ПМТФ, № 1, 1972

УДК 532.72+66.096.5

ДИФФУЗИЯ ЧАСТИЦ В ОДНОРОДНОМ ПСЕВДООЖИЖЕННОМ СЛОЕ

Ю. А. Буевич, О. В. Чубанов

(*Москва*)

Коэффициенты продольной и поперечной диффузии частиц вычислены при произвольном значении числа Рейнольдса, характеризующего обтекание частиц псевдоожижающей средой. Проведено сравнение с экспериментом.

Диффузия мелких взвешенных частиц в условиях однородного псевдоожижения при числе Рейнольдса частицы $R < 1$ была рассмотрена в [1,2]. Однако в большинстве случаев псевдоожиженные слои, встречающиеся на практике (в том числе и однородные), характеризуются значениями R, равными нескольким десяткам или даже сотням. В этих случаях взаимодействие псевдоожижающей среды с частицами нелинейно не только по концентрации слоя, но и по относительной скорости взвешивающего потока. Ниже предложено обобщение результатов [1,2] на псевдоожиженные слои сравнительно крупных частиц, когда R высоко. Слой предполагается однородным в том смысле, что в нем не образуются «пузыри», заполненные только псевдоожижающей средой, а также агрегаты, состоящие из большого числа частиц. Частицы в таком слое можно приближенно рассматривать как статистически независимые.

Используем ниже систему координат, в которой частицы в среднем покоятся, и направим ось x_1 вдоль средней относительной скорости взвешивающего потока u. Эту скорость, а также среднюю объемную концентрацию частиц в слое ρ считаем независящими от координат и времени. В указанной системе координат тензор диффузии взвешенных частиц, обусловленной их случайными псевдотурбулентными пульсациями, диагонален, и его собственные значения можно представить в виде [1]

$$D_i = \frac{\pi}{2} \int \Psi_{wi,wi}(0, \mathbf{k})\, d\mathbf{k} \tag{1}$$

где $\Psi_{wi,wi}(\omega, \mathbf{k})$ — диагональная компонента тензора спектральной плотности случайной скорости частиц $\mathbf{w}'$, ω и $\mathbf{k}$ — частота и волновой вектор пульсаций. Эта величина обычным образом выражается через спектральную меру $d\mathbf{Z}_w$ процесса $\mathbf{w}'$, входящую в его представление в виде стохастического интеграла Фурье — Стильтьеса. Уравнения для $d\mathbf{Z}_w$, а также для спектральных мер $d\mathbf{Z}_v$, dZ_p, dZ_ρ пульсаций скорости $\mathbf{v}'$ и давления p' жидкости в промежутках между частицами и пульсаций концентрации ρ' получаются из стохастических уравнений для указанных пульсаций. В рассматриваемом случае эти уравнения отличаются от использованных в [1,2] только в том отношении, что изменяется выражение для спектральной меры $d\mathbf{Z}_F$ пульсации силы взаимодействия частиц с жидкостью $\mathbf{F}'$.

Используя, как и в [1,2], результаты Эргана [3], для стационарной силы, действующей на частицы в единице объема невозмущенного слоя, имеем

$$\mathbf{F} = d_0\rho\,(\beta_1 K_1 + \beta_2 K_2 u)\,\mathbf{u} \qquad (\rho \gtrsim 0.2 - 0.3)$$

$$\beta_1 = \frac{75}{2}\frac{\nu_0}{a^2}, \quad \beta_2 = \frac{1.75}{2}\frac{1}{a}, \quad K_1 = K = \frac{\rho}{1-\rho},$$

$$K_2 = 1, \quad \nu_0 = \frac{\mu_0}{d_0} \tag{2}$$

где d_0, μ_0 — плотность и вязкость жидкости, a — радиус частиц. Соответствующее (2) выражение для $d\mathbf{Z}_F$ имеет вид

$$d\mathbf{Z}_F = d_0\rho\,[(\beta_1 K + \beta_2 u)\,d\mathbf{Z}_u + \beta_2\,(\mathbf{u}_0 d\mathbf{Z}_u)\,\mathbf{u} + \beta_1 K'\mathbf{u}dZ_\rho] - i\mathbf{k}\rho d\mathbf{Z}_p \qquad (3)$$

$$d\mathbf{Z}_u = d\mathbf{Z}_v - d\mathbf{Z}_w, \quad \mathbf{u}_0 = \frac{\mathbf{u}}{u}, \quad K' = \frac{dK}{d\rho}$$

(компоненты $d\mathbf{Z}_F$, обусловленные различными нестационарными эффектами, можно здесь не учитывать, так как для определения D_i согласно (1) достаточно рассмотреть уравнения только при нулевой частоте $\omega = 0$). При $\beta_2 = 0$ выражения (2), (3) переходят в использованные в [2] при вычислении коэффициентов диффузии для мелких частиц ($R < 1$).

Уравнения для спектральных мер при $\omega = 0$ запишутся в форме [1,2]

$$\mathbf{uk}dZ_\rho = (1-\rho)\,\mathbf{k}d\mathbf{Z}_v, \qquad d\mathbf{Z}_F = 0$$

$$i\,d_0\,(1-\rho)\,(\mathbf{uk})\,d\mathbf{Z}_v = -i\mathbf{k}dZ_p - \mu_0 S\,[k^2 d\mathbf{Z}_v - {}^1/_3\mathbf{k}\,(\mathbf{k}d\mathbf{Z}_v)] \qquad (4)$$

Здесь $S = S\,(\rho)$ — функция, учитывающая отклонение эффективной вязкости жидкости, фильтрующейся через зернистую насадку, от μ_0 (эта функция вводилась также и в [1]).

Из (3) и (4) имеем выражение для $d\mathbf{Z}_w$

$$dZ_{wj} = \frac{dZ_\rho}{\beta_1 K + \beta_2 u\,(1+\delta_{1j})}\Big\{\beta_1 K' u_j + \frac{u}{1-\rho}\,\frac{k_1 k_j}{k^2}\,[\beta_1 K +$$

$$+ \beta_2 u\,(1+\delta_{1j}) + {}^4/_3\nu_0 S k^2 + i\,(1-\rho)\,u k_1]\Big\} \qquad (5)$$

Отсюда следуют представления для диагональных компонент тензора спектральной плотности случайного вектора $\mathbf{w}'$, справедливые при $\omega = 0$

$$\Psi_{w1,\,w1}(0,\mathbf{k}) = \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(1 + \frac{3.5}{150}\,\frac{R}{\rho}\Big)^{-2}\Big\{\Big[\frac{d\ln K}{d\rho} + \frac{k_1^2}{\varepsilon k^2}\,\times$$

$$\times\Big(1 + \frac{3.5}{150}\,\frac{R}{\rho} + \frac{8}{225}\,\frac{\varepsilon S}{\rho}\,ak\,)^2\Big)\Big]^2 + \Big(\frac{1}{75}\,\frac{ak_1^3}{k^2}\,\frac{R}{\rho}\Big)^2\Big\}\,\Psi_{\rho,\rho}(0,\mathbf{k})$$

$$\Psi_{wj,\,wj}(0,\mathbf{k}) = \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(1 + \frac{1.75}{150}\,\frac{R}{\rho}\Big)^{-2}\Big[\Big(1 + \frac{1.75}{150}\,\frac{R}{\rho} + \qquad (6)$$

$$+ \frac{8}{225}\,\frac{\varepsilon S}{\rho}\,(ak)^2\Big)^2 + \Big(\frac{1}{75}\,\frac{ak_1\varepsilon R}{\rho}\Big)^2\Big]\,\frac{k_1^2 k_j^2}{\varepsilon^2 k^4}\,\Psi_{\rho,\rho}(0,\mathbf{k}) \quad (j = 2,\,3)$$

$$\varepsilon = 1 - \rho, \quad Q = \varepsilon u, \quad R = 2aQ\nu_0^{-1}$$

Здесь введены средняя пористость слоя ε, скорость фильтрации (объемный расход) жидкости Q и число Рейнольдса R.

Функция S (ρ) при больших R неизвестна; однако, как было показано в [1], она весьма слабо влияет на коэффициенты диффузии. Пренебрегая этой функцией, а также относительно малыми последними членами в скобках в (6), получим приближенно

$$\Psi_{w1,\,w1}(0,\mathbf{k}) \approx \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(1 + \frac{3.5}{150}\,\frac{R}{\rho}\Big)^{-2}\Big[\frac{d\ln K}{d\rho} + \frac{k_1^2}{\varepsilon k^2}\Big(1 + \frac{3.5}{150}\,\frac{R}{\rho}\Big)\Big]^2\,\times$$

$$\times\, Q^2\Psi_{\rho,\rho}(0,\mathbf{k}), \;\; \Psi_{wj,\,wj}(0,\mathbf{k}) \approx \frac{1}{\varepsilon^4}\,\frac{k_1^2 k_j^2}{k^4}\,Q^2\Psi_{\rho,\rho}(0,\mathbf{k}) \quad (j = 2,3) \qquad (7)$$

Для спектральной плотности величины ρ' используем выражение, полученное в [4]. Тогда

$$\Psi_{\rho,\rho}(0, \mathbf{k}) = \frac{\Phi_{\rho,\rho}(\mathbf{k})}{\pi D \mathbf{k}\mathbf{k}}, \quad \Phi_{\rho,\rho}(\mathbf{k}) = \frac{\Phi}{k_0^3} Y(k_0 - k)$$
$$\Phi = \frac{3}{4\pi}\rho^2\left(1 - \frac{\rho}{\rho_*}\right), \quad k_0^3 = \frac{9\pi\rho}{2}\frac{1}{a^3} \tag{8}$$

где $Y(x)$ — функция Хэвисайда, а ρ_* — концентрация слоя частиц в плотноупакованном состоянии.

Вычисляя, из (1), (7) и (8) получаем уравнения

$$D_1 D_2 = \frac{2\pi\Phi}{k_0^2}\frac{\gamma^2 Q^2}{\varepsilon^4}(\alpha^2 J_0 + 2\alpha J_2 + J_4) \tag{9}$$

$$D_2^2 = \frac{\pi\Phi}{k_0^2}\frac{\gamma^2 Q^2}{\varepsilon^4}(J_2 - J_4), \quad J_n = \int_0^1 \frac{t^n dt}{t^2 + \gamma^2}, \quad D_3 \equiv D_2$$

Здесь введены безразмерные параметры

$$\alpha = \varepsilon \frac{d \ln K}{d\rho}\left(1 + \frac{3.5}{150}\frac{R}{\rho}\right)^{-1} = \frac{1}{\rho + 0.233R}, \quad \gamma = \left(\frac{D_2}{D_1 - D_2}\right)^{1/2} \tag{10}$$

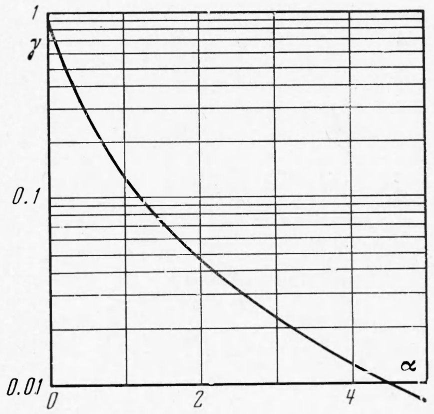
Из уравнений (9) получаем трансцендентное уравнение для γ и выражения D_1, D_2 и D_3 через единственный положительный корень этого уравнения

$$2\gamma^2(\alpha^2 J_0 + 2\alpha J_2 + J_4) = (1 + \gamma^2)(J_2 - J_4)$$
$$D_j = D_j^0 aQ \quad (j = 1, 2, 3), \quad D_2^0 \equiv D_3^0 = N_D D_1^0 \tag{11}$$
$$D_1^0 = 0.358\frac{\rho^{2/3}}{(1-\rho)^2}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_*}\right)^{1/2}\frac{1+\gamma^2}{\gamma}(J_2 - J_4)^{1/2}$$

При $R = 0$ эти уравнения обращаются в рассмотренные в [1,2].

Отметим, что соотношения (11) описывают диффузию частиц не только в псевдоожиженном слое, но и вообще в течениях суспензий как мелких, так и крупных частиц, если только пространственный и временной масштабы среднего течения значительно превышают соответствующие масштабы псевдотурбулентных пульсаций.

Решение первого уравнения (11) как функция параметра α из (10) представлено на фиг. 1. На фиг. 2 и фиг. 3 показаны зависимости N_D и D_1^0 от ρ при $\rho_* = 0.60$ и разных R (кривые 1—9 на фиг. 2 и фиг. 3 построены при значениях R, равных ∞, 200, 100, 80, 60, 40, 20, 10 и 0 соответственно).

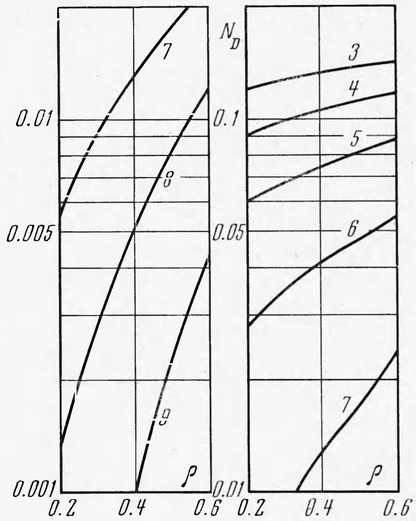


Фиг. 1

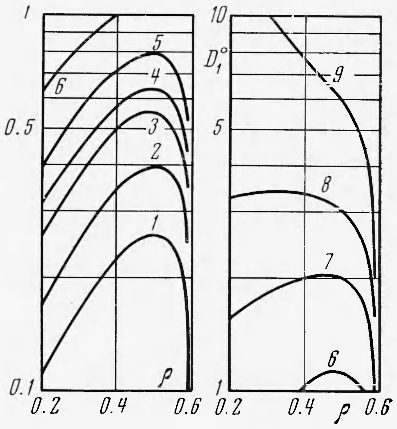
Видно, что псевдотурбулентная диффузия частиц при малых R резко анизотропна (N_D мало), как это было отмечено еще в [1]. Однако величина N_D быстро возрастает с увеличением R; так, при $R = 200$ и $R \to \infty$ она практически не зависит от ρ и равна 0.226 и 0.420 соответственно. Таким образом, в однородном псевдоожиженном слое достаточно крупных частиц продольная диффузия лишь в 2.5—5 раз интенсивнее поперечной. С увеличением R в интервале (0.20) максимум зависимости $D_1^0 = D_1^0(\rho)$ быстро сдвигается в сторону более высоких ρ; если $R \geqslant 50$, этот максимум достигается при $\rho \approx 0.5$ (напомним, что в расчетах было использовано $\rho_* = 0.60$; при других ρ_* положение максимума может, конечно, изменяться).

Пусть в момент перехода слоя в псевдоожиженное состояние слой характеризуется значением $R = R_*$. По мере увеличения расхода Q концентрация ρ монотонно убывает, а параметр R линейно растет. В результате разным состояниям слоя одних и тех же частиц, псевдоожиженных одной и той же жидкостью, будут соответствовать точки на разных кривых на фиг. 2 и фиг. 3. В связи с этим представляет интерес построение зависимостей $N_D(\rho)$, $D_1^0(\rho)$ не только при фиксированных R, но и для различных конкретных слоев.

В литературе имеется большое число косвенных выводов о диффузии частиц, как это уже обсуждалось в [1], развиваемая теория в целом согласуется с этими выводами. Однако систематических и в какой-то мере исчерпывающих исследований псевдотурбулентной диффузии, которые позволили бы осуществить количественную поверку теории, очень мало. Ниже рассмотрены опыты Карлоса и Ричардсона [5], в которых определялись, в частности, коэффициенты продольной диффузии частиц в однородном слое стеклянных сфер диаметром ~0.9 *см*, псевдоожиженных диметилфталатом (вязкость 0.1 *пз*).

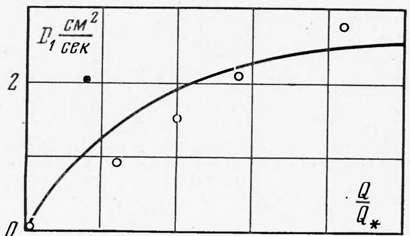


Фиг. 2



Фиг. 3

В [5] исследовали динамику расплывания тонкого горизонтального слоя меченых сфер, вводимого в неподвижную насадку, которую затем псевдоожижали. Коэффициент D_1 определяли из сравнения измеренных профилей концентрации меченых сфер в разные моменты времени с решениями уравнения Фика, соответствующими различным D_1. Против такого метода можно выдвинуть по крайней мере два серьезных возражения. Во-первых, при достаточно малых временах диффузия описывается не уравнением Фика, а более сложным уравнением гиперболического типа [4]. Во-вторых, и это особенно существенно, в условиях опытов [5] имелась интенсивная циркуляция взвешенного материала в слое, так что расплывание меченых частиц было вызвано не столько собственно диффузией, сколько конвективным переносом частиц (для сравнения укажем, что средняя скорость восходящего движения частиц в центральной области слоя W_1 была равна 1—4 *см/сек*, в то время как скорость фильтрации Q_* в начале псевдоожижения составляла всего 4.8 *см/сек*).



Фиг. 4

Наличие восходящего течения частиц в центре слоя и нисходящего у стенок в условиях псевдоожижения, близких к таковым в [5], легко усматривается из фотографий расплывания меченых частиц в слое, приведенных в работе [6]. Важная роль конвективного переноса частиц циркуляционными вторичными течениями подчеркивается также в [7]. Из сказанного следует, что значения D_1, полученные в [5] указанным методом, существенно завышены и не могут быть использованы для характеристики собственно диффузии частиц.

Кроме того, в [5] определяли составляющую $\langle(\Delta x_1)^2\rangle$ среднего квадрата вертикального смещения частиц за время Δt, обусловленную пульсациями частиц. Как и следовало ожидать, эта величина оказалась пропорциональной Δt, что позволило определить истинный коэффициент диффузии D_1 из формулы Эйнштейна

$$\langle(\Delta x_1)^2\rangle = 2D_1\Delta t \tag{12}$$

Если при усреднении используется траектория единственной выделенной частицы, то эта формула справедлива лишь в случае, когда Δt намного превышает временной масштаб пульсаций. Если усреднение проводится по многим частицам (т. е. фактически по ансамблю), как, по-видимому, это было сделано в [5], то формула (12) справедлива при любых Δt. Значения D_1, определенные согласно (12) в опытах [5], показаны светлыми кружками на фиг. 4.

Характерный масштаб ΔT времени измерения в [5] составлял 10 *сек*. Конвективное смещение частицы за это время $X_c \approx W_1\Delta T \sim 10—40$ *см*, в то время как соответствующее среднеквадратичное смещение, обусловленное диффузией, $X_d \approx \sqrt{2D_1\Delta T} \sim 1—5$ *см*, что значительно меньше X_c. Из этой оценки ясно видна неадекватность первого метода определения D_1 в работе [5].

Плотноупакованное состояние слоя в экспериментах [5] соответствовало простой кубической укладке, так что $\rho_* = 0.524$ (это значение легко получить пересчетом значений Q и ρ, приведенных в [5], к начальному псевдоожиженному состоянию, когда $Q = Q_*$). Число Рейнольдса изменялось от 50 до 160 при изменении Q/Q_* от 1 до ~ 3.1. Теоретическая зависимость для D_1, подсчитанная из (11) для указанных значений ρ_* и R, также приведена на фиг. 4. Учитывая сложность самой теории и многочисленные трудности, возникающие при постановке тонких экспериментов с псевдоожиженным слоем, и, особенно, при их интерпретации, соответствие между теоретическими и опытными данными можно считать вполне удовлетворительным. Заметим, что общий характер кривой на фиг. 4 подтверждается также данными, приведенными в [6]. Несколько значений D_1 были получены и в работе [7], в которой исследовали модельный «двумерный» слой полых шаров диаметром 3.5 *см*, псевдоожиженных воздухом, что соответствовало весьма высоким значениям R. К сожалению, в [7] не приводится всех данных, необходимых для полной оценки полученных там результатов и, в частности, для сравнения с теорией. Однако ясно, что зависимость D_1 от Q/Q_* должна в этом случае идти значительно выше кривой на фиг. 4. Для иллюстрации на фиг. 4 темным кружком отмечена одна из экспериментальных точек [7].

Дальнейшее сопоставление теории с экспериментом и, возможно, ее некоторая коррекция в настоящее время затруднены в связи с отсутствием других достаточно надежных экспериментальных данных по диффузии частиц в дисперсных системах.

Поступила 22 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Б у е в и ч Ю. А., М а р к о в В. Г. Псевдотурбулентная диффузия частиц в однородных суспензиях. ПМТФ, 1970, № 1.
2. Б у е в и ч Ю. А. Локальные пульсации и взаимодействие фаз в суспензиях мелких частиц. ПМТФ, 1971, № 4.
3. E r g u n S. Fluid flow through packed columns. Chem. Engng. Progr., 1952, vol. 48, No. 2.
4. Б у е в и ч Ю. А. Спектральная теория концентрации дисперсных систем. ПМТФ, 1970, № 6.
5. C a r l o s C. R., R i c h a r d s o n J. F. Solid movement in liquid fluidised beds. I. Particle velocity distribution. II. Measurements of axial mixing coefficients. Chem. Engng Sci., 1968, vol. 23, No. 8.
6. R o w e P. N., P a r t r i d g e B. A., C h e n e y A. G., H e n w o o d G. A., L y a l l E. The mechanisms of solid mixing in fluidised beds. Trans. Inst. Chem. Engrs London, 1965, vol. 43, No. 9.
7. Т о д е с О. М., Б о н д а р е в а А. К., Г р и н б а у м М. Б. Движение и перемешивание частиц твердой фазы в псевдоожиженном слое. Хим. пром-сть, 1966, № 6.