

УДК 532.5

**УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ ПЛОСКОГО КОНТУРА  
ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД  
ПРИ НАЛИЧИИ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ДНА**

С. И. Филиппов

*НИИ математики и механики  
при Казанском государственном университете,  
420008 Казань*

В рамках теории волн малой амплитуды исследуются установившиеся колебания контура в двухслойном потоке идеальной несжимаемой весомой жидкости, ограниченной горизонтальным дном. Даже в линейной постановке решение задачи вызывает большие трудности, в значительной мере связанные с удовлетворением граничного условия на контуре. Среди методов решения задач о колебаниях тел в жидкости с границами раздела сред отметим метод Н. Е. Кочина [1], основанный на распределении особенностей по контуру. М. Д. Хаскиндом [2], согласно методу [1], рассмотрена задача о колебаниях контура под свободной поверхностью жидкости конечной глубины. В [2] получены приближенные выражения для сил, действующих на контур, с использованием гипотезы Н. Е. Кочина. В последнее время для решения задач о колебаниях широко применяются численные методы. В [3, 4] с помощью метода гибридных конечных элементов исследованы движения тел в потоках с одной границей раздела.

В данной работе развивается численно-аналитический метод моделирования границ особенностями [5–7], идея которого принадлежит Г. Г. Тумашеву. Одно из главных достоинств метода заключается в удовлетворении граничного условия на контуре по построению решения. Ранее для потоков с двумя границами раздела этот метод был применен в [7] при изучении поступательного движения крылового профиля.

**1. Постановка задачи.** Рассматриваются волновые движения, возникающие в весомой жидкости при периодических колебаниях плоского контура под линией раздела жидкостей разной плотности при наличии горизонтального дна. Предположим, что волны, образующиеся на линии раздела, будут расходиться в обе стороны от тела.

Пусть  $xOy$  — неподвижная система координат. Ось  $x$  горизонтальна и совпадает с невозмущенным уровнем линии раздела, а ось  $y$  направлена вверх. В силу линейности задачи достаточно рассмотреть гармонические колебания контура  $C$  по закону

$$u_n(s, t) = u_1(s) \cos \omega t + u_2(s) \sin \omega t.$$

Здесь  $u_n(s, t)$  — нормальная составляющая скорости точки контура с дуговой абсциссой  $s$ ;  $t$  — время.

Считая колебания установившимися, можем записать комплексный потенциал скоростей в виде

$$w(z, t) = w_1(z) \cos \omega t + w_2(z) \sin \omega t \quad (z = x + iy).$$

Поскольку амплитуды колебаний малы, условие обтекания

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial n} = u_k(s) \quad (w_k(z) = \varphi_k(x, y) + i\psi_k(x, y)) \quad (k = 1, 2) \quad (1.1)$$

относится к контуру  $C$ , предполагаемому неподвижным.

Граничные условия на линии раздела и линии дна для функций  $w_k(z)$  примут вид

$$\operatorname{Im} [dw_k^+(z)/dz + i(m^+ w_k^+(z) - m^- w_k^-(z))] = 0, \quad y = 0; \quad (1.2)$$

$$\operatorname{Im} [w_k^+(z) - w_k^-(z)] = 0, \quad y = 0; \quad (1.3)$$

$$\operatorname{Im} w_k(z) = \psi_0, \quad y = -H \quad (\psi_0 = \text{const}), \quad (1.4)$$

где  $m^+ = \rho^+ \omega^2 / g(\rho^+ - \rho^-)$ ;  $m^- = \rho^- \omega^2 / g(\rho^+ - \rho^-)$ ;  $g$  — ускорение силы тяжести; индексом плюс отмечены величины, относящиеся к жидкости, в которой находится тело, а индексом минус — к области  $y \geq 0$ .

**2. Вывод интегральных уравнений.** Легко установить, что функция  $\varphi_k^+(x, y)$  однозначна в области внешности контура  $E(C)$  [2], следовательно,  $w_k^+(z)$  при обходе контура  $C$  может изменяться лишь на мнимую циклическую постоянную  $iA_k$ , где  $A_k = \oint_C u_k(s) ds$ . Предположим вначале, что  $A_k = 0$ .

Решение поставленной задачи будем искать в виде

$$w_k = w_k^0(z) + w_k^*(z) + v_k(z) + \bar{v}_k(z) + \Phi_k(z) + \bar{\Phi}_k(z). \quad (2.1)$$

Здесь  $w_k^0(z)$  — известные функции, представляющие решение задачи для безграничного потока;  $w_k^*(z) = 0$  при  $A_k = 0$ ;

$$v_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_k(\tau) d\tau}{z - \tau}; \quad \bar{v}_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\mu}_k(\tau_1) d\tau_1}{z - \tau_1 + iH};$$

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(z, \tau) \mu_k(\tau) d\tau; \quad \bar{\Phi}_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(z, \tau_1) \bar{\mu}_k(\tau_1) d\tau_1.$$

Под  $\bar{\mu}_k(\tau_1)$  подразумеваются  $\bar{\mu}_k(\tau_1 - iH)$ . Считаем, что вещественные функции  $\mu_k(\tau)$ ,  $\bar{\mu}_k(\tau_1)$  таковы, что интегралы  $v_k(z)$  и  $\bar{v}_k(z)$  сходятся. Функции  $F(z, \tau)$ ,  $\bar{F}(z, \tau_1)$  строятся на основании теоремы Милн — Томсона об окружности с использованием конформного отображения внешности контура на внешность круга [6, 7] так, что  $w_k(z)$  в виде (2.1) удовлетворяет условию (1.1). Кроме того, на основании свойств предельных значений интеграла типа Коши выполняется условие (1.3).

Подставляя (2.1) в условие (1.2), получим

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{dv_k}{dz} + i\nu v_k + \left( \frac{d}{dz} + i\sigma \right) [\Omega_k(z)] \right\} = 0, \quad y = 0,$$

где  $\Omega_k(z) = w_k^0(z) + \bar{v}_k(z) + \Phi_k(z) + \bar{\Phi}_k(z)$ ;  $\sigma = m^+ - m^-$ ;  $\nu = m^+ + m^-$ . Данное соотношение равносильно следующему:

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{dv_k}{dz} + i\nu v_k - \left( \frac{d}{dz} - i\sigma \right) [\bar{\Omega}_k(z)] \right\} = 0, \quad y = 0.$$

Так как функции  $v_k(z)$ ,  $w_k^0(z)$ ,  $\bar{v}_k(z)$ ,  $\Phi_k(z)$ ,  $\bar{\Phi}_k(z)$  регулярны в нижней полуплоскости, то для данной области имеем

$$\frac{dv_k}{dz} + i\nu v_k - \left( \frac{d}{dz} - i\sigma \right) [\bar{\Omega}_k(z)] = B_k \quad (2.2)$$

( $B_k$  — вещественные постоянные). Не нарушая общности, положим  $B_k = 0$ . Следовательно, из (5) можем найти

$$v_k(z) = -m_1 \bar{\Omega}_k(z) + e^{-\nu z} \left[ \frac{C_k}{2} + 2m_2 \int_{\infty}^z e^{\nu u} \frac{d\bar{\Omega}_k(u)}{du} du \right]. \quad (2.3)$$

Здесь  $C_k$  — неизвестные константы;  $m_1 = (\rho^+ - \rho^-)/(\rho^+ + \rho^-)$ ;  $m_2 = \rho^+ / (\rho^+ + \rho^-)$ .

Осуществляя в (2.3) предельный переход при  $z = z_1 - iH$  на основании формулы Сохоцкого и рассматривая действительную часть равенства, придем к линейному интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \mu_k(x) = & \operatorname{Re}(C_k e^{-\nu x}) + q_k(x) + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x, \tau) \mu_k(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} K_4(x, \tau_1) \bar{\mu}_k(\tau_1) d\tau_1, \\ q_k(x) = & 2\operatorname{Re} \left[ -m_1 w_k^0(x) + 2m_2 e^{\nu x} \int_{\infty}^x \frac{dw_k^0(u)}{du} e^{-\nu u} du \right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$K_1(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[ -m_1 F(x, \tau) + 2m_2 e^{\nu x} \int_{\infty}^x F'_u(u, \tau) e^{-\nu u} du \right],$$

$$\begin{aligned} K_4(x, \tau_1) = & \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \frac{-m_1}{x - \tau_1 + iH} - m_1 \bar{F}(x, \tau_1) + \right. \\ & \left. + 2m_2 e^{\nu x} \int_{\infty}^x \left[ \frac{-1}{(u - \tau_1 + iH)^2} + \bar{F}'_u(u, \tau_1) \right] e^{-\nu u} du \right\}. \end{aligned}$$

Проведя преобразование координат  $z = z_1 - iH$  и подставляя (2.1) в условие (1.4), найдем

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_k(x_1) = & \bar{q}_k(x_1) + \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x_1, \tau_1) \bar{\mu}_k(\tau_1) d\tau_1 + \int_{-\infty}^{\infty} K_3(x_1, \tau) \mu_k(\tau) d\tau, \\ \bar{q}_k(x_1) = & -2\operatorname{Re} [w_k^0(x_1)], \quad K_2(x_1, \tau_1) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \bar{F}(x_1, \tau_1), \\ K_3(x_1, \tau) = & \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{x_1 - \tau - iH} + F(x_1, \tau) \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Введем обозначения

$$H_k(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} [w_k^0(x) + w_k^*(x) + \bar{v}_k(x) + \Phi_k(x) + \bar{\Phi}_k(x)] e^{-\nu x} dx,$$

тогда из условия излучения аналогично [6] нетрудно получить

$$C_1 = -2m_2 [\bar{H}_1(\nu) - i\bar{H}_2(\nu)], \quad C_2 = iC_1. \quad (2.6)$$

Рассмотрим системы

$$\begin{aligned}\mu_{k0}(x) &= q_k(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x, \tau) \mu_{k0}(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} K_4(x, \tau_1) \tilde{\mu}_{k0}(\tau_1) d\tau_1, \\ \tilde{\mu}_{k0}(x_1) &= \tilde{q}_k(x_1) + \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x_1, \tau_1) \tilde{\mu}_{k0}(\tau_1) d\tau_1 + \int_{-\infty}^{\infty} K_3(x_1, \tau) \mu_{k0}(\tau) d\tau,\end{aligned}\quad (2.7)$$

где  $k = 0, 1, 2$ ;  $q_0(x) = \exp(i\nu x)$ ;  $\tilde{q}_0(x_1) = 0$ .

Решение системы (2.4), (2.5) можем записать через решения систем (2.7):

$$\begin{aligned}\mu_k(x) &= \mu_{k0}(x) + \operatorname{Re} [C_k \bar{\mu}_{00}(x)], \\ \tilde{\mu}_k(x_1) &= \tilde{\mu}_{k0}(x_1) + \operatorname{Re} [C_k \bar{\mu}_{00}(x_1)].\end{aligned}\quad (2.8)$$

Учитывая соотношения (2.8) и что  $C_2 = iC_1$ , найдем

$$\mu_1(x) + i\mu_2(x) = \mu_{10}(x) + i\mu_{20}(x) + C_1 \mu_{00}(x),$$

тогда

$$H_1(\nu) + iH_2(\nu) = H_{10}(\nu) + iH_{20}(\nu) + \bar{C}_1(\Delta\mu_{00} + \Delta\tilde{\mu}_{00}).\quad (2.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned}H_{k0}(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} [w_k^0(x) + w_k^*(x)] e^{-i\nu x} dx + \Delta\mu_{k0}(\nu) + \Delta\tilde{\mu}_{k0}(\nu); \\ \Delta\mu_{k0}(\nu) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu x} \int_{-\infty}^{\infty} F'_x(x, \tau) \mu_{k0}(\tau) d\tau dx; \\ \Delta\tilde{\mu}_{k0}(\nu) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu x} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{-1}{(x - \tau_1 + iH)^2} + \tilde{F}'_x(x, \tau_1) \right] \tilde{\mu}_{k0}(\tau_1) d\tau_1 dx.\end{aligned}$$

Подставляя выражение, сопряженное (2.9), в (2.6), получим

$$C_1 = \frac{-2m_2[\bar{H}_{10}(\nu) - i\bar{H}_{20}(\nu)]}{1 + 2m_2(\Delta\mu_{00} + \Delta\bar{\mu}_{00})}.$$

В случае  $A_k \neq 0$   $w_k^*(z)$  представим многозначной в  $E(C)$  функцией

$$w_k^{*+}(z) = \frac{A_k}{2\pi} \ln \frac{a_k(z)}{(z - z_k)}, \quad w_k^{*-}(z) = \frac{A_k}{2\pi} \ln a_k(z)(z - z_k) \quad (\operatorname{Im} z_k > 0),$$

не нарушающей условий (1.1), (1.3). Функция  $a_k(z) \neq 0$  в  $E(C)$  регулярна и в окрестности  $z = \infty$  разлагается в ряд

$$a_k(z) = z + a_{0k} + \frac{a_{1k}}{z} + \dots$$

При выводе уравнений (2.4), (2.5) наличие функции  $w_k^*(z) \neq 0$  в сумме (2.1) приводит к появлению дополнительных слагаемых в  $q_k$  и  $\tilde{q}_k$ :

$$q_k^*(x) = \frac{A_k}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ m_1 \ln \frac{x - \bar{z}_k}{a_k(x)} + e^{i\nu x} \int_{-\infty}^x \left[ 2m_2 \frac{a'_k(u)}{a_k(u)} + \frac{1 - m_1}{u - \bar{z}_k} \right] e^{-i\nu u} du \right\},$$

$$\tilde{q}_k^*(x_1) = -2\operatorname{Re} [w_k^*(x_1)].$$

Следует учесть, что при выводе уравнения (2.4) слагаемое с  $\ln(z - z_k)$  операции сопряжения не подвергается.

**3. Примеры расчетов.** Пусть в качестве тела, совершающего колебания, выступает эллиптический цилиндр  $x^2/a^2 + (y + h)^2/b^2 = 1$ , где  $a$  и  $b$  — соответственно большая и малая полуоси эллипса,  $h$  — отстояние его центра от поверхности раздела.

Функция  $F(z, \tau)$  для эллиптического цилиндра имеет вид

$$F(z, t) = -\left\{ \chi(z, \tau) - \frac{\zeta'(\tau)}{\zeta^2(\tau)[\zeta(z) - 1/\zeta(\tau)]} \right\}, \quad (3.1)$$

$$\chi(z, \tau) = \frac{\zeta(z) - \zeta(\tau) - \zeta'(\tau)(z - \tau)}{(z - \tau)[\zeta(z) - \zeta(\tau)]};$$

$$\zeta = \frac{z + ih + \sqrt{(z + ih)^2 - c^2}}{a + b}, \quad c^2 = a^2 - b^2. \quad (3.2)$$

Функция  $\bar{F}(z, \tau_1)$  запишется аналогично (3.1) с учетом замены  $\tau$  на  $\tau_1 - iH$ . Поскольку деформации отсутствуют, то  $A_k = 0$ , а  $w_k^0(z)$  нетрудно построить [8], используя отображение (3.2).

Одной из основных гидродинамических характеристик контура, совершающего колебания, являются коэффициенты присоединенных масс

$$\lambda_{ij} = -\rho^+ \int_C \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial n} \varphi_j^* ds,$$

где  $\varphi_i^*(x, y)$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) — единичные потенциалы при движении вдоль осей  $x, y$  и вращения, которые определяются потенциалами  $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)$ .

По формуле

$$\eta(x, t) = -\frac{1}{g(\rho^+ - \rho^-)} \left( \rho^- \frac{\partial \varphi^-(x, 0, t)}{\partial t} - \rho^+ \frac{\partial \varphi^+(x, 0, t)}{\partial t} \right)$$

можно определить форму границы раздела жидкостей.

Для решения систем интегральных уравнений и вычисления гидродинамических характеристик, действующих на контур, разработаны алгоритм и программа на языке Фортран. На рис. 1-4 представлены примеры расчетов.

На рис. 1 приведены расчеты ненулевых коэффициентов присоединенных масс  $\lambda_{11} = \lambda_{11}/\pi\rho^+b^2$ ,  $\lambda_{22} = \lambda_{11}$  ( $b = 1$  — радиус круга) круглого цилиндра, находящегося в двухслойной бесконечно глубокой жидкости (кривая 1 —  $\rho = \rho^-/\rho^+ = 0,97$ , а 2 —  $\bar{\rho} = 0$ ) на расстоянии  $\bar{h} = h/b = 2$  от поверхности раздела в зависимости от величины  $\nu b$ . Отметим, что расчеты для свободной поверхности хорошо совпадают с аналитическими результатами [3], отмеченными крестиками.

Расчеты ненулевых коэффициентов присоединенных масс эллиптического цилиндра  $a/b = 2$  при  $h/b = 2$ ,  $H = \infty$  для  $\bar{\rho} = 0,97$  и 0 представлены на рис. 2, 3, где  $\bar{\lambda}_{ij} = \lambda_{ij}/\pi\rho^+b^n$ . Для  $\bar{\lambda}_{11}, \lambda_{22}$   $n = 2$ , для  $\lambda_{31}$   $n = 3$ , для  $\lambda_{33}$   $n = 4$ .

На рис. 4 сплошными линиями приведены примеры расчета границы раздела жидкостей ( $\rho = 0,97$ ) при  $h/b = 3$ ,  $H/b = 4,5$ ,  $\nu b = 0,6$  для горизонтально-вертикальных колебаний эллиптического цилиндра  $a/b = 2$  по закону  $x_0 = \varepsilon \cos \omega t$ ,  $y_0 = -h + \varepsilon \sin \omega t$  для  $t = t\omega = \pi(n-1)/2$

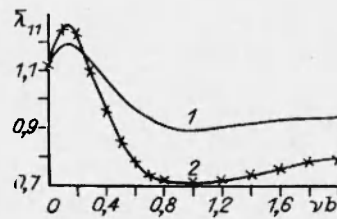


Рис. 1

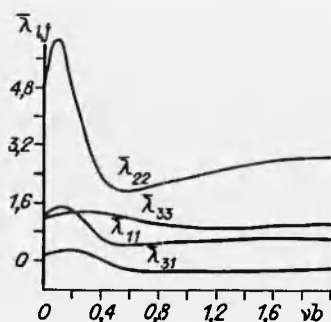


Рис. 2

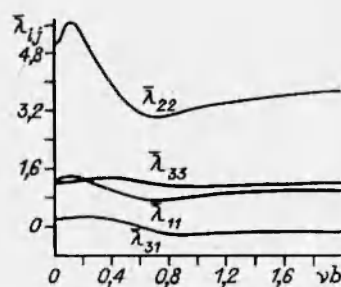


Рис. 3

( $n = \overline{1, 4}$ ), штриховыми — результаты для бесконечно глубокой жидкости. Можно отметить, что влияние дна сказывается в увеличении амплитуды волн с одной стороны от контура и в их уменьшении по другую сторону контура.

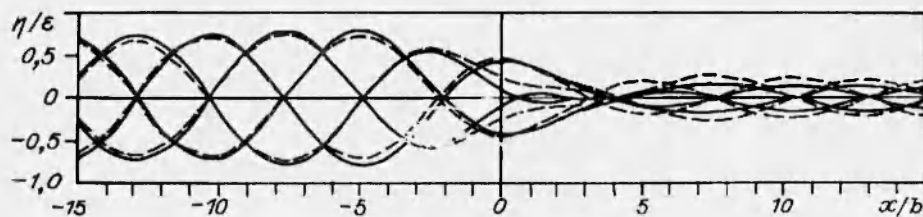


Рис. 4

В заключение подчеркнем перспективность метода моделирования границ по особенностям для решения задач корабельной гидродинамики, в которых учитываются поступательное движение тела и его колебания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. Плоская задача об установившихся колебаниях тел под свободной поверхностью тяжелой несжимаемой жидкости: Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. Т. 2.
2. Хаскинд М. Д. Плоская задача о колебаниях тела под поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины // ПММ. 1944. Т. 8, № 4.
3. Eatock Taylor R., Hu C. S. Multipole expansions for wave diffraction and radiation in deep water // Ocean Eng. 1991. V. 18, N 3.
4. Стурова И. В. Влияние регулярного волнения на погруженное тело, движущееся в стратифицированной жидкости // Вычислительные технологии. Новосибирск, 1992. Т. 1, № 3.
5. Тумашев Г. Г., Черепенин Н. Д., Лотфуллин М. В. Один метод решения задач о движении системы контуров вблизи границы раздела жидкостей // Механика сплошных сред.: Тез. докл. Респуб. науч.-техн. конф. Набережные Челны, 1982.
6. Черепенин Н. Д. О колебаниях контура вблизи поверхности раздела двух жидкостей // Труды семинара по краевым задачам. Казань, 1974. № 11.
7. Лотфуллин М. В., Филиппов С. И. Моделирование границ раздела в задачах обтекания профиля крыла весомой жидкостью // ПМТФ. 1992. № 4.
8. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Гостехтеоретиздат, 1950.

Поступила в редакцию 30/III 1994 г.,  
в окончательном варианте — 6/V 1994 г.