребра к t . Пропускные способности $c_{(s,v)}$ и $c_{(v,t)}$ ребер формы (s, v) и (v, t) будут равны массе v в G и абсолютному значению массы v в G соответственно. Все остальные ребра в графе G' (соответствующие ограничениям по углу откоса борта) будут иметь бесконечную пропускную способность.

На рис. 10 рассмотрен небольшой пример вертикального поперечного разреза модели рудного тела, а на рис. 11 изображена сеть, построенная по модели рудного тела на рис. 10. Непомеченные ребра имеют неограниченную пропускную способность. Ребра минимального среза в графе G' будут направлены только от s или к t , поскольку все другие имеют неограниченную пропускную способность.

1	-2	-2	-2	-2
	5	6	-3	
		4		

Рис. 10. Вертикальный поперечный разрез модели рудного тела с указанием экономической ценности блоков

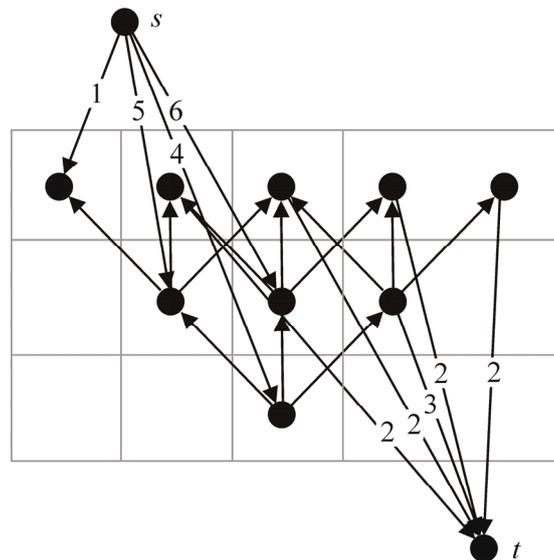


Рис. 11. Сеть, построенная из модели рудного тела на рис. 10, s — узел-источник, t — узел-приемник

В контексте модели рудного тела можно представить минимальный срез, состоящий из ребер, направленных к узлам, обозначающим неизвлеченную руду, и ребер, исходящих из узлов, обозначающих неизвлеченную пустую породу. Ребра неограниченной пропускной способности обеспечивают соблюдение ограничений по углу откоса борта. Минимизация суммы стоимости извлеченной руды и стоимости неизвлеченной пустой породы эквивалентна максимизации разницы стоимости неизвлеченной руды и стоимости неизвлеченной пустой породы.

На рис. 12 приведен минимальный срез из нашего примера; ребра, обозначенные штриховой линией, соответствуют ребрам в минимальном срезе. Проблему минимального среза можно сформулировать в виде задачи линейного программирования (ЛП) таким образом, чтобы матрица ограничений была полностью унимодулярной. Это предполагает возможность получения целочисленного решения при помощи ЛП, которое может быть эффективно использовано на практике для крупных потоков.

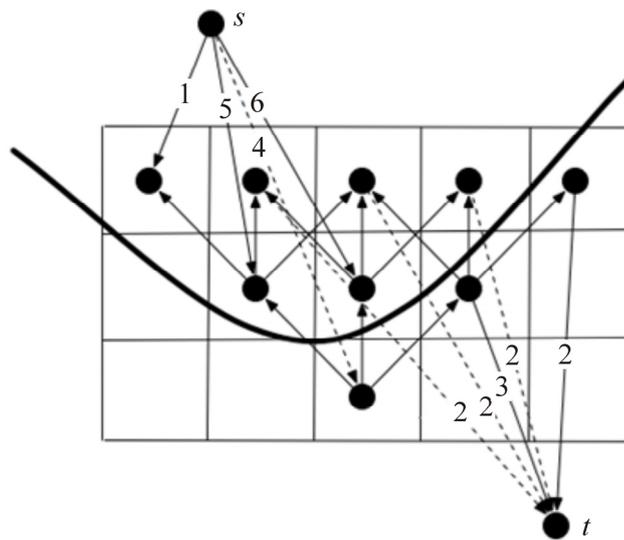


Рис. 12. Минимальный срез сети, показанной на рис. 11

Хокбаум и Чен [15, 16] показали, что алгоритм Л–Г может быть использован для нахождения максимального потока в сети. На примере ряда нормализованных деревьев они продемонстрировали, как можно получить оптимальный поток в сети. Они также проанализировали время прохождения алгоритма Л–Г и усовершенствовали его при помощи методов масштабирования (отличных от тех, что использовались для определения конфигурации выемочных блоков), чтобы показать, что его можно применить для прогона за время, пропорциональное $m \ln n$, где m и n — количество ребер и узлов в графе соответственно. Алгоритм нахождения максимального потока в сети, разработанный ими, также известен как псевдофлюидальный алгоритм. Муир [17] использовал псевдофлюидальный алгоритм и выяснил, что на практике он является более эффективным, чем алгоритм Л–Г. Галло и др. [18] разработали алгоритм нахождения максимального потока в сети для создания ряда параметризованных минимальных срезов. Этот процесс может отражать ряд контуров карьера, располагающихся на верхней выпуклой оболочке кривой зависимости экономической стоимости карьера от заданного параметра. Его можно использовать для создания всех контуров карьера на верхней выпуклой оболочке с минимальными дополнительными расчетами. Однако эти возможные конфигурации карьера будут иметь те же самые недостатки, что и алгоритм Сеймура.

ЛАГРАНЖЕВА ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ДАГДЕЛЕНА – ДЖОНСОНА

Дагделен и Джонсон формализовали процесс параметризации в контексте релаксации Лагранжа [19]. Процесс такой релаксации заключается в том, что ограничение, затрудняющее решение задачи ЛП, перемещается в целевую функцию. В рамках проблемы оптимизации карьера показана методика, применяемая для решения задачи нахождения конфигурации карьера заданной вместимости при помощи моделирования конечных границ бортов карьера в виде ЛП, с дополнительным условием, согласно которому количество блоков в руднике ограничено, например b :

$$\max \sum_{i=1}^n c_i x_i, \quad x_j - x_i \leq 0 \quad (v_i, v_j) \in A(G),$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = b, \quad x_i \in \{0,1\} \quad \text{для } i = 1, \dots, n.$$

Если ограничение $\sum_{i=1}^n x_i = b$ снимается, эта система становится полностью унимодулярной. Это предполагает, что ЛП-релаксация даст целочисленное решение, которое может быть эффективно получено при помощи симплекс-метода. Однако ограничение $\sum_{i=1}^n x_i = b$ нарушает полную унимодулярность матрицы ограничений, и то, что ЛП-релаксация даст целочисленное решение, становится маловероятным, что затрудняет нахождение эффективного решения задачи целочисленного вычисления. Лагранжевой релаксацией этой задачи будет помещение данного ограничения в целевую функцию наряду со штрафным коэффициентом $\lambda \geq 0$ за его нарушение. Новая задача целочисленного вычисления будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=1}^n (c_i - \lambda)x_i - \lambda b, \\ & x_j - x_i \leq 0 \quad (v_i, v_j) \in A(G), \\ & x_i \in \{0,1\} \quad \text{для } i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Такая программа целочисленного вычисления снова становится полностью унимодулярной и может быть эффективно решена. Поскольку λ и b являются штрафными коэффициентами, а λb — константа, она может быть удалена из целевой функции. Это и есть решение проблемы определения конечных границ борта карьера, в которой экономическая стоимость модели рудного тела снижена постоянным коэффициентом λ , поскольку каждый блок i в ЛП имеет экономическую стоимость $(c_i - \lambda)$. При λ равном 0 конечные границы борта карьера определены. По мере увеличения λ можно ожидать формирования все меньших и меньших контуров. Таким образом, процесс нахождения вложенных контуров карьера при помощи лагранжевой параметризации Дагделена и Джонсона схож с процессом масштабирования модели рудного тела и использования алгоритма Л–Г для получения ряда вложенных контуров. Проблема межблочных интервалов, описанная в предыдущем разделе, остается нерешенной. Выбор значений λ , подходящих для создания контуров карьера требуемого объема, не всегда прост и может занять довольно много времени.

ФОРМУЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Существует множество технических и инженерных ограничений, которые необходимо учитывать при проектировании размера выемочного блока в зависимости от времени его извлечения [20]. К ним относятся: ограничения по дроблению и ограничения мощности извлечения руды. В дробилку можно загрузить определенное минимальное и максимальное количество руды, а имеющееся количество грузовиков может ограничить объем руды или пустой породы, который может быть извлечен в течение определенного периода. Такие ограничения называются ограничениями по мощности, если они принимают форму $\sum_i x_i \leq b$ для некоторой константы b , где x_i — бинарная переменная, показывающая был ли извлечен блок i .

Поскольку существуют эффективные алгоритмы для определения оптимальных границ карьера при отсутствии размерных, геометрических и прочих ограничений, было бы интересно узнать, существует ли эффективный алгоритм при наличии данных ограничений. Если считать, что задача определения оптимальных границ карьера с тем только условием, что карьер должен быть связным телом, переходит в разряд NP-трудной (сложной в вычислительном отношении), то это ставит под сомнение существование эффективного алгоритма полиномиального

времени. Класс сложности задачи может измениться, если учесть также выпуклость и определенные ограничения по дроблению. Это описывается Тачфином и Суми [21], которые используют релаксации Лагранжа при любом количестве ограничений по мощности.

Для уменьшения количества переменных в программе целочисленных вычислений можно соединить несколько блоков вместе [22, 23]. Это может повлиять на изменение формы конечных границ бортов карьера. Усредненный набор блоков имеет тенденцию повышать низкую и понижать высокую стоимость блоков модели рудного тела, что ведет к неправильной классификации и ошибочной оценке. Последнее может оказать сильное влияние на анализ технической осуществимости и оптимизацию проекта, то, что в горнотехнической литературе известно как эффект избирательного действия [24, 1].

Акайке [25] рассматривает оптимизацию проектировки карьера с точки зрения множества местоназначений, таких как: дробилка, отвал и т. д., а местоназначение отдельного блока рассчитывается в процессе оптимизации, определенном в его формулировке программы целочисленных вычислений. Для решения задачи Акайке [25] использует технику релаксаций Лагранжа [19] в сочетании с теорией графов и теорией потоков в сетях. Однако данный подход не обеспечивает нахождение подлинно оптимального решения и оставляет без внимания проблему межблочных интервалов, возникающую в результате использования релаксаций Лагранжа.

БАЗОВЫЙ АЛГОРИТМ ДЕРЕВА

Метод объединения блоков, известный под названием базового алгоритма дерева, предложен Рамазаном [26]. При использовании метода базового дерева блоки объединяются таким образом, что конечные границы бортов карьера совпадают с теми, которые были бы получены, если бы блоки не были объединены. В результате этого количество блоков уменьшается, что в некоторых случаях позволяет получить такие решения задач целочисленного программирования, использование которых сделает отработку крупных карьеров рентабельной.

Поскольку количество переменных в формулировке задачи целочисленного программирования уменьшилось, можно ввести больше ограничений без ущерба для времени решения задачи. Алгоритм базового дерева объединяет блоки при помощи модели линейного программирования, в результате объединенные блоки получают определенные характеристики, необходимые для создания реализуемых производственных планов через применение частично-целочисленного программирования (ЧЦП) для заданной модели рудного тела. Базовое дерево определяется как любое сочетание блоков, при котором:

- 1) извлечение блоков является рентабельным;
- 2) блоки удовлетворяют ограничениям по углу откоса борта;
- 3) не существует собственного подмножества выбранных блоков, удовлетворяющего пунктам 1 и 2.

Определение понятий и терминов

Следующие определения и примеры взяты из работы [26] для описания алгоритма. Объем денежных средств, который необходимо затратить на рудный блок i , чтобы оправдать стоимость извлечения перекрывающего блока пустой породы j , представлен в виде потока $f_{i,j}$, проходящего через ребро $a = (i, j)$, $x_{i,j}$ — параметр, используемый в сети, для активации или деактивации ребра (i, j) . При прохождении потока через ребро $a = (i, j)$ оно активируется путем придания параметру $x_{i,j}$ значения больше 0. При отсутствии потока, проходящего через

ребро, оно не активируется, а параметр $x_{i,j}$ равен 0. Узел-источник s и приемник t добавляются к графу и так же, как в методе определения потока в сети, s имеет ребро, направленное к каждому рудному узлу с пропускной способностью, равной объему соответствующего рудного блока, а каждый узел пустой породы имеет ребро, направленное к приемнику t с пропускной способностью, равной объему соответствующего блока породы.

Выемочные блоки, проектируемые при планировании разработки карьера, должны удовлетворять максимально допустимым ограничениям по углу откоса борта. Коническая величина узла i , CV_i определяется как сумма величин всех блоков, расположенных внутри конуса ограничения по углу откоса, вершина которого установлена на положительном узле i . Опишем процесс вычисления коэффициента C_i , используя коническую величину рудного блока i . Этот процесс согласуется с другими ограничениями для построения базового дерева. Коэффициент M используется в качестве большого числа, которое превышает поток в сети. Взаимная поддержка возникает тогда, когда блок породы поддерживается несколькими рудными блоками.

Шаги алгоритма:

1. Определить конечные границы борта карьера блочной модели. Для построения базового дерева необходимо, чтобы конечные границы борта карьера были оптимальны для модели ЛП. Если для построения конечных границ бортов карьера используются эвристические методы, например метод перемещения конуса, то формулировки ЛП, скорее всего, будут недопустимы.

2. Определить коническую величину CV_i для всех рудных блоков в пределах конечных границ бортов карьера. Для этого вершина конуса устанавливается над рудным блоком и добавляется экономическая стоимость всех блоков внутри конуса. Такая процедура повторяется для всех рудных блоков.

3. Определить коэффициенты C_i рудных блоков. Начинать необходимо с самого верхнего уступа и заканчивать самым нижним. Коэффициенты рудных блоков на самом верхнем уступе устанавливаются начиная с 1 и располагаются в порядке, соответствующем убывающей величине конуса. Процесс присвоения коэффициента производится для всех рудных блоков. Если рудные блоки, расположенные на одном и том же уступе, имеют одинаковую величину конуса, коэффициенты устанавливаются произвольно.

4. После определения коэффициентов можно сформулировать задачу ЛП для алгоритма базового дерева. Модель ЛП может быть решена при помощи пакета программ CPLEX.

Целевая функция задачи целочисленного программирования имеет вид

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^w C_i x_{i,j}, \quad (1)$$

где i — номер рудного блока; j — номер покрывающего блока породы; n — количество рудных блоков; w — количество блоков породы, покрывающих заданный рудный блок i в соответствии с ограничениями по углу откоса борта карьера.

Математическая модель представляет проблему минимизации интервалов между выемочными блоками. Смысл целевой функции заключается в том, что всегда более предпочтительно направить поток от узлов, имеющих более низкие коэффициенты. Таким образом, в ЛП предпочтительно строить ребра и направлять поток от рудного блока с небольшим значением конической величины (с наименьшим значением коэффициента).

Ограничения

Для каждого рудного узла i , $f_{s,i} \leq V_i$, где s — узел-источник, i — идентификационный номер для положительного значения рудного блока, $f_{s,i}$ — поток, направленный от узла-источника к узлу i , V_i — экономическая стоимость блока i . Для каждого узла породы j , $f_{j,t} > V_j$, j — идентификационный номер узла пустой породы, t — узел-приемник. Как и во всех задачах ЛП по определению потока в сети, ограничения необходимы для всех узлов, не являющихся источниками или приемниками, для обеспечения сохранения потока, т. е. поток, входящий в узел, равен потоку, выходящему из узла. Суммарный поток, подходящий к узлу породы j , должен быть равен потоку, выходящему из него: $\sum_t f_{i,j} - f_{j,t} = 0$. Суммарный поток, входящий в рудный узел i из узла-источника, должен быть равен суммарному потоку, выходящему из рудного узла: $f_{s,i} - \sum_j f_{i,j} = 0$. Следующее ограничение обеспечивает то, что $x_{i,j}$ не равно 0, если существует поток в ребре (i, j) : $f_{i,j} - Mx_{i,j} \leq 0$, где i — рудный блок, j — блок породы, M — число, большее, чем величина максимально возможного потока в сети.

Показана формулировка программы целочисленных вычислений для следующего набора блоков (рис. 13).

- 1	- 2	- 2	- 2	- 2
	2	- 4	7	
		6		

Рис. 13. Фрагмент вертикального поперечного разреза модели рудного тела с указанием экономической ценности блоков

Если пронумеровать узлы слева направо и сверху вниз, то блок 9 будет иметь значение +6, а блок 7 — значение -4. Конические величины рудных блоков равны: $CV_6 = -1 - 2 - 2 + 2 = -3$, $CV_8 = -2 - 2 - 2 + 7 = +1$ и $CV_9 = -1 - 2 - 2 - 2 - 2 + 2 - 4 + 7 + 6 = +2$. Поскольку блоки 6 и 8 располагаются на одном уступе и $CV_8 > CV_6$, то $C_8 = 1$, $C_6 = 2$ и $C_9 = 3$. Целевая функция (1) этой задачи будет выглядеть следующим образом:

$$\min 2x_{6,1} + 2x_{6,2} + 2x_{6,3} + x_{8,3} + x_{8,4} + x_{8,5} + 3x_{9,1} + 3x_{9,2} + 3x_{9,3} + 3x_{9,4} + 3x_{9,5} + 3x_{9,7}.$$

Результатом решения задачи ЛП с ($\varepsilon = 0.001$) стало построение двух базовых деревьев с корнями в узлах 8 и 9. Потоки в ребрах от узла-источника к рудным блокам следующие: $f_{s,6} = 2.0$, $f_{s,8} = 6.003$, $f_{s,9} = 5.003$. Поскольку $f_{s,8} < V_8$ ($6.003 < 7.0$), $f_{s,9} < V_9$ ($5.003 < 6$), $f_{s,6} = V_6$ ($2.0 = 2.0$), а узлы 8 и 9 являются корнями деревьев, то узел 6 корнем не является. Два базовых дерева, построенных по модели ЛП, имеют активные ребра, пропускающие определенный поток (рис. 14).

Параметрический метод определения потока в сети может использоваться так же, как и метод базового дерева, например для создания выемочных блоков, а затем рассматривать их в качестве базовых деревьев. В таком случае выемочные блоки могут быть использованы как “рудные” переменные в формулировке задачи целочисленного программирования.

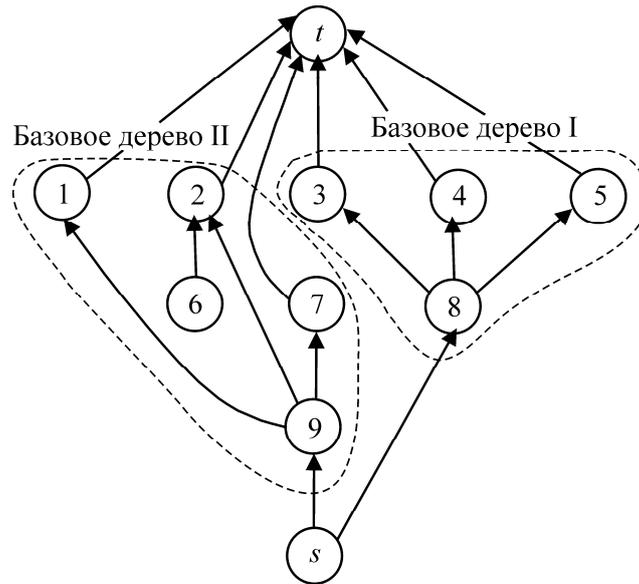


Рис. 14. Базовые деревья, созданные из модели рудного тела на рис. 13: s — узел-источник, t — приемник; показаны активированные ребра [26]

Приведем небольшой пример решения подобной задачи. Ограничение заключается в том, что, согласно условиям транспортировки, за определенный промежуток времени могут быть извлечены только 10 блоков. Рассмотрим четыре базовых дерева — T_1 , T_2 , T_3 и T_4 , состоящих из 8, 4, 8 и 10 блоков соответственно. Деревья должны быть извлечены последовательно одно за другим начиная с T_1 . С учетом заданного ограничения, рассматривая блоки в качестве базовых деревьев, получим решение, согласно которому для извлечения четырех деревьев понадобится четыре периода. Если блоки не были объединены при помощи алгоритма базового дерева, то оптимальным решением будет извлечение максимального количества блоков (10) в каждый период времени. Таким образом, четыре дерева будут извлечены за три периода.

Более крупные базовые деревья позволяют решать задачу целочисленного программирования более эффективно, но при этом усугубляют проблему межблочных интервалов. Также не существует четкого способа введения в базовые деревья размерных ограничений. В зависимости от того, как классифицированы узлы в алгоритме, могут быть получены базовые деревья разных размеров. Несмотря на то что это всего лишь простой пример того, что может произойти, когда несколько блоков рассматриваются в качестве одной неизвестной величины (переменной задачи), он демонстрирует, что составление производственных планов с применением алгоритма базовых деревьев без учета ограничений, которые будут использованы в задаче целочисленного программирования, может привести к неоптимальным решениям. В контексте задачи определения конфигурации выемочных блоков может случиться так, что разрабатываемая часть базового дерева будет способствовать увеличению NPV карьера.

НАПРАВЛЕНИЯ СОВРЕМЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Ниже представлен обзор новых подходов к проектированию выемочных блоков, в основе которых лежит попытка решить задачу оптимизации для одиночного выемочного блока. Алгоритм, позволяющий эффективно справиться с данной задачей, впоследствии может быть обобщен и использован для производства множества выемочных блоков нужного размера.

МАКСИМАЛЬНО НАСЫЩЕННЫЙ k -ГИПЕРПОДГРАФ

Гиперграф является обобщением простого графа, в котором каждым ребром (называемым гиперребром) могут соединяться не только два узла, но и любые подмножества узлов. Можно построить гиперграф $G = (V, H)$, узлы которого будут представлять блоки модели рудного тела. Тогда получим гиперребро e_i , содержащее узел v_i и все блоки, которые должны быть извлечены раньше, чем v_i , с соблюдением ограничений по углу откоса борта. Если считать, что e_i имеет величину c_i , где c_i — экономическая ценность блока, представленного узлом v_i , то проблема выбора k узлов V' так, что граф V' имеет свойство $\sum_{e \in V'(G)} c_e$ максимальное во всех множествах V' , известна под названием определения максимально насыщенного k -гиперграфа.

Это можно сформулировать в виде задачи целочисленного программирования:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j \in \text{ore}} c_j y_j - \sum_{i \in \text{waste}} c_i x_i, \\ y_j & \leq x_i, \quad j \in M, \quad i \in e_j, \\ \sum_{i \in N} x_i & \leq k, \end{aligned}$$

$$x_i \in \{0,1\}, \quad i \in N, \quad y_j \in \{0,1\}, \quad j \in M,$$

где c_i — стоимость разработки узлов породы; прибыль c_j — положительная экономическая стоимость блока j (представлена гиперребром e_j); y_j — условная переменная удаленного гиперребра e_j ; x_i — условная переменная, представляющая извлекаемый блок i .

Данная проблема была изучена и в других контекстах и может помочь при решении таких задач, как нелинейная задача о ранце и задачи планирования гибких производственных систем. Крама и Мадзолла [27] отметили важный аспект, определяющий неравенства для решения задачи ограниченного по мощности насыщенного гиперподграфа. Гиперграф $G = (S, A)$ является гиперподграфом от $H = (N, E)$, если $A \subset E$ и $S = \{v : v \in e \text{ для } e \in A\}$. Пары $S \subseteq N$ и $A \subseteq E$ называются независимыми, если узлы в S и узлы ребер в A удовлетворяют ограничениям по мощности (т. е. $\sum_{i \in S \cup A} x_i \leq b$). В противном случае пары называются зависимыми:

$$\sum_{e \in A} (|e| + W - b) y_e + \sum_{i \in W} x_i \leq |W|. \tag{2}$$

В этом уравнении $G = (S, A)$ является гиперподграфом от $H = (N, E)$, а W — подмножеством $N - S$. Показано, что уравнение (2) является справедливым неравенством, если для всех $e \in A$, $b - |e| \leq |W| \leq b - 1$ и существует элемент $\bar{e} \in A$ такой, что $0 \leq b - |\bar{e}| < |W|$.

Насколько эффективным будет создание срезов для нахождения целочисленного решения, зависит от ряда факторов. Существует множество способов образования множеств W и A в вышеприведенных неравенствах. Необходимо найти способ создания множеств W и A таким образом, чтобы полученные срезы привели к уменьшению разницы между решениями задач линейного и целочисленного программирования за адекватный промежуток времени. С этим связана работа Блея и др. [28], которые применяют срезы для решения проблемы, касающейся введения дисконтирования в производственный план.

ГАРАНТИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Если сформулировать задачу получения выемочных блоков желаемого размера и свойств в виде задачи целочисленного программирования, то она будет слишком масштабной для нахождения эффективного решения. Однако, если целочисленного решения не требуется, для определения границ оптимального NPV можно использовать релаксацию задачи линейного программирования. До тех пор, пока не будет найдена оптимальная конфигурация карьера, решение релаксаций рассматривается в качестве гарантии того, что конфигурации, полученные при помощи других методов, близки к оптимальным. Метод ветвей и границ для получения целочисленных решений задачи линейного программирования также может быть использован для определения границ карьера.

АЛГОРИТМЫ АППРОКСИМАЦИИ

При решении сложных в вычислительном отношении задач естественным образом встает вопрос о том, как максимально быстро найти оптимальное решение. Этот вопрос тщательно изучен применительно к алгоритмам аппроксимации. Обычно в качестве алгоритмов аппроксимации рассматривают так называемые прямодвойственные схемы [29]. Комбинаторная интерпретация прямодвойственных алгоритмов линейного программирования позволяет решить эту проблему. Анализ данного подхода и гарантия аппроксимации, которую он может обеспечить за максимально короткое время, являются важной частью наших текущих исследований.

ДИСКОНТИРОВАНИЕ

В общепринятой практике экономическое дисконтирование применяется при оптимизации конфигурации выемочных блоков чисто эвристически. Вложенные контуры формируются таким образом, чтобы стоимость выемочного блока, разделенная на его объем, всегда была больше экономической стоимости последующих блоков, разделенной на их объем [8]. Толвинский и Ундервуд [30] разработали алгоритм, который напрямую задействует дисконтирование при составлении производственного плана, но при этом обеспечивает исключительно эвристические решения вследствие того, что достижение оптимальности на крупных шахтах требует больших временных затрат. Другие авторы предлагают решить задачу при помощи релаксаций линейного программирования [31], точных методов [32], эвристики [33–37] и прочих способов, позволяющих снизить количество двоичных переменных [38].

Если необходимо применить дисконтную ставку d для решения проблемы определения конфигурации ограниченных выемочных блоков n с экономической стоимостью c за периоды p и получить ограниченные выемочные блоки максимального размера b , то задача может быть сформулирована в виде следующей задачи целочисленного программирования:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{i=1}^n (1+d)^k c_i x_{i,p}, \\ x_{i,l} - \sum_{k=1}^l x_{j,k} & \leq 0 \quad i, l = 0 \dots p-1, \quad (i, j) \in A(G), \\ \sum_{k=0}^{p-1} x_{i,k} & \leq 1 \quad \forall i, \\ \sum_{i=1}^n x_{i,k} & \leq b, \quad k = 1 \dots p, \\ x_{i,k} & \in \{0, 1\}, \quad i = 1 \dots n, \quad k = 0, \dots, p-1. \end{aligned}$$

Эта задача целочисленного программирования не может быть решена за адекватный промежуток времени, но определяет целевую функцию нахождения конфигурации выемочного блока, которая позволила бы оптимизировать NPV карьера. Алгоритм, решающий проблему определения конфигурации ограниченного выемочного блока для одного карьера, может быть многократно использован для получения ряда выемочных блоков, однако он не всегда оптимален с точки зрения NPV. Для оптимизации NPV необходимо одновременно учитывать конфигурацию всех выемочных блоков и дисконтирование. Для достижения данной цели может быть эффективно использование метода, известного под названием декомпозиция Данцига – Вульфа [39]. Метод Данцига – Вульфа разбивает проблему на основную задачу и серию подзадач. Эффективный алгоритм для единичного выемочного блока является ключевым для применения данного метода.

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ И СТОХАСТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Общепринятые схемы оптимизации, разработанные для проектирования шахты и планирования производственного плана, подразумевают, что экономическая стоимость разработки выемочных блоков является известной. Исходя из того, что модели рудных тел, используемые для составления производственного плана, построены на основе весьма ограниченных данных (информация о бурении), то качество продукции и экономическая стоимость представляются крайне неопределенными, что сильно влияет на результаты общепринятой (детерминированной) оптимизации [3 – 5]. Для вычисления неопределенности геологических условий применяются геостатистические или стохастические модели [40 – 42]. Это приводит к необходимости переписывания производственного плана в контексте стохастической оптимизации, рассмотренной в [43]. Частью данного подхода является разработка метаэвристики для решения крупных СЦП (стохастическое целочисленное программирование) разработок [36]. Стохастический производственный план обычно имеет два преимущества: снижение риска не оправдать производственные ожидания при увеличении NPV, и решение проблемы межблочных интервалов [44 – 49]. Работа по многоэтапному стохастическому программированию [50], являющемуся выгодным с позиции исследования операций, непрактична с точки зрения планирования и инженерной работы. Причина заключается в том, что стохастическое программирование не позволяет выработать единого производственного плана для последующей инженерной обработки и финансовой оценки; кроме того, решения по обработке данных и оптимизация минимальной сортности не могут быть применены для широко распространенных горных работ со строгими требованиями относительно смешения. Данная работа расширяет понятие стохастической оптимизации при помощи стохастического потокоопределения для управления геологической и рыночной неопределенностями [51], отражая те же аспекты, что и вышеупомянутые СЦП подходов.

ВЫВОДЫ

Рассмотрены традиционные методы проектирования выемочных блоков в контексте проблемы межблочных интервалов. Все описанные методы, за исключением алгоритма базового дерева и целочисленного программирования, выдают одинаковый набор контуров карьера путем многократного применения параметризованного коэффициента масштабирования к модели рудного тела. Несмотря на то что алгоритм базового дерева может производить другие контуры карьеров, он также не решает проблему межблочных интервалов полностью. Эти традиционные подходы к проектированию выемочных блоков не оптимальны с точки зрения заявленной NPV вследствие того, что в процессе оптимизации не учитывается такой фактор, как дисконтирование.

Разработка эффективных алгоритмов создания выемочных блоков необходимого размера является важным этапом на пути устранения проблемы межблочных интервалов и включения дисконтирования в процесс оптимизации. Методы стохастической оптимизации могут решить некоторые проблемы, которые детерминистские методы решают лишь частично. Перспективные подходы к решению проблемы планирования, описанные в работе, могут быть осмыслены в контексте разработки различных концепций [52] и математических моделей [53].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Farrelly C. and Dimitrakopoulos R.** Recoverable reserves and support effects in optimizing open pit mine design, *International Journal of Surface Mining*, **16**, No. 3 (2002).
2. **Dowd P. A.** Risk in minerals projects: analysis, perception and management, *Transactions of the Institutions of Mining and Metallurgy, Section A: Mining Technology*, **106** (1997).
3. **Dimitrakopoulos R., Farrelly C. T., and Godoy M. C.** Moving forward from traditional optimization: grade uncertainty and risk effects in open-pit design, *Transactions of the Institutions of Mining and Metallurgy, Section A: Mining Technology*, **111** (2002).
4. **Godoy M. C.** The effective management of geological risk in long-term production scheduling of open pit mines, PhD thesis, The University of Queensland, Brisbane, Qld, Australia, (2003).
5. **Godoy M. C., and Dimitrakopoulos R.** Managing risk and waste mining in long-term production scheduling, *SME Transactions*, **316**, (2004).
6. **Zuckerberg M., J. van der Riet, Malajczuk W., and Stone P.** Optimal life-of-mine scheduling for a bauxite mine, *Journal of Mining Science*, **47**, No. 2 (2011).
7. **Locchi L., Carter P., and Stone P.** Sequence optimization in longwall coal mining, *Journal of Mining Science*, **47**, No. 2 (2011).
8. **Whittle J.** A decade of open pit mine planning and optimisation — the craft of turning algorithms into packages, in: *APCOM'99 Computer Applications in the Mineral Industries 28th International Symposium*, Colorado School of Mines, Golden, Co, USA (1999).
9. **Dimitrakopoulos R.** Stochastic optimization for strategic mine planning: A decade of developments, *Journal of Mining Science*, **47**, No. 2 (2011).
10. **Lerchs H., and Grossman I. F.** Optimum design of open pit mines, Joint CORS and ORSA Conference, Montreal, in *Transactions Canadian Institute of Mining and Metallurgy* (1965).
11. **Zhao Y., and Kim Y. C.** A new optimum pit limit design algorithm, in: *APCOM'92 Computer Applications in the Mineral Industries 28th International Symposium* (1992).
12. **Bondy J. A., and Murty U. S. R.** Graph theory with applications, North-Holland (1976).
13. **Seymour F.** Pit limit parametrization from modified 3D Lerchs-Grossmann algorithm, *Society of Mining, Metallurgy and Exploration, Manuscript*, 1 – 11 (1994).
14. **Picard J. C.** Maximal closure of a graph and applications to combinatorial problems, *Management Science*, **22** (1976).
15. **Hochbaum D., and Chen A.** Improved planning for the open — pit mining problem, *Operations Research*, **48**, No. 6 (2000).
16. **Hochbaum D.** A new-old algorithm for minimum-cut and maximum-flow in closure graphs, *Networks*, **37**, No. 4, (2001).
17. **Muir D. C. W.** Pseudoflow, new life for lerchs-grossman pit optimisation, in: *Orebody Modelling and Strategic Mine Planning, AusIMM Spectrum Series 14* (2007).
18. **Gallo G., Grigoriadis M. D., and Tarjan R. E.** A fast parametric maximum flow algorithm and applications, *SIAM Journal on Computing*, **18**, No. 2 (1989).

19. **Dagdelen K., and Johnson T. B.** Optimum open pit mine production Scheduling by Lagrangian parametrization, in: APCOM'86 Computer Applications in the Mineral Industries (1986).
20. **Tachefine B., and Soumis F.** Maximal closure on a graph with resource constraints, *Computers and Operations Research*, **24**, No. 10 (1997).
21. **Ramazan S., and Dagdelen K.** A new pushback design algorithm in open pit mining, *Proceedings, 17th Int. Symposium on Mine Planning and Equipment Selection, Calgary, Canada* (1998).
22. **Stone P., Froyland G., Menabde M., Law B., Pasyar R., and Monkhouse P.** Blaser-blended iron ore mine planning optimization at Yandi. *Orebody Modelling and Strategic Mine Planning: Uncertainty and Risk Management Models*, The Australian Institute of Mining and Metallurgy, Spectrum Series **14**, 2nd Edition (2007).
23. **Boland N., Dumitrescu I., Froyland G., and Gleixner A. M.** LP-based disaggregation approaches to solving the open pit mining production scheduling problem with block processing selectivity, *Computers and Operations Research*, **36**, No. 4 (2009).
24. **Rossi M.** Improving the estimates of recoverable reserves, *Mining Engineering*, January (1999).
25. **Akaike A.** Strategic planning of long term production schedule using 4D network relaxation method, PhD Disertation Colorado School of Mines, Eastwood, Co (1999).
26. **Ramazan S.** The new fundamental tree algorithm for production scheduling of open pit mines, *European Journal of Operational Research*, **177**, No. 2 (2007).
27. **Crama Y., and Mazzola J. B.** Valid inequalities and facets for a hypergraph model of the nonlinear knapsack and FMS part-selection problems, *Annals of Operations Research*, **58** (1995).
28. **Bley A., Boland N., Fricke C., and Froyland G.** A strengthened formulation and cutting planes for the open pit mine production scheduling problem, *Computers and Operations Research*, **37**, No. 9 (2010).
29. **Vazirani V. V.** Primal-dual schema based approximation algorithms, *Theoretic aspects of computer science: advanced lectures* (2002).
30. **Tolwinski B., and Underwood R.** A scheduling algorithm for open pit mines, *IMA Journal of Mathematics Applied in Business & Industry* **7**:247-270.
31. **Bienstock D., and Zuckerberg M.** Solving LP relaxations of large-scale precedence constrained problems. *Integer Programming and Combinatorial Optimization, Lecture Notes in Computer Science*, **6080** (2010).
32. **Caccetta L., and Hill S. P.** An application of branch and cut to open pit mine scheduling, *Journal of Global Optimization* **27**, No. 2–3 (2003).
33. **Chicoisne R., Espinoza D., Goycoolea M., Moreno E., and Rubio E.** A new algorithm for the open-pit mine production scheduling problem, *Operations Research* **60** (2012).
34. **Cullenbine C., Wood R., and Newman A.** A sliding time window heuristic for open pit mine block sequencing, *Optimization Letters*, **5** (2011).
35. **Ferland J. A., Amaya J., and Djuimo M. S.** Application of a particle swarm algorithm to the capacitated open pit mining problem, in: *Autonomous Robots and Agents*, Mukhopadhyay S. and Sen Gupta G. Eds., Springer-Verlag (2007).
36. **Lamghari A., and Dimitrakopoulos R.** A diversified Tabu search approach for the open-pit mine production scheduling problem with metal uncertainty, *European Journal of Operational Research*, **222** (2012).
37. **Lamghari A., Dimitrakopoulos R., and Ferland J. A.** A variable neighborhood descent algorithm for the open-pit mine production scheduling problem with metal uncertainty, *Journal of the Operational Research Society*, doi:10.1057/jors.2013.81 (2013).
38. **Ramazan S., and Dimitrakopoulos R.** Recent applications of operations research in open pit mining, *Transactions of the Society for Mining, Metallurgy and Exploration* **316** (2004).
39. **Dantzig A., and Wolfe P.** The decomposition principle for linear programs, *Operations Research* **8** (1960).
40. **Peattie R., and Dimitrakopoulos R.** Forecasting recoverable ore reserves and their uncertainty at Morila Gold Deposit, Mali: An efficient simulation approach and future grade control drilling, *Mathematical Geosciences*, **45**, No. 8 (2013).

41. **Strebelle S., and Cavelius C.** Solving speed and memory issues in multiple-point statistics simulation program SNESIM, *Mathematical Geosciences*, **46**, No. 2 (2014).
42. **Kolbjørnsen O., Stien M., Kjøsberg H., Fjellvoll B., and Abrahamsen P.** Using multiple grids in markov mesh facies modeling, *Mathematical Geosciences*, **46**, No. 2 (2014).
43. **Dimitrakopoulos R.** Stochastic optimization for strategic mine planning: a decade of developments, *Journal of Mining Science*, **47** (2011).
44. **Ramazan S., and Dimitrakopoulos R.** Production scheduling with uncertain supply: a new solution to the open pit mining problem, *Optimization and Engineering*, DOI 10.1007/s11081-012-9186-2 (2012).
45. **Birge J. R., and Louveaux F.** Introduction to stochastic programming, Springer-Verlag, New York, (1997).
46. **Dimitrakopoulos R., and Jewbali A.** Joint stochastic optimization of short- and long-term mine production planning: Method and application in a large operating gold mine, *IMM Transactions, Mining Technology*, **122**, No. 2 (2013).
47. **Albor F., and Dimitrakopoulos R.** Algorithmic approach to pushback design based on stochastic programming: method, application and comparissons, *IMM Transactions, Mining Technology*, **119** (2010).
48. **Goodfellow R., and Dimitrakopoulos R.** Algorithmic integration of geological uncertainty in pushback designs for complex multiprocess open pit mines, *IMM Transactions, Mining Technology*, **122** (2013).
49. **Montiel L., and Dimitrakopoulos R.** Stochastic mine production scheduling with multiple processes: Application at Escondida Norte, Chile, *Journal of Mining Science*, **49**, No. 4 (2013).
50. **Boland N., Dumitrescu I., and Froyland G.** A multistage stochastic programming approach to open pit mine production scheduling with uncertain geology, *Optimization Online*, last accessed: February 16, 2014. URL http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2008/10/2123.pdf (2008).
51. **Asad M. W. A., and Dimitrakopoulos R.** Implementing a parametric maximum flow algorithm for optimal open pit mine design under uncertain supply and demand, *Journal of the Operational Research Society*, DOI:10.1057/jors.2012.26 (2012).
52. **Whittle G.** Global asset optimization, *Orebody Modelling and Strategic Mine Planning: Uncertainty and Risk Management Models*, The Australian Institute of Mining and Metallurgy, Spectrum Series 14, 2nd Edition (2007).
53. **De Lara M., and Doyen L.** Sustainable Management of Natural Resources — Mathematical Models and Methods, Springer, Berlin (2008).

Поступила в редакцию 10/II 2014