

УДК 519.683.2

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

И. М. Пешков

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: peshkov@math.nsc.ru

Рассмотрена математическая модель нелинейной упругой среды. Проводится численное исследование разрывных решений представленной модели в одномерном случае.

Ключевые слова: нелинейная теория упругости, разрывное решение, численное решение, схема Годунова.

Введение. В работе [1] показано, что гладкие решения уравнений нелинейной теории упругости изотропной среды описываются квазилинейной симметрической гиперболической системой. На этих решениях выполняются термодинамические соотношения.

Поскольку для разрывных (обобщенных) решений теория разработана только в линейном случае, возникает вопрос: можно ли использовать указанные нелинейные уравнения и законы сохранения (которые на гладких решениях совместны) для изучения решений с разрывами (ударных волн), аналогично тому как это было сделано в 50-х гг. XX в. в газовой динамике?

В данной работе проводятся пробные численные расчеты динамики разрывных решений уравнений, построенных в [1] для моделирования сплошных сред, подвергнутых большим деформациям (например, взрывные деформации металлов).

1. Постановка задачи. Движение среды будем описывать с помощью поля скоростей ее частиц, т. е. будем считать, что для каждой частицы, находящейся в момент времени t в пространственной точке с декартовыми координатами x_1, x_2, x_3 , задан вектор скорости с компонентами

$$u_1 = u_1(t, x_1, x_2, x_3), \quad u_2 = u_2(t, x_1, x_2, x_3), \quad u_3 = u_3(t, x_1, x_2, x_3).$$

Деформацию среды можно описывать тензором градиентов деформаций $C = [c_{ij}]$, $i, j = 1, 2, 3$, где $c_{ij} = \partial x_i / \partial \xi_j$; x_i — эйлеровы координаты; ξ_j — лагранжевы координаты, параметризующие начальное положение среды. В механике сплошной среды имеет смысл рассматривать отображения C с положительным определителем, поэтому далее предполагается, что $\det C > 0$.

Плотность внутренней энергии единицы массы обозначим через E . В теории упругости внутренняя энергия является функцией величин c_{ij} , начальной плотности среды ρ_0 и энтропии S . В данной работе зависимость $E(\rho_0)$ не рассматривается, поэтому считаем, что

$$E = E(c_{11}, c_{21}, \dots, c_{33}, S).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ-4292.2008.1) и в рамках заказного междисциплинарного проекта Президиума СО РАН № 40.

При построении теории упругости наряду с плотностью внутренней энергии E вводится функция $\Phi = \rho_0 E$, называемая упругим потенциалом и представляющая собой внутреннюю энергию единицы начального объема. Зависимость $\Phi(c_{11}, c_{21}, \dots, c_{33}, S)$ будем использовать в качестве уравнения состояния.

Уравнение состояния задает свойства конкретной среды и при решении задач считается известным. Однако, поскольку внутренняя энергия не должна зависеть от поворотов среды как целого, будем считать, что функция Φ зависит от трех ортогональных инвариантов тензора C , а именно: будем использовать модельное уравнение состояния, предложенное в [1]:

$$\Phi = \rho_0 \left(\frac{c_0^2 e^{(\gamma-1)S}}{\gamma(\gamma-1)} \left(W^{-(\gamma-1)} + (\gamma-1) \left(\frac{K}{3} \right)^3 \right) + c_1^2 D \right), \quad \gamma > 1, \quad \beta \geq 1. \quad (1)$$

Здесь W, K, D — инварианты матрицы C :

$$W = \det C = \det \sqrt{CC^*}, \quad K = \text{tr} \sqrt{CC^*}, \\ D = \text{tr} \left((\sqrt{CC^*} - \text{tr} \sqrt{CC^*} I/3)^2 \right) = \text{tr}(CC^*) - (\text{tr} \sqrt{CC^*})^2/3.$$

Следует отметить, что в линейной теории упругости рассматривается зависимость уравнения состояния только от двух инвариантов K и D [2], которые соответственно описывают всестороннее сжатие и чистый сдвиг. В нелинейной теории упругости необходимо рассматривать зависимость уравнения состояния от всех трех инвариантов тензора C . Заметим, что при малых деформациях инварианты W и K интерполируются одними и теми же формулами, т. е. совпадают. Инвариант W также имеет физический смысл: W есть объем вещества, который до деформации был равен единице и связан с обычно используемым удельным объемом V равенством $W = \rho_0 V$.

Приведем основные свойства функции Φ в представленной интерполяционной формуле (1). Функция $\Phi = \rho_0 E$ является выпуклой функцией переменных $c_{11}, c_{21}, \dots, c_{33}, S$ (но не строго выпуклой по переменным c_{ij}) и достигает минимального значения по переменным $c_{11}, c_{21}, \dots, c_{33}$ в отсутствие деформаций, т. е. при $CC^* = I$ (I — единичная (3×3) -матрица). При небольших нагрузках уравнение (1) переходит в уравнение состояния классической линейной теории упругости

$$\Phi = E_0 + \lambda \varepsilon_{kk}^2/2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji} + \rho_0 T_0 (S - S_0) = \lambda (\text{tr} \varepsilon)^2/2 + \mu \text{tr} \varepsilon^2 + \rho_0 T_0 (S - S_0) + \dots,$$

где $\varepsilon = [\varepsilon_{ij}] = \sqrt{CC^*} - I$ — тензор малых деформаций Коши; λ, μ — постоянные Ламе (модуль Юнга и модуль сдвига):

$$\lambda = \rho_0 \left(c_0^2 e^{(\gamma-1)S} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{\beta-1}{3\gamma} \right) - \frac{2c_1^2}{3} \right), \quad \mu = \rho_0 \left(c_1^2 + \frac{c_0^2 e^{(\gamma-1)S}}{2\gamma} \right).$$

При этом модуль всестороннего сжатия выражается формулой

$$\varkappa = \frac{c_0^2 e^{(\gamma-1)S}}{\gamma} \left(\gamma - 1 + \frac{\beta}{3} \right).$$

При больших сжатиях ($W \ll 1$) уравнение (1) переходит в уравнение состояния в газовой динамике

$$\Phi = \frac{c_0^2 e^{(\gamma-1)S}}{\gamma(\gamma-1)} W^{-(\gamma-1)} + \dots$$

В приведенных выше формулах многоточием обозначены слагаемые, которыми при принятых предположениях можно пренебречь.

Перейдем непосредственно к формулировке модели нелинейной упругой среды. В переменных тензора градиентов деформации c_{ij} , скоростей u_i и энтропии S система уравнений теории упругости записывается в следующем виде [3]:

$$\rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_{c_{ij}}}{\partial \xi_j} = 0, \quad \frac{\partial c_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

В работе [1] показано, что гиперболичность (корректность задачи Коши для гладких начальных данных) системы уравнений (2) обуславливается выпуклостью внутренней энергии Φ по элементам тензора градиентов деформации c_{ij} . В частности, показано, что система законов сохранения (2) является симметрической гиперболической тогда и только тогда, когда Φ строго выпукла по переменным c_{ij} . Также показано, что критерием выпуклости функции $\Phi(c_{11}, \dots, c_{33})$, инвариантной относительно вращений, является выполнение неравенств

$$\frac{\Phi_{k_i} + \Phi_{k_j}}{k_i + k_j} > 0, \quad \frac{\Phi_{k_i} - \Phi_{k_j}}{k_i - k_j} > 0$$

и положительная определенность (3×3) -матрицы: $[\Phi_{k_i k_j}] > 0$ (k_i — сингулярные числа тензора C).

Напомним, что несимметричный тензор $[\Phi_{c_{ij}}] = [\pi_{ij}]$ называется тензором напряжений Пиолы — Кирхгофа, а величины Φ_{k_i} являются его главными значениями и в отсутствие деформации ($k_1 = k_2 = k_3 = 1$) равны нулю: $\Phi_{k_i} = 0$. Таким образом, одно из условий строгой выпуклости энергии Φ нарушается, поскольку $(\Phi_{k_i} + \Phi_{k_j})/(k_i + k_j) = 0$.

В работе [1] также предложен подход, используя который можно избежать указанных трудностей. Наряду с переменными c_{ij} введем дополнительную переменную W и будем считать их независимыми:

$$\Phi(c_{11}, c_{21}, \dots, c_{33}, S) = \tilde{\Phi}(W, K(c_{11}, c_{21}, \dots, c_{33}), D(c_{11}, c_{21}, \dots, c_{33}), S).$$

При этом, для того чтобы система уравнений (2) являлась гиперболической, необходимо потребовать, чтобы функция $\tilde{\Phi}$ была выпуклой по переменным W, c_{ij}, S . Такая модификация предложена С. К. Годуновым и подробно описана в [1]. Далее знак “ \sim ” в обозначении $\tilde{\Phi}$ опускается и через Φ обозначается функция переменных W, c_{ij}, S в правой части последнего равенства.

С учетом изменений, внесенных в постановку задачи, система уравнений теории упругости в лагранжевых координатах для неизвестных u_i, W, S, c_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_0 u_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \xi_j} (W a_{ji} \Phi_W + \Phi_{c_{ij}}) &= 0, & \frac{\partial W}{\partial t} - W a_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} &= 0, \\ \frac{\partial c_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} &= 0, & \frac{\partial S}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

К системе уравнений (3) необходимо добавить закон сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0 \frac{u_i u_i}{2} + \Phi \right) - \frac{\partial}{\partial \xi_j} (u_i \rho_0 (W a_{ji} \Phi_W + \Phi_{c_{ij}})) = 0.$$

Здесь a_{ji} — элементы обратной матрицы C^{-1} .

Следует отметить, что вдоль траекторий выполняется равенство

$$\frac{d}{dt} (W^{-1} \det C) = 0, \quad (4)$$

если оно было выполнено в начальный момент времени. При вычислении производных $\Phi_{c_{ij}}$ необходимо также учесть независимость W от элементов матрицы C .

В первых трех уравнениях (закон сохранения импульса) системы (3) выражения в скобках являются компонентами π_{ij} тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа:

$$\pi_{ij} = W\Phi_{Wa_{ji}} + \Phi_{c_{ij}}.$$

Тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа связан с обычным тензором напряжений σ формулой Мурнагана [4], которая после изменений, внесенных в постановку задачи, принимает вид

$$\sigma_{ij} = W^{-1}c_{ik}\pi_{kj} = W^{-1}c_{ik}(W\Phi_{Wa_{kj}} + \Phi_{c_{kj}}). \quad (5)$$

Рассмотрим одномерную задачу теории упругости, когда все входящие в систему (3) функции u_i , W , c_{ij} , S зависят только от одной пространственной переменной и времени. В качестве такой пространственной переменной будем использовать ξ_1 (далее индекс опущен) и называть это направление продольным, два других направления будем называть поперечными.

В случае одномерного процесса из уравнений для c_{ij} системы (3) следует, что величины c_{ik} , $i = 1, 2, 3$, $k = 2, 3$ (второй и третий столбцы матрицы C) с течением времени не меняются, т. е. являются только функциями ξ . Эти величины не включаются в число неизвестных функций.

В данной работе рассматриваются только такие решения, для которых $W = \det C$ (остальные решения лишены физического смысла), поэтому, обозначив миноры Wa_{ji} матрицы C через A_{ji} , получим

$$A_{11} = c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}, \quad A_{12} = c_{32}c_{13} - c_{12}c_{33}, \quad A_{13} = c_{12}c_{23} - c_{22}c_{13}.$$

Следовательно, миноры A_{1i} , так же как величины в правых частях этих равенств, не зависят от времени t и являются функциями только переменной ξ .

Запишем уравнения для одномерной модели. Для краткости индекс j у величин c_{ij} и A_{ji} опустим, обозначив через c_i элементы первого столбца матрицы C , а через A_i элементы первой строки матрицы миноров $(\det C)C^{-1} = WC^{-1}$. Тогда с учетом сказанного выше одномерную систему уравнений теории упругости относительно вектора неизвестных $\mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3, W, c_1, c_2, c_3, S)$ можно записать следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \xi} (A_i \Phi_W + \Phi_{c_i}) &= 0, & \frac{\partial W}{\partial t} - A_i \frac{\partial u_i}{\partial \xi} &= 0, \\ \frac{\partial c_i}{\partial t} - \frac{\partial u_i}{\partial \xi} &= 0, & \frac{\partial S}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Следует отметить, что в предположении постоянства в некоторой области пространства миноров A_i как данная одномерная, так и трехмерная системы являются симметрическими t -гиперболическими системами, т. е. в указанной области система (3) может быть представлена в эквивалентном виде

$$A(\mathbf{p}) \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + B_j(\mathbf{p}) \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \xi_j} = 0,$$

где \mathbf{p} — вектор новых переменных, связанный с вектором прежних неизвестных \mathbf{v} некоторой системой нелинейных алгебраических уравнений; $A^* = A > 0$, $B_j^* = B_j$ — симметричные матрицы. При реализации разностной схемы будем предполагать постоянство миноров A_i (“замораживание” коэффициентов в пределах одной счетной ячейки).

2. Результаты численных экспериментов. Для построения численного решения используем конечно-объемную схему Годунова [5] в акустическом приближении решения задачи о распаде произвольного разрыва (задачи Римана). В схеме Годунова решение задачи Римана является основной процедурой. На этом этапе используется симметрическая гиперболическая форма записи уравнений, позволяющая применять эффективные современные алгоритмы линейной алгебры для симметричных матриц.

При проведении численных расчетов выбрано уравнение состояния (1) с параметрами $\gamma = 4$, $c_0 = 5,1$ км/с, $c_1 = 2,54$ км/с, $\rho_0 = 2,7$ г/см³, что соответствует материалу, моделирующему алюминий. Во всех примерах рассматривается область, представляющая собой пластину, бесконечную в поперечных направлениях (ξ_2 и ξ_3) и конечную в продольном направлении (толщина пластины 10 мм). Ниже приводятся результаты численного исследования разрывных решений рассматриваемой модели.

2.1. *Разрыв продольной компоненты скорости. Сходимость разностного решения.* На отрезке $\xi \in [0, 1]$ рассмотрим задачу о поршне, движущемся в продольном направлении слева направо с постоянной скоростью 2 км/с. Материал в точке $\xi = 1$ будем считать неподвижным. В этом случае краевые условия записываются следующим образом:

$$u_1(t, 0) = 2, \quad u_2(t, 0) = u_3(t, 0) = 0, \quad u_1(t, 1) = u_2(t, 1) = u_3(t, 1) = 0.$$

В качестве начальных данных принимаются следующие условия:

$$u_1(0, \xi) = u_2(0, \xi) = u_3(0, \xi) = 0, \quad C = I, \quad W = \det C.$$

Несогласованностью граничных и начальных условий на левой границе пластины ($\xi = 0$) задается разрыв продольной компоненты скорости u_1 .

На рис. 1 приведена зависимость продольной компоненты скорости u_1 от координаты ξ при различной длине шагов сетки. Расчеты показывают, что при измельчении шагов численное решение обладает свойством сходимости. На рис. 1 приведены решения с шагами h ; $h/2$; $h/4$; $h/8$; $h/16$, где $h = 0,02$. Предельным решением является “ступенька” — ударная волна. По окончании процессов установления начальный разрыв u_1 “размазывается” примерно на семи счетных ячейках, и его форма со временем не меняется. Из анализа кривых, представленных на рис. 1, следует сходимость численного решения к разрывному при измельчении шага сетки.

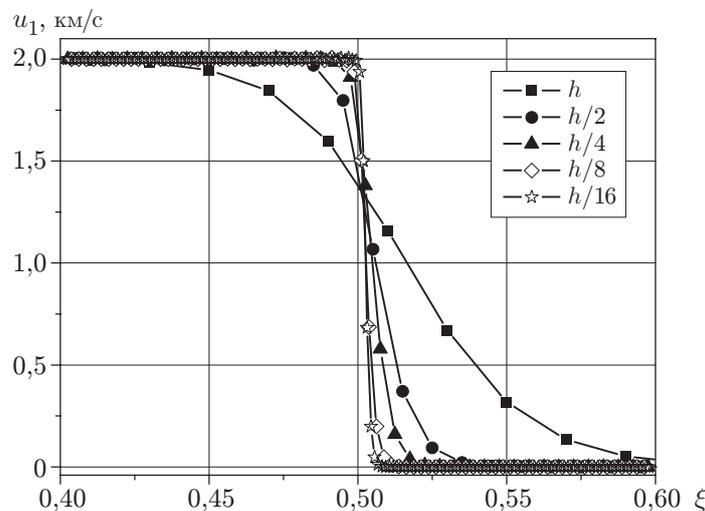


Рис. 1. Зависимость продольной компоненты скорости u_1 от продольной координаты ξ ($t = 0,6 \cdot 10^{-6}$ с)

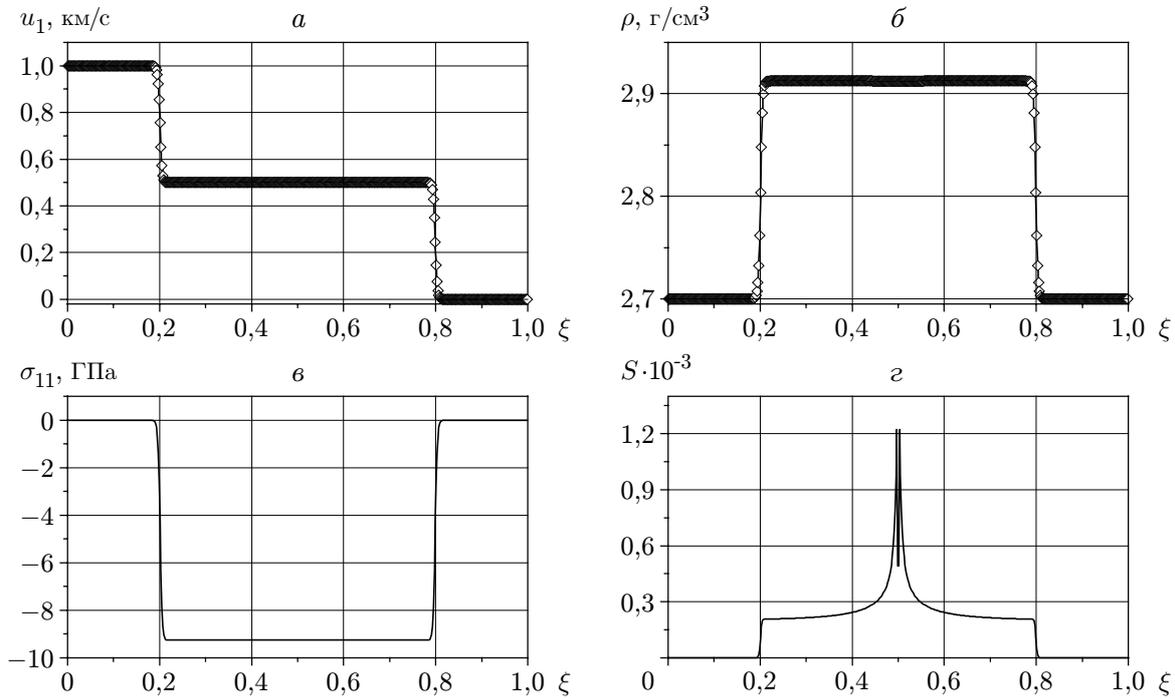


Рис. 2. Зависимости продольной компоненты скорости (а), плотности (б), продольного напряжения (в), энтропии (г) от продольной координаты в задаче о распаде разрыва (разрыв в точке $\xi = 0,5$ см) продольной компоненты скорости ($t = 0,15 \cdot 10^{-6}$ с)

2.2. *Разрыв продольной компоненты скорости. Задача о распаде разрыва.* В точке $\xi = 0,5$ мм зададим разрыв продольной компоненты скорости, равный 1 км/с, так чтобы среда слева от разрыва (ударник) двигалась вправо со скоростью $u_1 = 1$ км/с, а среда справа от разрыва (преграда) покоилась: $u_1 = 0$. Остальные параметры среды те же, что и в примере, рассмотренном в подп. 2.1. Результаты расчетов приведены на рис. 2.

Первоначальный разрыв распадается на две ударные волны сжатия, распространяющиеся влево и вправо. Энтропийный след, который четко виден на месте первоначального разрыва на рис. 2,г, является нефизичным проявлением численного метода. Обычно такой след появляется в зонах формирования профиля волны, таких как зона первоначального разрыва или зона вблизи жестких непроницаемых границ области расчета. С учетом физических требований задачи обычно применяются какие-либо процедуры энтропийной коррекции [6]. В данной работе такие процедуры не используются: с точки зрения обобщенного решения этот след не имеет значения, поскольку его ширина представляет собой фиксированное количество счетных ячеек и при измельчении шага сетки стремится к нулю.

2.3. *Разрыв поперечной компоненты скорости.* Рассмотрим задачу о распаде разрыва поперечной компоненты скорости u_2 на примере плоского косоугольного соударения двух пластин с идеальным трением (угол столкновения равен нулю). Левая пластина ($\xi \in [0; 0,5]$) движется в поперечном направлении со скоростью $u_2 = 1$ км/с, а правая ($\xi \in [0,5; 1]$) покоится ($u_2 = 0$). В качестве остальных начальных данных принимаются следующие условия:

$$u_1(0, \xi) = u_3(0, \xi) = 0, \quad C = I, \quad W = \det C.$$

Из результатов численных экспериментов, представленных на рис. 3, следует, что первоначальный разрыв поперечной компоненты скорости с течением времени превращается

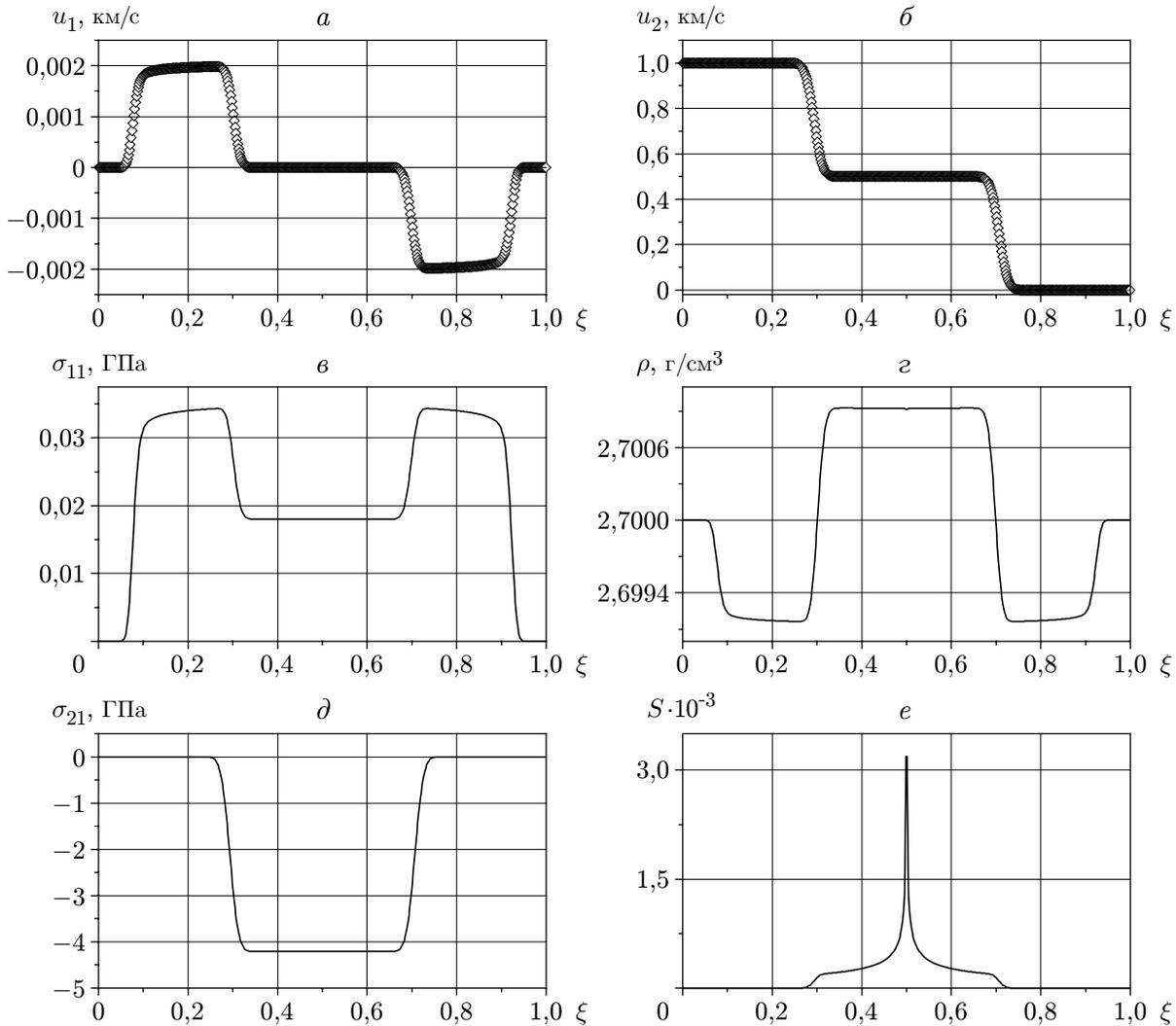


Рис. 3. Зависимости продольной (а) и поперечной (б) компонент скорости, продольного напряжения (в), плотности (г), сдвигового напряжения (д), энтропии (е) от продольной координаты в задаче о распаде разрыва (разрыв в точке $\xi = 0,5$ см) поперечной компоненты скорости ($t = 0,66 \cdot 10^{-6}$ с)

в волну, распространяющуюся на все большее количество счетных ячеек. На рис. 3,а видно, что в отличие от волн, распространяющихся в продольном направлении, поперечные волны создают также возмущение материала в продольном направлении и представляют собой волну типа волны разрежения в газовой динамике независимо от знака величины u_2 . Заметим, что передний фронт возмущения продольной скорости u_1 движется с продольной скоростью звука, а задний — с поперечной.

Как и в рассмотренном в подп. 2.2 примере, на рис. 3,е на месте первоначального разрыва четко виден пик, ширина которого равна определенному количеству счетных ячеек.

2.4. *Разрыв продольной компоненты скорости в предварительно напряженном материале.* Рассмотрим пример распространения волн по предварительно деформированному материалу, для которого неприменима линейная теория упругости. Задачи в такой постановке могут встречаться во многих приложениях. Пусть в начальный момент времени

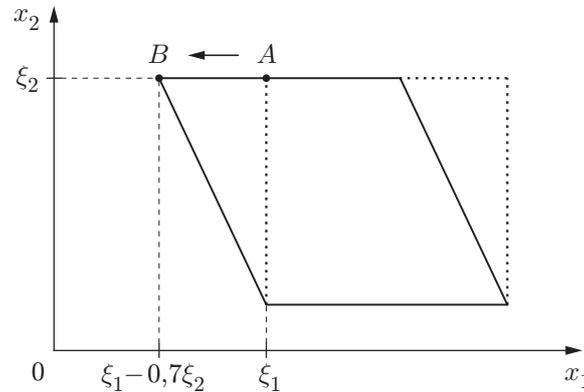


Рис. 4. Деформация “кристаллической решетки”, соответствующей матрице C , имеющей вид (5):

квадрат — начальное положение “кристаллической решетки”; параллелограмм — положение “кристаллической решетки” в результате действия тензора (5)

матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -0,7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

и в продольном направлении задан разрыв скорости: $u_1(0, \xi) = 2$ км/с слева от точки $\xi = 0,5$ см и $u_1(0, \xi) = 0$ справа от нее. Остальные начальные данные следующие: $u_2(0, \xi) = u_3(0, \xi) = 0$, $W = \det C$. Напомним, что в одномерной задаче по координате $\xi = \xi_1$ второй и третий столбцы матрицы C остаются постоянными во времени.

Предварительная деформация среды, заданная тензором (6), обуславливает наличие начальных напряжений. Тензор напряжений, вычисленный по формуле Мурнагана (5), в данном случае имеет вид

$$\sigma = \begin{pmatrix} 14,1 & -18,7 & 0 \\ -18,7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,04 \end{pmatrix}.$$

Несмотря на то что твердое тело моделируется сплошной средой, можно считать, что тензор C в виде (6) моделирует искажение условной “кристаллической решетки” (рис. 4). Точка среды A , которая в изотропном случае при $t = 0$ в плоскости x_1x_2 имела координаты $(\xi_1; \xi_2)$, в анизотропном материале переходит в точку B с координатами $(\xi_1 - 0,7\xi_2; \xi_2)$.

Профили решения приведены на рис. 5. Видно, что в продольном направлении в противоположные стороны от разрыва распространяется по две волны, одна из которых является ударной (идущей впереди), а другая поперечной. Появление второй волны вызвано искажением “кристаллической решетки”, в результате чего ее грани, изначально перпендикулярные продольному направлению, располагаются под некоторым острым углом к нему. Вследствие этого при плоском ударе в продольном направлении каждая “кристаллическая ячейка” приобретает продольные и поперечные возмущения.

Из результатов проведенных численных экспериментов следует, что система уравнений нелинейной теории упругости, выведенная в [1] на основе предположений гладкости изменения параметров среды, применима также для описания разрывных решений. Однако в ближайшее время строго теоретическое обоснование использования этой модели в случае разрывного характера поведения среды вряд ли возможно: завершенной теории для

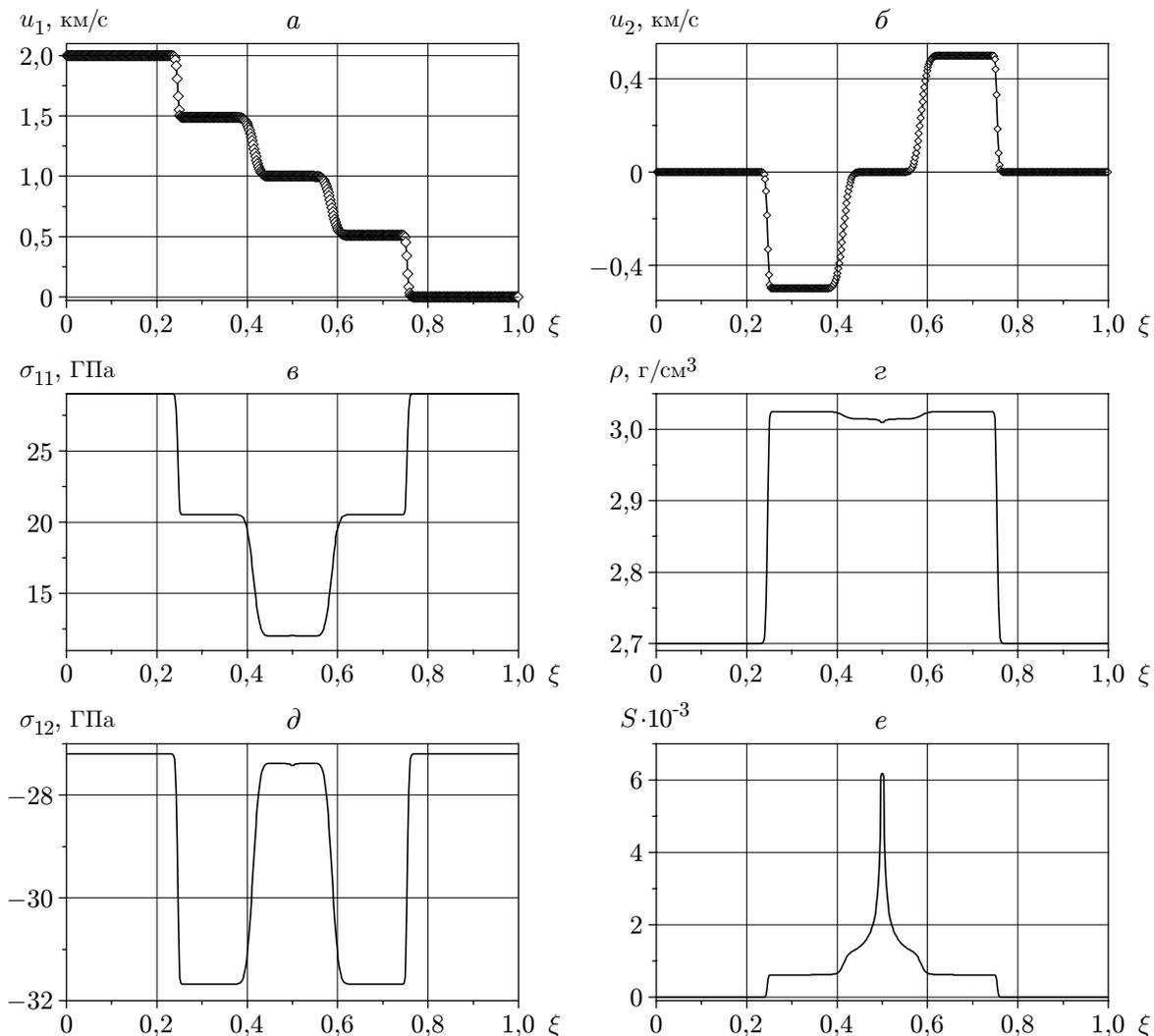


Рис. 5. Зависимости продольной (*a*) и поперечной (*б*) компонент скорости, продольного напряжения (*в*), плотности (*г*), сдвигового напряжения (*д*), энтропии (*е*) от продольной координаты в задаче о распаде разрыва продольной компоненты скорости в предварительно напряженном материале ($t = 0,27 \cdot 10^{-6}$ с)

этого случая не существует, так же как не существует ее для уравнений газовой динамики и других нелинейных уравнений математической физики.

Заключение. Проведенные расчеты являются пробными. За рамками данной работы остается еще много вопросов, один из которых — контроль точности вычисляемых параметров среды — представляется особенно актуальным и нетривиальным. Нетривиальность этого вопроса обусловлена тем, что предложенная в настоящей работе модель является переопределенной системой уравнений. Для обеспечения корректности системы (3) потребовалась модификация постановки задачи (выделение переменной W), в результате чего система стала еще более переопределенной: помимо того что до модификации число законов сохранения превышало число неизвестных, появились новые соотношения на характеристиках системы. Например, следствием уравнений системы (3) является соотношение (4), которое выполняется вдоль траекторий частиц $dx_i/dt = u_i$, если оно было выполнено в начальный момент. Естественно, рассматриваемая задача имеет также мно-

жество других решений, вдоль которых соотношение (4) не выполняется. Эти решения не представляют интереса вследствие отсутствия у них физического смысла. Однако при численном расчете из-за ошибок аппроксимации, возникающих вследствие дискретизации задачи, особенно в тех случаях, когда вычисляются производные от разрывных функций, могут быть нарушены соотношения, строго выполненные в математическом смысле. Подобные факты, известные в магнитной гидродинамике (несохранение магнитного заряда) [6], по-видимому, присущи всем переопределенным системам математической физики.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Годунов С. К., Пешков И. М.** Симметрические гиперболические уравнения нелинейной теории упругости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 6. С. 1034–1056.
2. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1987.
3. **Куликовский А. Г.** Нелинейные волны в упругих средах / А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова. М.: Моск. лицей, 1998.
4. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошных сред и законы сохранения / С. К. Годунов, Е. И. Роменский. Новосибирск: Науч. кн., 1998.
5. **Годунов С. К.** Разностный метод расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47, № 3. С. 271–306.
6. **Куликовский А. Г.** Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. М.: Физматлит, 2001.

*Поступила в редакцию 30/IV 2008 г.,
в окончательном варианте — 2/X 2008 г.*
