

УДК 532.59:534.1:533.6.013.42

## ДВИЖЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКИ, ЗАКРЕПЛЕННОЙ НА ПРУЖИНАХ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

А. А. Коробкин<sup>\*,\*\*</sup>, С. В. Стуколов<sup>\*\*\*</sup>, И. В. Стурова<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

<sup>\*\*</sup> Университет Восточной Англии, NR4 7TJ Норидж, Англия

<sup>\*\*\*</sup> Кемеровский государственный университет, 650043 Кемерово

E-mail: sturova@hydro.nsc.ru

Выполнено исследование двумерной нестационарной задачи гидроупругости о взаимодействии поверхностных волн с подвижной вертикальной стенкой, закрепленной на пружинах. Построены аналитическое решение задачи в рамках линейного приближения и численное решение в рамках нелинейной модели потенциального течения жидкости с использованием комплексного метода граничных элементов. В результате анализа линейного и нелинейного решений установлено, что линейное решение может быть использовано для предсказания основных характеристик движения стенки и течения жидкости при умеренных амплитудах волн.

**Ключевые слова:** гидроупругость, нестационарное воздействие, подвижная вертикальная стенка, нелинейные поверхностные волны, комплексный метод граничных элементов.

Исследование поведения упругих стенок больших конструкций, подверженных воздействию поверхностных волн, является одной из основных задач гидроупругости. Деформации стенок обусловлены волновым движением жидкости, которое в свою очередь зависит от упругих прогибов стенок. При этом следует учитывать нестационарность и нелинейность происходящих процессов.

Ограничимся рассмотрением двумерных задач, в которых жидкость занимает полуограниченный канал постоянной глубины с упругой вертикальной стенкой. Ряд работ посвящен исследованию вибраций боковой стенки, моделируемой упругой балкой, под действием набегающих периодических волн (см., например, работу [1] и библиографию к ней). При этом рассматривается линеаризованная задача и предполагается, что движения жидкости и балки описываются периодическими функциями времени.

Нестационарные линейные волновые движения жидкости, вызванные начальной деформацией упругой боковой стенки, рассмотрены в [2].

Более простой по постановке является задача о взаимодействии поверхностных волн с твердой вертикальной стенкой, прикрепленной пружинами к неподвижному блоку. Эта задача была выбрана для тестирования численных алгоритмов, разрабатываемых для решения нелинейных задач гидроупругости в случае, когда амплитуды поверхностных волн, набегающих на конструкцию, значительны. Предполагается, что при движении стенки отсутствуют трение и просачивание жидкости между стенкой и дном канала. Такая конструкция может быть использована в качестве элемента волновой энергетической станции

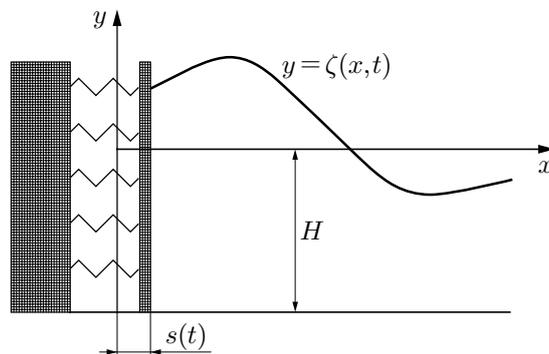


Рис. 1. Схема течения

для аккумуляции энергии поверхностных волн. Результаты численного решения данной задачи в нелинейной постановке конечно-разностным методом кратко изложены в [3]. Поверхностные волны были вызваны распадом начального возмущения на свободной поверхности. Проведено сравнение динамики свободной поверхности для случаев подвижной и неподвижной боковой стенки. Однако представленные в [3] расчеты выполнены без учета вклада начального возвышения свободной поверхности в распределение гидростатической нагрузки, действующей на вертикальную стенку. В данной работе задача решена с учетом начального возвышения, проведено сопоставление решений в линейной и нелинейной постановках. Решение соответствующей линейной задачи получено как с помощью интегральных преобразований, так и численно с использованием комплексного метода граничных элементов (КМГЭ). Этот метод использован также при решении нелинейной задачи.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается плоская нестационарная задача о волновом движении идеальной несжимаемой жидкости в области с подвижной стенкой (рис. 1). В невозмущенном состоянии слой жидкости глубины  $H$  сверху ограничен свободной поверхностью, а снизу — твердым горизонтальным дном. Слева полубезграничный слой жидкости ограничен стенкой, которая остается в вертикальном положении в течение всего времени движения. Перемещения стенки определяются нагрузками, действующими на нее со стороны жидкости, и восстанавливающей силой, которая принимается пропорциональной перемещению стенки. Система декартовых координат введена таким образом, что ось  $x$  совпадает с невозмущенной свободной поверхностью, а ось  $y$  направлена вертикально вверх и соответствует положению стенки в начальный момент времени. Перемещение стенки обозначено  $s(t)$ , причем  $s(0) = 0$  и  $\dot{s}(0) = 0$ . Точка сверху означает дифференцирование по времени  $t$ . Уравнение

$$y = \zeta(x, t) \quad (x \geq s(t))$$

описывает возвышение свободной поверхности жидкости во время движения. Предполагается, что в начальный момент времени  $t = 0$  форма свободной поверхности описывается уравнением

$$y = \zeta(x, 0) \equiv \zeta_0(x) \quad (x \geq 0), \tag{1.1}$$

где функция  $\zeta_0(x)$  задана ( $\zeta_0(0) = 0$  и  $\zeta_0(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ ). При  $t > 0$  течение жидкости обусловлено распадом начального возвышения свободной границы (1.1) и возникающим при этом движением стенки и является потенциальным. В изменяющейся по времени области течения

$$\Omega(t) = \{x, y: \quad x > s(t), \quad -H < y < \zeta(x, t)\} \tag{1.2}$$

потенциал скоростей  $\varphi(x, y, t)$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \quad (x, y \in \Omega(t)) \tag{1.3}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \dot{s}(t) \quad (x = s(t), \quad -H \leq y \leq \zeta_*(t)); \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (x \geq s(t), \quad y = -H); \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad p = 0 \quad (x \geq s(t), \quad y = \zeta(x, t)); \quad (1.6)$$

$$\varphi \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty), \quad (1.7)$$

где  $\zeta_*(t) = \zeta[s(t), t]$  — уровень жидкости на подвижной стенке.

Гидродинамическое давление  $p(x, y, t)$  вычисляется с помощью интеграла Коши — Лагранжа:

$$p = -\rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + gy \right) \quad (1.8)$$

( $\rho$  — плотность жидкости;  $g$  — ускорение свободного падения). В начальный момент

$$\varphi(x, y, 0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, \zeta_0(x), 0) = -g\zeta_0(x). \quad (1.9)$$

При  $t = 0$  распределение давления вдоль стенки вычисляется по формуле

$$p(0, y, 0) = -\rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{x=0, t=0} + gy \right),$$

а на невозмущенной свободной поверхности жидкости равно нулю. Сила  $F(0)$ , действующая на вертикальную стенку в начальный момент времени, компенсируется восстанавливающей силой пружин. Уравнение горизонтального перемещения пластины имеет вид

$$m\ddot{s} + \gamma s = F(0) - F(t) \quad (t > 0), \quad (1.10)$$

где

$$F(t) = \int_{-H}^{\zeta_*(t)} p[s(t), y, t] dy, \quad (1.11)$$

$m$  — масса пластины;  $\gamma$  — коэффициент жесткости пружин.

**2. Линейное приближение.** Линейное приближение может быть использовано для определения движения стенки и волнового течения жидкости при малых начальных возмущениях свободной поверхности. В линейной теории волн граничные условия (1.6) упрощаются:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\zeta = 0 \quad (x \geq 0, \quad y = 0). \quad (2.1)$$

На вертикальной стенке вместо условия (1.4) используется линеаризованное граничное условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \dot{s}(t) \quad (x = 0, \quad -H \leq y \leq 0), \quad (2.2)$$

что позволяет рассматривать задачу в фиксированной области, не меняющейся во времени:

$$\Omega_1 = \{x, y: \quad x \geq 0, \quad -H \leq y \leq 0\}.$$

Гидродинамическое давление определяется из линейризованного уравнения (1.8):

$$p = -\rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + gy \right),$$

сила, действующая на вертикальную стенку, равна

$$F(t) = \int_{-H}^0 p(0, y, t) dy. \quad (2.3)$$

Для потенциала скоростей  $\varphi(x, y, t)$  решение уравнения Лапласа (1.3) в области  $\Omega_1$  с граничными условиями (1.5), (1.7), (2.1), (2.2) и начальными условиями

$$\begin{aligned} \zeta(x, 0) &= \zeta_0(x), & \varphi(x, y, 0) &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -g\zeta_0(x) & (x \geq 0, \quad y = 0, \quad t = 0) \end{aligned}$$

ищется в виде суммы трех неизвестных функций:

$$\varphi(x, y, t) = \varphi_1(x, y, t) + \varphi_2(x, y, t) + \varphi_3(x, y, t).$$

Соответственно искомое возвышение свободной границы  $\zeta(x, t)$  можно представить в виде суммы трех слагаемых:

$$\zeta(x, t) = \zeta_1(x, t) + \zeta_2(x, t) + \zeta_3(x, t).$$

Функции  $\varphi_j(x, y, t)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi_j = 0 \quad (x, y \in \Omega_1)$$

с граничным условием

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} = 0 \quad (x \geq 0, \quad y = -H)$$

и убывают на бесконечности при  $x \rightarrow +\infty$ .

Функция  $\varphi_1(x, y, t)$  представляет собой решение задачи Коши — Пуассона для неподвижной стенки со следующими граничными и начальными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + g\zeta_1 &= 0, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} &= \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} & (x \geq 0, \quad y = 0), \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &= 0 & (x = 0, \quad -H < y < 0), \\ \zeta_1(x, 0) &= \zeta_0(x), & \varphi_1(x, y, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Потенциал скоростей  $\varphi_2(x, y, t)$  описывает течение невесомой несжимаемой жидкости, вызванное движением вертикальной стенки. Граничные условия для этой функции имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= 0 & (x \geq 0, \quad y = 0), \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} &= \dot{s}(t) & (x = 0, \quad -H \leq y \leq 0). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Функция  $\varphi_3(x, y, t)$  удовлетворяет следующим граничным и начальным условиям:

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial t} + g\zeta_3 = -g\zeta_2, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = \frac{\partial \zeta_3}{\partial t} \quad (x \geq 0, \quad y = 0),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} &= 0 \quad (x = 0, \quad -H \leq y \leq 0), \\ \varphi_3(x, y, 0) &= 0, \quad \zeta_3(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Потенциал скоростей  $\varphi_1(x, y, t)$  и возвышение свободной границы  $\zeta_1(x, y, t)$  построены с помощью интегрального преобразования Фурье по  $x$  и преобразования Лапласа по  $t$  в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, t) &= -\frac{2g}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}[k(y+H)] \cos(kx)}{\omega(k) \operatorname{ch}(kH)} \tilde{\zeta}_0(k) \sin[\omega(k)t] dk, \\ \zeta_1(x, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(kx) \tilde{\zeta}_0(k) \cos[\omega(k)t] dk, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\tilde{\zeta}_0(k) = \int_0^{\infty} \zeta_0(x) \cos(kx) dx, \quad \omega(k) = \sqrt{gk \operatorname{th}(kH)}.$$

Решение для  $\varphi_2(x, y, t)$  можно определить двумя методами. Первый метод, описанный в [4], применим как в случае жидкости конечной глубины, так и в случае бесконечно глубокой жидкости. В соответствии с этим методом решение для  $\varphi_2(x, y, t)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, y, t) &= -\frac{\dot{s}(t)}{2\pi} \int_{-H}^0 \left( \ln \frac{\operatorname{ch}(bx) + \cos[b(\beta + y + 2H)]}{\operatorname{ch}(bx) - \cos[b(\beta + y + 2H)]} + \ln \frac{\operatorname{ch}(bx) + \cos[b(\beta - y)]}{\operatorname{ch}(bx) - \cos[b(\beta - y)]} \right) d\beta, \\ b &= \pi/(2H). \end{aligned}$$

Второй метод более прост, но применим только в случае жидкости конечной глубины. Решение для  $\varphi_2(x, y, t)$  ищется в виде

$$\varphi_2(x, y, t) = \dot{s}(t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(-\lambda_n x) \cos[\lambda_n(y+H)], \quad \lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2H}, \quad (2.6)$$

где коэффициенты  $a_n$  являются неизвестными. Согласно граничному условию (2.4)

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{8H}{\pi^2(2n+1)^2}.$$

С учетом (2.6) окончательные решения для  $\varphi_2(x, y, t)$  и  $\zeta_2(x, t)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, y, t) &= \frac{8\dot{s}(t)H}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\exp(-\lambda_n x) \cos[\lambda_n(y+H)]}{(2n+1)^2}, \\ \zeta_2(x, t) &= \frac{4s(t)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda_n x)}{2n+1} = \frac{4s(t)}{\pi} \operatorname{arcth} \left[ \exp \left( -\frac{\pi x}{2H} \right) \right]. \end{aligned}$$

Применяя полученные решения и интегральные преобразования Фурье и Лапласа, решение для  $\varphi_3(x, y, t)$  и  $\zeta_3(x, t)$  можно представить в виде

$$\varphi_3(x, y, t) = -\frac{2g}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}[k(y+H)]}{\omega(k) \operatorname{ch}(kH)} \cos(kx) C(k) \int_0^t \dot{s}(\tau) \sin[\omega(k)(t-\tau)] d\tau dk,$$

$$\zeta_3(x, t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(kx) C(k) \omega(k) \int_0^t s(\tau) \sin[\omega(k)(t - \tau)] d\tau dk, \quad (2.7)$$

$$C(k) = \frac{\text{th}(kH)}{k}.$$

Для определения гидродинамического давления, действующего на стенку, вычислим значение  $(\partial\varphi/\partial t)|_{x=0}$ , используя решения (2.5)–(2.7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{x=0} &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\Big|_{x=0} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\Big|_{x=0} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial t}\Big|_{x=0} = \\ &= -\frac{2g}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{ch}[k(y+H)]}{\text{ch}(kH)} \tilde{\zeta}_0(k) \cos[\omega(k)t] dk - \frac{8H\ddot{s}(t)}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos[\lambda_n(y+H)]}{(2n+1)^2} - \\ &\quad - \frac{2g}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{ch}[k(y+H)]}{\text{ch}(kH)} C(k) \int_0^t \dot{s}(\tau) \cos[\omega(k)(t - \tau)] d\tau dk. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Интегрируя (2.8) по  $y$  от  $-H$  до  $0$ , можно определить в (2.3) силу, действующую на вертикальную стенку. Окончательно для  $s(t)$  получим интегродифференциальное уравнение

$$(m + m_a)\ddot{s} + \gamma s + \int_0^t \dot{s}(\tau) M(t - \tau) d\tau = Q(t), \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} M(t) &= \frac{2g\rho}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{th}^2(kH)}{k^2} \cos[\omega(k)t] dk, \\ Q(t) &= \frac{2g\rho}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{\zeta}_0(k)}{k} \text{th}(kH) \{1 - \cos[\omega(k)t]\} dk, \\ m_a &= \frac{16}{\pi^3} \rho H^2 \alpha, \quad \alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} = 1,051\,799\,74\dots \end{aligned}$$

Определив функцию  $s(t)$ , можно вычислить возвышение свободной поверхности:

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) &= \frac{4s(t)}{\pi} \text{arcth}\left[\exp\left(-\frac{\pi x}{2H}\right)\right] + \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\infty} \cos(kx) \tilde{\zeta}_0(k) \cos[\omega(k)t] dk - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\infty} \cos(kx) C(k) \omega(k) \int_0^t s(\tau) \sin[\omega(k)(t - \tau)] d\tau dk \right). \end{aligned}$$

Следует отметить, что интегродифференциальное уравнение (2.9), описывающее колебательное движение стенки, также может быть получено непосредственно из уравнения

движения тела, которое начиная с работы [5] в гидродинамической теории качки корабля обычно используется в виде

$$(m + A^*)\ddot{s} + \gamma\dot{s} + \int_0^t \dot{s}(\tau)N(t - \tau) d\tau = Q(t), \quad (2.10)$$

где

$$A^* = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} A(\sigma), \quad N(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\sigma) \cos(\sigma t) d\sigma, \quad (2.11)$$

функция  $Q(t)$  является возмущающей силой. Функции  $A(\sigma)$  и  $B(\sigma)$  называются соответственно коэффициентами присоединенной массы и демпфирования. Эти функции определены в [6] для задачи о генерации волн малыми колебаниями вертикальной стенки с частотой  $\sigma$  и имеют следующий вид:

$$A(\sigma) = 2\rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(k_n H)}{k_n^2 [k_n H + (1/2) \sin(2k_n H)]}, \quad B(\sigma) = \frac{2\rho\sigma \operatorname{sh}^2(k_0 H)}{k_0^2 [k_0 H + (1/2) \operatorname{sh}(2k_0 H)]}.$$

Здесь  $k_0, k_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — положительные вещественные корни уравнений  $\sigma^2 = gk_0 \operatorname{th}(k_0 H)$ ,  $\sigma^2 = -gk_n \operatorname{tg}(k_n H)$  соответственно.

Легко заметить, что при высокочастотных колебаниях

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} k_n = \frac{\pi}{H} \left( n - \frac{1}{2} \right)$$

и предельное значение коэффициента присоединенной массы равно  $A^* = m_a$ . Выполняя замену переменной интегрирования для функции  $N(t)$  в (2.11), получим  $N(t) = M(t)$ . Следовательно, уравнения (2.9) и (2.10) совпадают.

Ниже проведено сопоставление аналитического решения с численными результатами, полученными с помощью КМГЭ в линейном и нелинейном случаях.

**3. Применение КМГЭ.** Описание данного метода, используемого для решения стационарных задач обтекания донных препятствий потоком тяжелой жидкости конечной глубины со свободной поверхностью, приведено в [7]. Решение ряда нестационарных задач со свободными границами в полной нелинейной постановке представлено в [8, 9].

При численном решении рассматриваемой задачи область течения  $\Omega(t)$  в (1.2) заменяется расчетной областью  $D(t)$ , ограниченной свободной поверхностью  $C_1(t)$  и твердыми стенками: горизонтальным дном  $C_2$  ( $y = -H$ ), вертикальной подвижной стенкой  $C_3(t)$  ( $x = s(t)$ ) и неподвижной вертикальной стенкой  $C_4$ , установленной на достаточно большом расстоянии от стенки  $C_3(t)$  ( $x = L$ ). В области  $D(t)$  требуется определить аналитическую функцию комплексного потенциала

$$w(z, t) = \varphi(x, y, t) + i\psi(x, y, t) \quad (z = x + iy \in D), \quad (3.1)$$

где  $\varphi(x, y, t)$  — потенциал скоростей;  $\psi(x, y, t)$  — функция тока.

На неподвижных твердых границах  $C_2$  и  $C_4$  искомая функция  $w(z, t)$  должна удовлетворять условию непротекания

$$\psi = 0 \quad (z \in C_2, C_4),$$

а на свободной границе  $C_1(t)$  — соответственно кинематическому и динамическому условиям:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + gy = 0 \quad (z \in C_1). \quad (3.2)$$

На левой подвижной стенке  $C_3$  ставится условие

$$\psi(s(t), y, t) = (y + H)\dot{s}(t). \quad (3.3)$$

Алгоритм решения задачи в нелинейной постановке включает следующие этапы. Сначала из граничных условий определяется функция тока  $\psi(x, y, t)$  в (3.1) на твердых стенках  $C_2, C_3, C_4$ ; задаются начальное положение свободной границы  $C_1$  и нулевое распределение потенциала на ней согласно первому условию в (1.9). С использованием КМГЭ находится функция комплексного потенциала  $w(z, t)$  на всей границе области. Затем по найденной функции комплексного потенциала определяются горизонтальная  $u = \partial\varphi/\partial x$  и вертикальная  $v = \partial\varphi/\partial y$  компоненты скорости течения на границе области, при этом на подвижной стенке  $C_3$  полагается  $u = \dot{s}$ . Далее по найденному полю скоростей вычисляется давление. Для этого необходимо решить дополнительную краевую задачу относительно аналитической в области течения функции  $\partial w/\partial t$ :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + i \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (z \in D); \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{1}{2}(u^2 + v^2) - gy \quad (z \in C_1), \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0 \quad (z \in C_2, C_4), \\ \frac{\partial\psi}{\partial t} = v\dot{s} + (y + H)\ddot{s} \quad (z \in C_3). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Используя КМГЭ для расчета аналитической функции (3.4) с граничными условиями (3.5), находим значение  $\partial\varphi/\partial t$  на границе  $C_3$ . После этого давление определяется из соотношения (1.8), а сила, действующая на вертикальную подвижную стенку, — из соотношения (1.11). В результате решения уравнения (1.10) методом Эйлера вычисляются перемещение стенки  $s$ , ее скорость  $\dot{s}$  и ускорение  $\ddot{s}$ . Из граничных условий (3.2) вычисляются новое положение свободной границы и распределение потенциала на ней. В соответствии с найденным значением  $s$  перемещается левая подвижная стенка, и на ней определяется распределение функции тока из условия (3.3). Затем описанный процесс повторяется на следующем шаге по времени.

При решении линейной задачи область, занимаемая жидкостью, считается фиксированной, а граница  $C_1$  совпадает с невозмущенной свободной поверхностью  $y = 0$ . Кинематическое и динамическое условия на свободной поверхности (3.2) принимают вид (2.1). Алгоритм расчета совпадает с алгоритмом решения нелинейной задачи с той лишь разницей, что сила, действующая на левую стенку, определяется не из (1.11), а из соотношения (2.3).

**4. Результаты численных расчетов.** Проведены расчеты для начального возвышения свободной границы  $\zeta_0(x)$  (см. (1.1)) в виде локализованного возвышения с амплитудой  $a$ :

$$\zeta_0(x) = \begin{cases} (a/2)[1 + \cos(\pi(x - x_0)/d)], & |x - x_0| \leq d, \\ 0, & |x - x_0| > d. \end{cases} \quad (4.1)$$

Фурье-преобразование этой функции имеет вид

$$\tilde{\zeta}_0(k) = \frac{a\pi^2 \cos(kx_0) \sin(kd)}{k[\pi^2 - (dk)^2]}.$$

Результаты численных расчетов, представленные ниже, получены при следующих параметрах:  $x_0/H = 0,7$ ,  $d/H = 0,5$ .

Следует отметить, что в покоящейся жидкости с горизонтальной свободной поверхностью на вертикальную стенку действует только гидростатическое давление. Однако при наличии в начальный момент возвышения свободной поверхности к гидростатическому

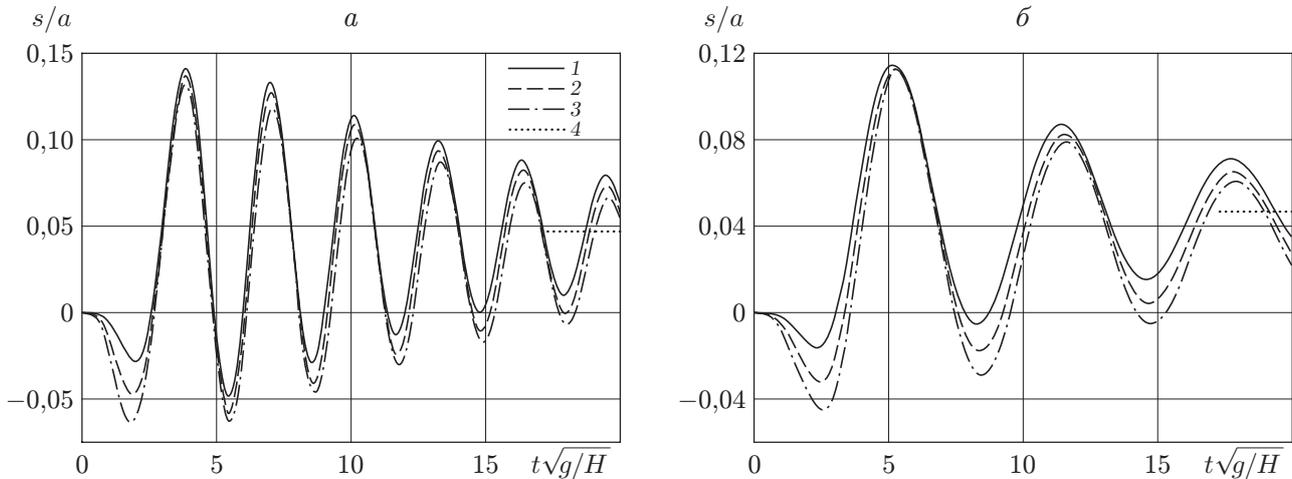


Рис. 2. Зависимость положения стенки от времени при  $\bar{\gamma} = 5$ :

$a$  —  $\bar{m} = 1$ ;  $b$  —  $\bar{m} = 5$ ; 1 — линейное решение; 2, 3 — нелинейное решение (2 —  $a/H = 0,1$ ; 3 —  $a/H = 0,2$ ); 4 — предельные значения функции  $s(t)/a$  при  $t \rightarrow \infty$ , полученные в линейном приближении

давлению добавляется давление, описываемое слагаемым  $\rho(\partial\varphi/\partial t)|_{x=0,t=0}$ . Это давление равно нулю при  $y = \zeta_0(x)$ , но отлично от нуля на стенке  $x = 0$ ,  $-H \leq y < 0$ . При выбранном начальном возвышении (4.1) под действием дополнительного давления стенка сдвигается влево. Это положение принимается в качестве нулевого значения по оси  $x$ . С увеличением времени колебания стенки затухают, свободная поверхность в окрестности стенки возвращается в невозмущенное горизонтальное положение, а стенка занимает положение  $x = s_0$ , определяемое гидростатической нагрузкой без учета начального возвышения. В линейном случае это значение легко вычисляется из решения (2.8) и при выбранных значениях  $x_0$  и  $d$  равно  $s_0 \approx 0,2334a\rho gH/\gamma$ .

Решение интегродифференциального уравнения (2.9) выполнялось численно методом Рунге — Кутты четвертого порядка точности, численное интегрирование проводилось по методу Симпсона. При использовании КМГЭ во всех расчетах длина области  $D$  составляла  $L/H = 30$ , количество расчетных узлов на каждой вертикальной стенке — 40, горизонтальной — 600, шаг по времени  $\Delta t$  был выбран постоянным:  $\Delta t\sqrt{g/H} = 0,001$ . При проведении нелинейных расчетов область течения изменялась во времени в результате перемещения вертикальной стенки и для описания траектории движения точек свободной поверхности применялся лагранжев подход.

На рис. 2 представлены зависимости положения стенки от времени при  $\bar{\gamma} = \gamma/(\rho gH) = 5$  и  $\bar{m} = m/(\rho H^2) = 1, 5$ , определенные как в линейном приближении, так и в нелинейной постановке. Линейные решения, полученные с использованием КМГЭ и в результате интегрирования уравнения (2.9), различаются не более чем на 0,1 %. Видно, что наиболее существенное различие линейного и нелинейного решений имеет место в начальные моменты времени, когда стенка движется влево. При движении стенки вправо максимальное различие решений является незначительным. На рис. 2 пунктирными прямыми показаны предельные значения функций  $s(t)/a$  при  $t \rightarrow \infty$ , полученные при решении линейной задачи.

Зависимости максимального отклонения стенки вправо  $s_m = \max s(t)$  от ее массы, полученные в линейном приближении при различных значениях  $\bar{\gamma}$ , представлены на рис. 3. Видно, что при фиксированном значении  $\bar{\gamma}$  эти зависимости являются немонотонными и

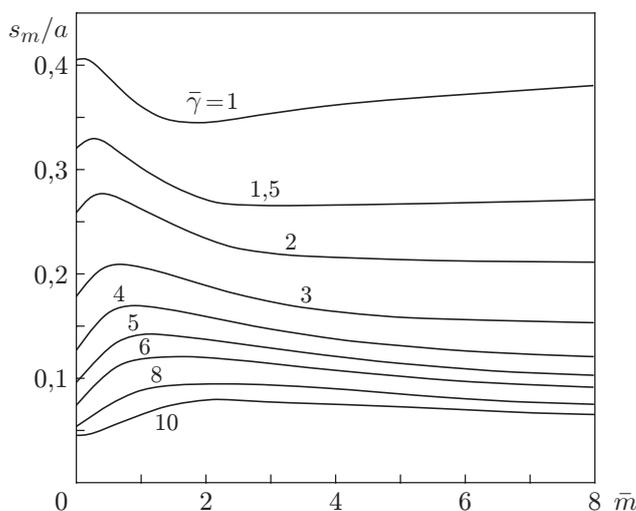


Рис. 3. Зависимость максимальных отклонений стенки от ее массы, полученная в линейном приближении при различных значениях коэффициента жесткости пружин

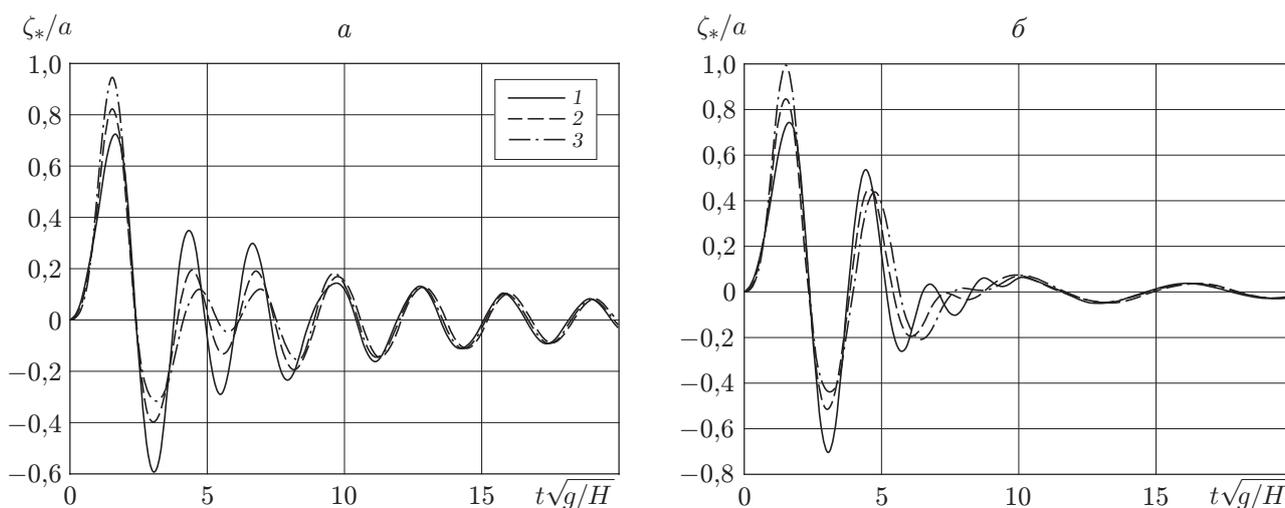


Рис. 4. Изменение уровня жидкости на подвижной стенке при  $\bar{\gamma} = 5$ :  
 а —  $\bar{m} = 1$ ; б —  $\bar{m} = 5$ ; 1 — линейное решение; 2, 3 — нелинейное решение (2 —  $a/H = 0,1$ ; 3 —  $a/H = 0,2$ )

при относительно малых значениях  $\bar{m}$  имеют локальный максимум, но при фиксированном значении  $\bar{m}$  с увеличением  $\bar{\gamma}$  величина  $s_m$  монотонно уменьшается.

На рис. 4 показано изменение уровня свободной поверхности на стенке  $\zeta_*/a$  в зависимости от времени. Следует отметить, что значительные различия представленных решений на начальных периодах колебания уровня со временем уменьшаются и при достаточно больших временах течения жидкости, предсказываемые линейной и нелинейной моделями, совпадают.

**Заключение.** Представлены результаты аналитического и численного решений двумерной нестационарной задачи гидроупругости о взаимодействии поверхностных волн с подвижной вертикальной стенкой, закрепленной на пружинах. Решение задачи в рамках нелинейной модели потенциального течения жидкости получено с помощью КМГЭ, а ре-

шение линеаризованной задачи — двумя методами с использованием как интегральных преобразований, так и КМГЭ. В линейном приближении результаты, полученные обоими методами, совпадают. Сравнение линейных и нелинейных решений показало, что для предсказания основных характеристик рассматриваемого течения может быть использована линеаризованная модель.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Xing J. T.** Natural vibration of two-dimensional slender structure-water interaction systems subject to Sommerfeld radiation condition // *J. Sound Vibration*. 2007. V. 308, N 1/2. P. 67–79.
2. **Peter M. A., Meylan M. H.** Time-dependent interaction of water waves and a vertical elastic plate // *Proc. of the 23rd Intern. workshop on water waves and floating bodies, Jeju (Korea)*, 13–16 Apr. 2008. S. 1., 2008. P. 144–147.
3. **Хажоян М. Г., Хакимзянов Г. С.** Численное моделирование взаимодействия поверхностных волн с подвижной стенкой // *Тр. 9-й Всерос. конф. “Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики”*, 27–29 мая 2008 г. СПб.: Наука. С.-Петербург. отд-ние, 2008. С. 437–440.
4. **Kennard E. H.** Generation of surface waves by a moving partition // *Quart. Appl. Math.* 1949. V. 7, N 3. P. 303–312.
5. **Cummins W. E.** The impulse response function and ship motions // *Schiffstechnik*. 1962. Bd 9, N 47. S. 101–109.
6. **Billingham J., King A. C.** *Wave motion*. Cambridge, 2000. (Ser. Cambridge texts in applied mathematics/ Cambridge Univ. Press; N 24).
7. **Афанасьев К. Е., Стуколов С. В.** О наличии трех решений при обтекании препятствий сверхкритическим установившимся потоком тяжелой жидкости // *ПМТФ*. 1999. Т. 40, № 1. С. 27–35.
8. **Афанасьев К. Е., Стуколов С. В.** Численное моделирование взаимодействий уединенных волн с препятствиями // *Вычисл. технологии*. 1999. Т. 4, № 6. С. 3–16.
9. **Afanasiev K. E., Stukolov S. V.** Simulation of problems with free surface by a boundary element method // *Вычисл. технологии*. 2003. Т. 8. С. 3–33. Спецвыпуск. Ч. 3.

*Поступила в редакцию 26/XI 2008 г.*

---