

УДК 66.067.5

## О СХОДЯЩЕМСЯ ЛАМИНАРНОМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМСЯ ДИСКАМИ

Е. В. Семенов

Московский государственный университет пищевых производств, 125080 Москва

На основе итеративного метода решения системы уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости исследовано стационарное течение от периферии к центру в полости между двумя соосными близкорасположенными вращающимися дисками. Обосновано существование и единственность полученного приближенного решения.

Спецификой геометрической структуры полостей между двумя вращающимися дисками или конусами в различных роторных машинах (сепараторах, центрифугах, напорных дисках) является сравнительно небольшое (до 0,01) отношение высоты канала к радиусу полости. При исследовании течения в междисковом канале в рамках допущений пограничного слоя данное обстоятельство позволяет упростить исходную систему уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости, подобно тому как это делается для потока в щелевом канале.

Анализ особенностей сходящихся течений жидкости между двумя вращающимися близкорасположенными дисками и конусами проведен в работах [1–5], где в качестве метода количественного анализа уравнений движения используется тот или иной алгоритм, проводятся детальные расчеты полей скоростей и давления, оценивается сходимость найденных решений. Однако вопросы корректности полученных приближенных решений в этих исследованиях не затрагиваются.

Особенности течения жидкости между двумя дисками радиусом  $r_0$ , вращающимися с одинаковыми или разными угловыми скоростями, удобно анализировать, используя цилиндрическую систему координат  $(r, \theta, z)$ , жестко связанную с одним из дисков. Для определенности, не нарушая общности постановки задачи, считаем, что диски вместе с жидкостью внезапно приведены во вращение с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , причем жидкость подается в узкий зазор между дисками на расстоянии  $r_0$  по всей окружности, а затем выбрасывается через круглое отверстие (сток) на расстоянии  $r_1 < r_0$  (рис. 1).

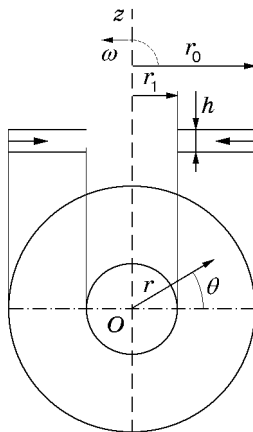


Рис. 1. Схема движения жидкости между двумя вращающимися дисками

Пусть  $u, v, w$  — радиальная, относительная окружная и поперечная составляющие скорости жидкости,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости. Поместив начало координат на оси вращения посередине между дисками, в качестве граничных можно принять условия прилипания жидкости к стенкам канала

$$u = v = w = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h/2, \quad r_1 < r < r_0, \quad (1)$$

где  $h$  — расстояние между дисками. Поскольку жидкость подается в полость между дисками с периферии под давлением, превышающим давление стока, принимаем дополнительное граничное условие

$$p(r_1, z) = \omega^2 r_1^2 / 2. \quad (2)$$

Произведя сравнительную оценку вязких слагаемых в уравнениях Навье — Стокса, для рассматриваемого потока в выбранной системе координат приближенно получим систему уравнений

$$\frac{\nu \partial^2 u}{\partial z^2} = U + \frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad (3)$$

$$\frac{\nu \partial^2 v}{\partial z^2} = V; \quad (4)$$

$$\frac{\nu \partial^2 w}{\partial z^2} = W + \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{r \partial w}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

Здесь

$$U = \frac{u \partial u}{\partial r} + \frac{w \partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} - 2\omega v, \quad V = \frac{u \partial(rv)}{\partial r} + \frac{w \partial v}{\partial z} + 2\omega u, \quad (7)$$

$$W = \frac{u \partial w}{\partial r} + \frac{w \partial w}{\partial z}, \quad \Phi = \frac{p}{\rho} - \frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

В силу симметрии поля скоростей относительно плоскости  $z = 0$  вместо граничных условий (1) выбираем

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0; \quad (8)$$

$$u = v = w = 0 \quad \text{при} \quad z = h/2. \quad (9)$$

Кроме того, если  $l$  — характерный продольный размер диска (например,  $l = r_0$ ), то согласно (6) поперечная составляющая скорости потока  $w = O(uh/l)$ . Тогда, сопоставляя уравнения (3), (5), заключаем, что если  $h/l \ll 1$ , то  $(\partial \Phi / \partial z) / (\partial \Phi / \partial r) \ll 1$ , и поэтому приближенно для динамического давления  $\Phi = \Phi(r)$ . Данное обстоятельство в дальнейшем эффективно используется при обосновании итеративной процедуры асимптотического решения системы уравнений (3)–(6), согласующегося с (2), (8), (9).

Перейдем к безразмерным величинам:

$$r = lr', \quad z = lx, \quad u = V_* u', \quad v = V_* v', \quad w = V_* w',$$

$$\Phi = V_*^2 \Phi', \quad l = (\nu / \omega)^{1/2}, \quad V_* = (\nu \omega)^{1/2}.$$

Опуская штрихи, уравнения (3), (4) перепишем в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = U + \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = V. \quad (10)$$

Граничные условия (8), (9) также можно записать в безразмерном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (11)$$

$$u = v = w = 0 \quad \text{при} \quad x = \mu, \quad \mu = h(\omega/\nu)^{1/2}/2,$$

где  $\mu$  — число Экмана. Кроме того, должны быть выполнены условия

$$r \int_0^\mu u(r, x) dx = -q_1, \quad \Phi(r_1, x) = 0, \quad (12)$$

где  $q_1 = QV_*^{-1}l^{-2}/(4\pi)$ ;  $Q$  — расход жидкости.

Для построения итеративного алгоритма решения задачи проинтегрируем дважды по  $x$  уравнения (10) с учетом (11), (12):

$$u(r, x) = - \int_x^\mu \int_0^x U dx_1 dx + u^0, \quad v(r, x) = - \int_x^\mu \int_0^x V dx_1 dx, \quad (13)$$

где  $u^0 = 0,5\Phi'(x^2 - \mu^2)$ .

Согласно (12), (13) динамическое давление определяется как решение интегрального уравнения

$$\int_0^\mu \int_x^\mu \int_0^x [U + \Phi'(r)] dx_2 dx_1 dx = -q_1/r,$$

откуда

$$\Phi'(r) = \frac{3}{\mu^3} \left( \frac{q_1}{r} - \int_0^\mu \int_x^\mu \int_0^x U dx_2 dx_1 dx \right). \quad (14)$$

Поперечную скорость  $w$  определим из уравнения неразрывности (6):

$$w = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^x ur dx,$$

причем согласно (12) граничные условия (11) для  $w$  выполняются.

Так как при данной постановке задачи поле скоростей и давление, а также граничные условия для составляющих скоростей и давления на входе в зазор находятся из уравнений (13), (14), то ее решение имеет асимптотический характер.

Согласно методу итераций и формулам (13), (14) по  $n$ -му и  $(n + 1)$ -му приближениям будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi'_n(r) &= \frac{3}{\mu^3} \left( \frac{q_1}{r} - \int_0^\mu \int_x^\mu \int_0^x U_n dx_2 dx_1 dx \right), & u_{n+1} &= u_n^0 - \int_x^\mu \int_0^x U_n dx_1 dx, \\ v_{n+1} &= - \int_x^\mu \int_0^x V_n dx_1 dx, & w_n &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^x u_n r dx, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $U_n = u_n \partial u_n / \partial r + w_n \partial u_n / \partial x - v_n^2 - 2v_n$ ;  $V_n = u_n \partial v_n / \partial r + u_n v_n / r + w_n \partial v_n / \partial x + 2u_n$ ;  $u_n^0 = \Phi'_n(x^2 - \mu^2)/2$ ;  $U_0 = V_0 = 0$ ;  $n = 0, 1, \dots$

Если в нулевом приближении предположить, что ламинарный поток движется как квазитвердое тело, то согласно (15) получим

$$\Phi'_0 = 3q_1/(\mu^3 r). \quad (16)$$

В соответствии с (15), (16) в первом приближении

$$\Phi'_1 = (3/\mu^3)[q_1/r + 6q_1^2/(35r^3)], \quad u_1 = u^0, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = 0,$$

во втором приближении

$$u_2 = [3q_1/(2\mu^3 r)](x^2 - \mu^2), \quad v_2 = [-q_1/(4\mu^3 r)](x^2 - \mu^2)(5\mu^2 - x^2), \quad w_2 = 0,$$

т. е. согласно принятой схеме отличные от нулевых значения окружной и поперечной скоростей потока определяются начиная со второго и третьего этапов итераций соответственно.

Таким образом, с точностью до знака приходим к расчетным формулам для расходящегося течения жидкости, полученным методом разложения решения в виде рядов по обратным степеням  $r$  для расходящегося ламинарного (небольшие значения  $\mu$  и  $q_1$ ) потока [6]. Подставляя найденные значения  $u$ ,  $v$  в правые части соотношений (15), находим третье приближение, которое из-за громоздкости не приводится. В общем виде структура расчетных формул кинематики течения в  $n$ -м приближении ( $n$ -х частичных сумм) имеет вид

$$u_n(r, x) = \sum_{k=1}^n \frac{q^k u_{nk}(x)}{r^{2k-1}}, \quad v_n(r, x) = \sum_{k=1}^n \frac{q^k v_{nk}(x)}{r^{2k-1}}, \quad w = 2 \sum_{k=1}^n (k-1) q^k \int_0^x \frac{u_{nk}}{r^{2k}} dx, \quad (17)$$

т. е. частичные суммы представляют собой параметрические по  $r$  и степенные по  $x$  функциональные ряды. Нахождение в явном виде итераций четвертого и более высоких порядков представляет собой довольно сложную задачу. Однако с помощью современных языков символьного программирования как результат явного кратного интегрирования могут быть найдены полиномиальные по  $x$  приближения высокого порядка, что позволяет оценить как сходимость, так и быстроту сходимости полученного итеративного решения.

Результаты расчетов для продольной составляющей скорости потока по трем приближениям с точностью до знака качественно и количественно согласуются с соответствующими данными для расходящегося режима течения (рис. 2).

При исследовании сходимости итеративной расчетной процедуры ограничимся рассмотрением случая квазикругового небыстрого режима течения, т. е. будем предполагать, что параметры  $\mu$  и  $q_1$  невелики. С учетом того, что нелинейные слагаемые в выражениях (7) для  $U$ ,  $V$ ,  $W$  — величины одного порядка малости, для упрощения обоснования сходимости итераций сохраним в (7) лишь те конвективные члены, которые содержат произведения скоростей. Тогда приближенно получим

$$u_{n+1} = - \int_x^\mu \int_0^x U_n dx_1 dx + \frac{3(\mu^2 - x^2)}{2\mu^3} \int_0^\mu \int_x^\mu \int_0^x U_n dx_2 dx_1 dx + u^0, \quad (18)$$

$$v_{n+1} = - \int_x^\mu \int_0^x V_n dx_1 dx,$$

где  $U_n = -2v_n - v_n^2/r$ ;  $V_n = 2u_n + u_n v_n/r$ ;  $u^0 = q(x^2 - \mu^2)/r$ ;  $q = 1,5q_1/\mu^3$  — число Россби.

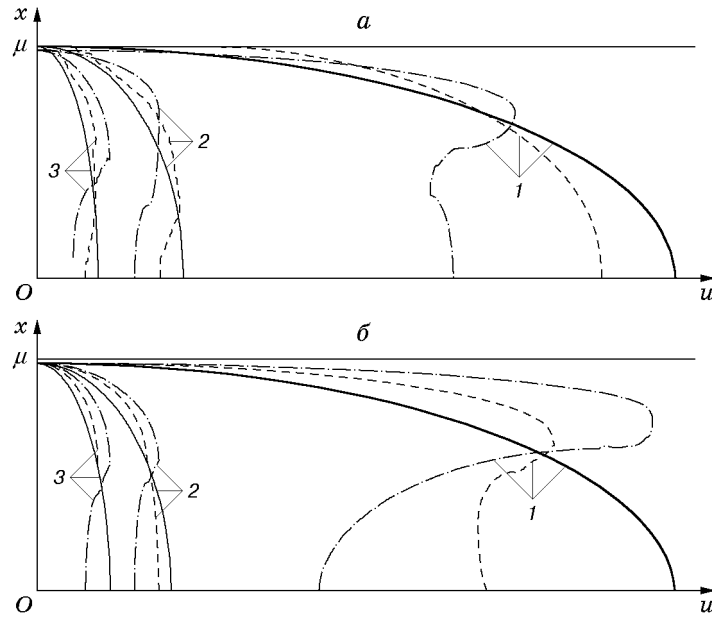


Рис. 2. Профили продольной составляющей скорости потока при  $r'_0 = r_0/h = 100$ :  
 1 —  $r = 0,1r'_0$ ,  $\mu = 1,12$ ; 2 —  $r = 0,5r'_0$ ,  $\mu = 1,58$ ; 3 —  $r = 0,9r'_0$ ,  $\mu = 1,69$ ; сплошные линии:  
 а —  $q = 7,04$ ; б —  $q = 35,12$ ; штриховые: а —  $q = 9,96$ ; б —  $q = 49,80$ ; штрихпунктирные:  
 а —  $q = 12,18$ ; б —  $q = 60,92$

В отличие от работы [7], в которой исследуется стационарный расходящийся режим течения жидкости между двумя бесконечными дисками, в расчетной схеме (18) для поля скоростей потока учитывается не только центростремительное ускорение  $v^2/r$ , но и поворотное ускорение  $uv/r$ .

В дальнейшем при построении мажоранты для частичных сумм (17) будем учитывать, что для медленного режима течения (небольших значений чисел Экмана и Россби) согласно (3), (4) максимальные по модулю значения продольной и окружной составляющих скорости жидкости достигаются в середине щели ( $x = 0$ ). При этом в силу (18) имеем

$$u_{n+1} = - \int_0^\mu \int_0^x U_n dx_1 dx - \frac{1,5}{\mu} \int_0^\mu \int_x^\mu \int_0^x U_n dx_2 dx_1 dx - \frac{q\mu^2}{r}, \quad v_{n+1} = - \int_0^\mu \int_0^x V_n dx_1 dx. \quad (19)$$

Здесь и далее в выражениях для  $U_n$ ,  $V_n$  полагаем  $u_n = u_n(0)$ ,  $v_n = v_n(0)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . При этом вследствие (18), (19) справедливы неравенства

$$|u_{n+1}| \leq \mu^2 [2,5(2|v_n| + v_n^2/r) + q/r], \quad |v_{n+1}| \leq \mu^2 (2|u_n| + |u_n v_n|/r).$$

Опуская знаки модуля и усиливая неравенства, получим

$$u_{n+1} < 5\mu^2 (v_n + v_n^2/r + q/r), \quad v_{n+1} < 2\mu^2 (u_n + u_n v_n/r).$$

При дальнейшем усилении неравенства примут вид

$$u_{n+1} < \eta (q/r + v_n + v_n^2/r), \quad v_{n+1} < \eta (u_n + u_n v_n/r), \quad \eta = 5\mu^2. \quad (20)$$

Отсюда, полагая  $v_0 = 0$ ,  $u_0 < \eta q/r$ , для  $n \geq 0$  будем иметь

$$u_1 < \eta q/r, \quad v_1 < \eta q^2/r, \quad u_2 < (\eta q/r)(1 + \eta^2 + \eta q^4/r^2), \quad v_2 < (\eta q^2/r)(1 + \eta q^2/r^2), \\ u_3 < (\eta q/r)[1 + \eta^2 + \eta q^2(1 + 2\eta^2)/r^2 + q^2 \eta^4(1 + 2\eta^2)/r^4 + q^3 \eta^8/r^6],$$

$$\begin{aligned}
v_3 &< (q\eta^2/r)[1 + \eta^2 + q\eta^2(1 + 2\eta^2)/r^2 + q^2\eta^4(1 + 2\eta^2)/r^4 + q^3\eta^8/r^6], \\
u_4 &< (q\eta/r)[\eta(1 + \eta^2) + q\eta^3(2 + 4\eta^2 + \eta^4)/r^2 + q^2\eta^5(1 + 2\eta^2)(3 + 2\eta^2)/r^4 + \\
&+ q^3\eta^7(3 + 10\eta^2 + 8\eta^4)/r^6 + 2q^4\eta^9(1 + 5\eta^2 + 5\eta^4)/r^8 + \\
&+ q^5\eta^{11}(1 + 2\eta^2)(1 + 4\eta^2)/r^{10} + 2q^6\eta^{15}(1 + 2\eta^2)/r^{12} + q^7\eta^{19}/r^{14}], \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{21}$$

и т. д.

В принятых допущениях можно считать, что  $q\eta^2/r^2 < 1$ ,  $\eta < 1$ .

Как следует из формул (20) и анализа структуры коэффициентов в правых частях (21), множители  $a_k(\eta)$ ,  $a_{k+1}(\eta)$  при  $(q\eta^2/r^2)^k$ ,  $(q\eta^2/r^2)^{k+1}$  не зависят явно от индекса  $k$  и являются величинами одного порядка, причем эти коэффициенты сначала монотонно растут, достигая наибольшего значения  $a_m$  ( $m \approx 2^{n-1}$ ,  $n$  — порядок итерации), а затем убывают. Очевидно, что  $r^2/(q\eta^2)$  может быть выбрано настолько большим, что  $r^2/(q\eta^2) > \lim(a_{k+1}/a_k)$  при  $r \rightarrow \infty$ ,  $k \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Отсюда следует сходимость при  $n \rightarrow \infty$  последовательностей  $u_n(0)$ ,  $v_n(0)$ , а значит, и равномерная сходимость частичных сумм  $u_n(x)$ ,  $v_n(x)$  для  $x \in [0, \mu]$  к непрерывному решению поставленной краевой задачи в области значений параметров  $q\eta^2/r^2 < 1$  и  $\eta < 1$ , где  $q = 6Q/(\pi\omega h^3)$ ,  $\eta = 5\mu^2$ .

Таким образом, в рамках постановки задачи достаточным условием сходимости ее решения являются общее по области течения значение критерия Экмана  $\eta < 1$  и значение критерия Россби  $q < (r/\eta)^2$  в каждой точке потока.

Поскольку из доказательства сходимости итеративной процедуры следует обоснование (при фиксированных значениях параметров  $q$ ,  $\eta$ ,  $r$ ) норм  $\|u\|$  и  $\|v\|$  в метрическом пространстве  $C[0, \mu]$  непрерывных функций на отрезке  $[0, \mu]$ , определяемых в виде [8]

$$\|u\| = \max |u(x)|, \quad \|v\| = \max |v(x)|, \quad x \in [0, \mu],$$

то полученное итеративное решение сходится по норме в пространстве  $C[0, \mu]$ . При обоснованной равномерной сходимости разложения решения задачи, например для  $u(r, x)$ , отсюда следует и единственность этого решения. Пусть  $u_0 = u_*^0$ ,  $v_0 = v_*^0$  — начальное распределение скоростей потока ( $u_*^0$ ,  $v_*^0$  — функции, обладающие теми же свойствами, что и  $u^0$ ). В силу (13), (15)

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= - \int_x^\mu \int_0^x U_n(u^0, u_*^0, v_*^0) dx_1 dx + \int_0^\mu \int_x^\mu \int_0^x U_n(u^0, u_*^0, v_*^0) dx_2 dx_1 dx + u^0, \\
v_{n+1} &= - \int_x^\mu \int_0^x V_n(u^0, u_*^0, v_*^0) dx_1 dx, \quad n \geq 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

Тогда в допущении, что  $u^0$ ,  $u_*^0$ ,  $v_*^0$  принадлежат пространству  $C[0, \mu]$ , аналогично (21) в области тех же значений параметров течения, что и ранее, можно построить мажоранты для  $u$ ,  $v$  в случае, когда профили скоростей потока на входе в канал имеют вид  $u_0 = u_*^0$ ,  $v_0 = v_*^0$ . Поскольку  $u$  и  $v$  — равномерно сходящиеся ряды, то для продольной составляющей скорости течения можно записать

$$u_{n+1} = \sigma'_n + \sigma''_n, \tag{23}$$

где  $\sigma'_n$  зависит только от  $u^0$ , а  $\sigma''_n$  — от  $u^0$  и  $u_*^0$ ,  $v_*^0$  или только от  $u_*^0$ ,  $v_*^0$ .

Итак, пусть последовательность частичных сумм  $u_1, u_2, \dots$ , определенных в некоторой области  $S(r, x)$ , равномерно сходится на множестве  $S$ . Согласно признаку Коши равномерной сходимости последовательности это означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует

такой номер  $\nu$ , не зависящий от  $(r, x)$ , что из  $k > \nu, l > \nu$  для всех  $(r, x) \in S$  следует  $|u_k(r, x) - u_l(r, x)| < \varepsilon$  [8]. При этом, поскольку номер  $n$  частичной суммы (порядок приближения (17)) всегда может быть выбран настолько большим, чтобы было  $n > \nu, k, l$  (тогда  $|u_k - u_l|$  в силу (23) зависело бы лишь от  $u^0$ ), то получающееся в результате перехода к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в (22) решение задачи единственно.

В заключение отметим, что результаты теоретического анализа течения жидкости в узком зазоре между двумя вращающимися с одинаковой скоростью дисками при периферийной подаче жидкости сравнивались Р. Адамсом, В. Райсом и другими авторами (см., например, [1, 2, 4]) с опытными данными, для чего вдоль потока между дисками измерялось давление. В рассматриваемой области изменений параметров течения получено удовлетворительное согласие экспериментальных и теоретических результатов, что свидетельствует о корректности выбранной модели в исследуемом диапазоне параметров потока.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Rice W.** An analytical and experimental investigation of multiple disk pumps and compressors // Trans. ASME. Ser. A. 1963. N 3. P. 191–200.
2. **Kohler M.** Die Stromung durch des Spaltelement einer Reibungspumpe // Stromungsmechanik und Stromungsmaschinen. 1971. N 4. S. 24, 25.
3. **Мисюра В. И.** Ламинарное течение несжимаемой жидкости между двумя вращающимися дисками // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1972. № 5. С. 178–183.
4. **Патер Л., Краутер Е., Райс В.** Определение режима течения между совместно вращающимися дисками // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Сер. Е. 1974. № 37. С. 122–128.
5. **Семенов Е. В.** О сходящемся потоке в полости между двумя вращающимися конусами // Теорет. основы хим. технологии. 1975. № 2. С. 228–233.
6. **Семенов Е. В.** К обоснованию асимптотического решения для ламинарного течения жидкости между двумя вращающимися дисками // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 3. С. 55–63.
7. **Белоносов С. М., Черноус К. А.** Краевые задачи для уравнений Навье — Стокса. М.: Наука, 1985.
8. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
9. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1968.

*Поступила в редакцию 6/II 1998 г.,  
в окончательном варианте — 17/V 1999 г.*