РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

2003, том 39, № 1

УДК 621.391

А. П. Трифонов, К. А. Зимовец

(Воронеж)

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОБНАРУЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ НА ФОНЕ ШУМА*

Получены точные формулы для характеристик обнаружения неоднородного изображения с неизвестной площадью по методу максимального правдоподобия.

В последние годы активно развиваются методы дистанционного наблюдения, при которых должна учитываться пространственная протяженность реальных объектов. Это объясняется существенно возросшей разрешающей способностью систем дистанционного наблюдения. Вопросы обнаружения пространственно протяженных объектов рассматривались в работах [1–4] и других. При этом, как правило, предполагалось, что изображения пространственно протяженных объектов однородны, так что их интенсивность постоянна [3, 4], хотя может быть неизвестна [3]. В реальных условиях, вследствие свойств пространственно протяженного объекта или в силу неоднородности среды распространения, интенсивность изображения обычно является функцией координат, так что изображение оказывается неоднородным. В связи с чем представляет интерес анализ эффективности обнаружения неоднородного изображения с неизвестной площадью.

Положим, что в области G обработке доступна реализация случайного поля:

$$\xi(x,y)=\gamma_0 s(x,y;\chi_0)+n(x,y), \quad x,y\in G. \tag{1}$$

Здесь

$$s(x,y;\chi_0)=F(x,y)I(x,y;\chi_0) \tag{2}$$

– полезное изображение с интенсивностью $F(x,y)$, которое занимает область $\Omega(\chi_0)$ с площадью χ_0. Форма области $\Omega(\chi)$ с площадью χ, занимаемой

* Работа выполнена при поддержке CRDF, Министерства образования РФ и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № VZ-010-0, № Т02-3.1-71, № 03-01-00145).

изображением, описывается индикатором

$$I(x,y;\chi)=\begin{cases}1, & x,y\in\Omega;\\ 0, & x,y\overline{\in}\Omega.\end{cases}$$

В (1) $n(x,y)$ – гауссовский пространственный белый шум с односторонней спектральной плотностью N_0; неизвестная площадь изображения χ_0 принимает значения из априорного интервала $[\chi_{\min},\chi_{\max}]$; $\gamma_0=1$ или $\gamma_0=0$ – дискретный параметр, отражающий наличие или отсутствие полезного изображения.

Найдем вероятности ошибок первого и второго рода при обнаружении изображения (2) приемником максимального правдоподобия. В соответствии с методом максимального правдоподобия [5] для обнаружения изображения (2) необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия

$$L(\chi)=\frac{2}{N_0}\iint\limits_G \xi(x,y)s(x,y;\chi)dxdy-\frac{1}{N_0}\iint\limits_G s^2(x,y;\chi)dxdy \tag{3}$$

для всех значений $\chi\in[\chi_{\min},\chi_{\max}]$. Решение о наличии изображения принимается, когда $\sup L(\chi)>h$, $\chi\in[\chi_{\min},\chi_{\max}]$, где h – заданный порог. Следовательно, вероятности ложной тревоги и пропуска изображения можно записать в виде

$$\alpha=P\left[\sup_{\chi_{\min}\le\chi\le\chi_{\max}} L(\chi)>h\,|\,\gamma_0=0\right],$$

$$\beta=P\left[\sup_{\chi_{\min}\le\chi\le\chi_{\max}} L(\chi)<h\,|\,\gamma_0=1\right].$$

Для определения характеристик обнаружения исследуем статистические характеристики случайной функции (3). Подставляя (1) в (3), перепишем функцию $L(\chi)$ как

$$L(\chi)=\gamma_0 S(\chi_0,\chi)-Q(\chi)/2+N(\chi). \tag{4}$$

Здесь

$$N(\chi)=\frac{2}{N_0}\iint\limits_G n(x,y)s(x,y;\chi)dxdy \tag{5}$$

– шумовая функция;

$$S(\chi_0,\chi)=\frac{2}{N_0}\iint\limits_G s(x,y;\chi_0)s(x,y;\chi)dxdy \tag{6}$$

– сигнальная функция;

$$Q(\chi)=\frac{2}{N_0}\iint\limits_G s^2(x,y;\chi)dxdy \tag{7}$$

– отношение сигнал/шум для изображения с площадью χ. Шумовая функция $N(\chi)$ (5) является центрированным гауссовским случайным процессом, обладающим корреляционной функцией

$$\langle N(\chi_1)N(\chi_2)\rangle=\frac{2}{N_0}\iint\limits_G s(x,y;\chi_1)s(x,y;\chi_2)dxdy=S(\chi_1,\chi_2). \tag{8}$$

Обозначим через $\Omega_{\min}(\chi_1,\chi_2)$ одну из двух областей $\Omega(\chi_1)$ и $\Omega(\chi_2)$, которая обладает меньшей площадью. Подставляя далее (2) в (6) и (7), имеем

$$S(\chi_0,\chi)=\frac{2}{N_0}\iint\limits_{\Omega_{\min}(\chi_0,\,\chi)} F^2(x,y)dxdy, \tag{9}$$

$$Q(\chi)=\frac{2}{N_0}\iint\limits_{\Omega(\chi)} F^2(x,y)dxdy. \tag{10}$$

Согласно (10) отношение сигнал/шум всегда является неубывающей функцией площади χ.

Положим, что функция $F(x,y)$, описывающая распределение интенсивности полезного изображения, может обращаться в нуль только на части области $\Omega(\chi)$, имеющей нулевую меру. Тогда $Q(\chi)$ (10) является монотонно возрастающей функцией площади изображения χ и (9) можно переписать как

$$S(\chi_1,\chi_2)=\min[Q(\chi_1),Q(\chi_2)]. \tag{11}$$

Перейдем в (4) к новой переменной

$$\lambda=Q(\chi), \tag{12}$$

причем $\lambda\in[\Lambda_{\min},\Lambda_{\max}]$, где $\Lambda_{\min}=Q(\chi_{\min})$, $\Lambda_{\max}=Q(\chi_{\max})$. Учитывая (9)–(12), можем представить (4) в виде

$$L(\chi)=L[\chi(\lambda)]=\mu(\lambda)=\gamma_0\min(\lambda,\lambda_0)-\lambda/2+\nu(\lambda), \tag{13}$$

где $\lambda_0=Q(\chi_0)$, $\nu(\lambda)=N[\chi(\lambda)]$, а $\chi(\lambda)$ определяется из решения уравнения $Q(\chi)=\lambda$. Из (8), (11) и (12) следует, что центрированный гауссовский случайный процесс $\nu(\lambda)$ обладает корреляционной функцией

$$\langle\nu(\lambda_1)\nu(\lambda_2)\rangle=\min(\lambda_1,\lambda_2). \tag{14}$$

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию [6]

$$F(u\,|\,\gamma_0)=P\left(\sup_{\Lambda_{\min}\le\lambda\le\Lambda_{\max}}\mu(\lambda)<u\,|\,\gamma_0\right). \tag{15}$$

Тогда характеристики обнаружения (вероятность ложной тревоги и вероятность пропуска изображения) можно записать в виде

$$\alpha=P\left[\sup_{\Lambda_{\min}\le\lambda\le\Lambda_{\max}}\mu(\lambda)>h\,|\,\gamma_0=0\right]=1-F(h\,|\,0), \tag{16}$$

$$\beta=P\left[\sup_{\Lambda_{\min}\le\lambda\le\Lambda_{\max}}\mu(\lambda)<h\,|\,\gamma_0=1\right]=F(h\,|\,1). \tag{17}$$

Согласно (13), (14) гауссовский случайный процесс $\mu(\lambda)$ является марковским и обладает коэффициентами сноса и диффузии соответственно:

$$K_1=\begin{cases}\gamma_0-1/2, & \lambda<\lambda_0,\\ -1/2, & \lambda>\lambda_0;\end{cases}\qquad K_2=1. \tag{18}$$

Воспользовавшись марковскими свойствами функции $\mu(\lambda)$ (13), вспомогательную функцию (15) можно записать как

$$F(u\,|\,\gamma_0)=\int_{-\infty}^{u}W(x,\Lambda_{\max})dx. \tag{19}$$

Здесь $W(x,\Lambda_{\max})=W(x,\lambda=\Lambda_{\max})$, а $W(x,\lambda)$ – решение уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова [7]:

$$\frac{\partial W(x,\lambda)}{\partial\lambda}+\frac{\partial}{\partial x}[K_1W(x,\lambda)]-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[K_2W(x,\lambda)]=0 \tag{20}$$

с коэффициентами (18) при начальном условии

$$W(x,\Lambda_{\min})=\frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda_{\min}}}\exp\left[-\frac{(x-(\gamma_0-1/2)\Lambda_{\min})^2}{2\Lambda_{\min}}\right]$$

и граничных условиях $W(x,\lambda)\big|_{x=u}=0$, $W(x,\lambda)\big|_{x=-\infty}=0$ при $\lambda\in[\Lambda_{\min},\Lambda_{\max}]$.

Применяя метод отражения с переменой знака [7], находим решение уравнения (20). Если $\lambda\le\lambda_0$, то

$$W(x,\lambda)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(\lambda-\Lambda_{\min})\Lambda_{\min}}}\times$$

$$\times\int_0^\infty\left\{\exp\left[-\frac{(x_1-x-(\gamma_0-1/2)(\lambda_0-\Lambda_{\min}))^2}{2(\lambda_0-\Lambda_{\min})}\right]-\exp[2(\gamma_0-1/2)x_1]\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left[-\frac{(x_1+x+(\gamma_0-1/2)(\lambda_0-\Lambda_{\min}))^2}{2(\lambda_0-\Lambda_{\min})}\right]\right\}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{(x_1-u+(\gamma_0-1/2)\Lambda_{\min})^2}{2\Lambda_{\min}}\right]dx_1. \tag{21а}$$

Соответственно при $\lambda_0<\lambda$

$$W(x,\lambda)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0-\Lambda_{\min})\Lambda_{\min}}}\times$$

$$\times\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{\exp\left[-\frac{(x_1-x_2-(\gamma_0-1/2)(\lambda_0-\Lambda_{\min}))^2}{2(\lambda_0-\Lambda_{\min})}\right]-\exp[2(\gamma_0-1/2)x_1]\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left[-\frac{(x_1+x_2+(\gamma_0-1/2)(\lambda_0-\Lambda_{\min}))^2}{2(\lambda_0-\Lambda_{\min})}\right]\right\}\times$$

$$\times\left\{\exp\left[-\frac{(x_2+x-u+(\lambda-\lambda_0)/2)^2}{2(\lambda-\lambda_0)}\right]-\right.$$

$$\left.-\exp(-x_2)\exp\left[-\frac{(x_2-x+u-(\lambda-\lambda_0)/2)^2}{2(\lambda-\lambda_0)}\right]\right\}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{(x_1-u+(\gamma_0-1/2)\Lambda_{\min})^2}{2\Lambda_{\min}}\right]dx_1dx_2. \tag{21б}$$

Подставляя (21) в (19), для вспомогательной функции (15) можем записать:

$$F(u\,|\,\gamma_0)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(\lambda_0-\Lambda_{\min})\Lambda_{\min}}}\times$$

$$\times\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{\exp\left[-\frac{(x_1-x_2-(\gamma_0-1/2)(\lambda_0-\Lambda_{\min}))^2}{2(\lambda_0-\Lambda_{\min})}\right]-\exp[2(\gamma_0-1/2)x_1]\times\right.$$

$$\times \exp\left[-\frac{(x_1 + x_2 + (\gamma_0 - 1/2)(\lambda_0 - \Lambda_{\min}))^2}{2(\lambda_0 - \Lambda_{\min})}\right]\Bigg\} \times$$

$$\times \left\{ \Phi\left[\frac{(\Lambda_{\max} - \lambda_0)/2 + x_3}{\sqrt{\Lambda_{\max} - \lambda_0}}\right] - \exp(-x_3)\Phi\left[\frac{(\Lambda_{\max} - \lambda_0)/2 - x_3}{\sqrt{\Lambda_{\max} - \lambda_0}}\right]\right\} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{(x_1 - u + (\gamma_0 - 1/2)\Lambda_{\min})^2}{2\Lambda_{\min}}\right] dx_1 dx_2. \qquad (22)$$

Здесь $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2)dt$ – интеграл вероятности.

Подставляя (22) в (16) и (17), после несложных, но громоздких преобразований находим точные выражения для вероятностей ложной тревоги и пропуска изображения соответственно:

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi Q(\chi_{\min})}} \int\limits_0^{\infty} \left\{ \Phi\left[\frac{(Q(\chi_{\max}) - Q(\chi_{\min}))/2 + x}{\sqrt{Q(\chi_{\max}) - Q(\chi_{\min})}}\right] - \right.$$

$$\left. - \exp(-x)\Phi\left[\frac{(Q(\chi_{\max}) - Q(\chi_{\min}))/2 - x}{\sqrt{Q(\chi_{\max}) - Q(\chi_{\min})}}\right]\right\} \exp\left[-\frac{(x - h - Q(\chi_{\min})/2)^2}{2Q(\chi_{\min})}\right] dx, \qquad (23)$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi Q(\chi_0)}} \int\limits_0^{\infty} \left\{ \Phi\left[\frac{(Q(\chi_{\max}) - Q(\chi_0))/2 + x}{\sqrt{Q(\chi_{\max}) - Q(\chi_0)}}\right] - \right.$$

$$\left. - \exp(-x)\Phi\left[\frac{(Q(\chi_{\max}) - Q(\chi_0))/2 - x}{\sqrt{Q(\chi_{\max}) - Q(\chi_0)}}\right]\right\} \exp\left[-\frac{(x + Q(\chi_0)/2)^2 + h^2 - hQ(\chi_0)}{2Q(\chi_0)}\right] \times$$

$$\times \left\{ \exp\left[\frac{xh}{Q(\chi_0)}\right] \Phi\left[h\sqrt{\frac{Q(\chi_0) - Q(\chi_{\min})}{Q(\chi_{\min})Q(\chi_0)}} + x\sqrt{\frac{Q(\chi_{\min})}{(Q(\chi_0) - Q(\chi_{\min}))\lambda_0}}\right] - \right.$$

$$\left. - \exp\left[-\frac{xh}{Q(\chi_0)}\right] \Phi\left[h\sqrt{\frac{Q(\chi_0) - Q(\chi_{\min})}{Q(\chi_{\min})Q(\chi_0)}} - x\sqrt{\frac{Q(\chi_{\min})}{(Q(\chi_0) - Q(\chi_{\min}))\lambda_0}}\right]\right\} dx. \qquad (24)$$

Рассмотрим случай, когда площадь обнаруживаемого изображения априори точно известна. Тогда, полагая $\Lambda_{\min} \to \Lambda_{\max} \equiv \lambda_0$ в (23) и $\Lambda_{\min} \to \lambda_0$,

$\Lambda_{max} \to \lambda_0$ в (24), получаем известные точные выражения для вероятностей ложной тревоги и пропуска изображения с априори известной площадью [5]:

$$\alpha_0 = 1 - \Phi\left[\frac{h + Q(\chi_0)/2}{\sqrt{Q(\chi_0)}}\right], \qquad \beta_0 = \Phi\left[\frac{h - Q(\chi_0)/2}{\sqrt{Q(\chi_0)}}\right]. \tag{25}$$

Конкретизируем полученные результаты для изображения в форме эллипса, интенсивность которого изменяется линейно вдоль оси x. Уравнение контура, ограничивающего область $\Omega(\chi)$, которую занимает изображение с площадью χ, имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \chi, \tag{26}$$

где $ab = \chi/\pi$. Обозначая эксцентриситет эллипса (26) через $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$, интенсивность изображения запишем как

$$F(x,y) = \frac{F_H}{\sqrt{\frac{(1-q)^2}{16} + \frac{(1+q)^2}{4}}}\left[\frac{(1-q)\sqrt{\pi}(1-\varepsilon^2)^{1/4}}{2\sqrt{\chi_{max}}}x + \frac{(1+q)}{2}\right]. \tag{27}$$

Здесь параметр F_H характеризует амплитуду интенсивности, параметр $q = F(-a_{max}, 0)/F(a_{max}, 0)$ – наклон интенсивности изображения, а параметр a_{max} определяет большую полуось эллипса при максимальной площади эллипса χ_{max}. Функция (27), описывающая интенсивность изображения, нормирована так, чтобы энергия изображения с максимальной площадью

$$E_{max} = \iint\limits_{\Omega(\chi_{max})} F^2(x,y)\,dxdy = F_H^2 \chi_{max}$$

не зависела от наклона интенсивности изображения, и тем самым была возможность сравнивать эффективность обнаружения изображений с различными наклонами интенсивности. Подставляя выражение интенсивности (27) в (10), находим отношение сигнал/шум:

$$Q(\chi) \equiv \lambda = z_H^2\left[\frac{(1-q)^2}{16}\eta^2 + \frac{(1+q)^2}{4}\eta\right] \Bigg/ \left[\frac{(1-q)^2}{16} + \frac{(1+q)^2}{4}\right], \tag{28}$$

где $\eta = \chi/\chi_{max}$ – нормированная площадь, $\eta \in [1/\kappa; 1]$ ($\kappa = \chi_{max}/\chi_{min}$ – динамический диапазон изменения неизвестной площади); $z_H^2 = 2F_H^2\chi_{max}/N_0 = 2E_{max}/N_0$ – отношение сигнал/шум для однородного изображения с интенсивностью F_H и площадью χ_{max}. Отметим, что отношение сигнал/шум (28) не зависит от эксцентриситета эллипса ε.

На рис. 1, 2 приведены зависимости вероятности пропуска изображения, имеющего форму эллипса (26), с линейно изменяющейся интенсивностью

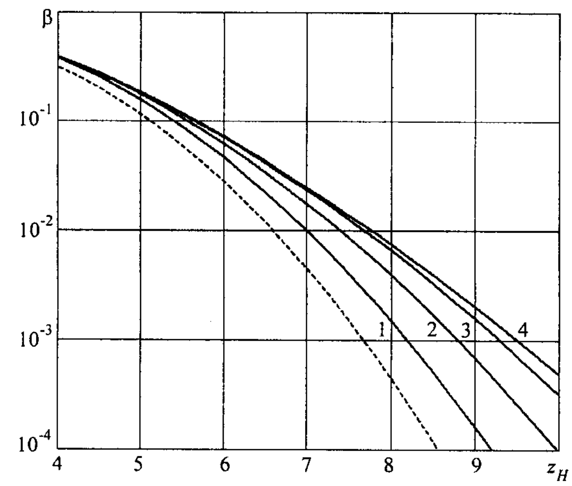

Рис. 1.

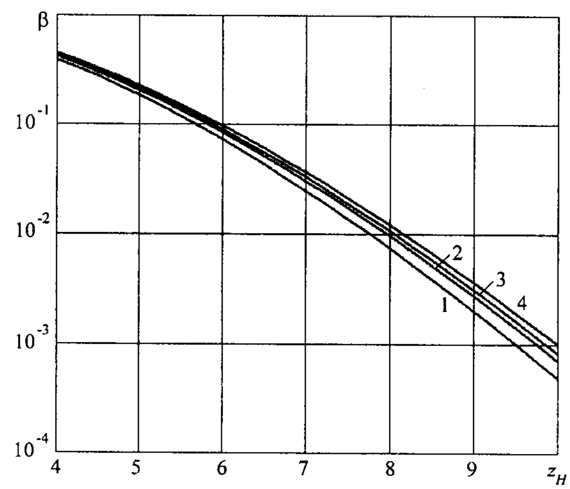

Рис. 2

(27) от отношения сигнал/шум z_H при фиксированном значении вероятности ложной тревоги 10^{-2}. Сплошными линиями показана вероятность пропуска изображения с неизвестной площадью, рассчитанная по формулам (23), (24). Для сравнения на рис. 1 штриховой линией показана вероятность пропуска изображения с априори известной площадью $\chi_0 = \chi_{\max}/2$, рассчитанная по формулам (25). Кривые на рис. 1 рассчитаны для значения $q=1$ при $\kappa=3$ (кривая 1), $\kappa=5$ (2), $\kappa=10$ (3) и $\kappa=100$ (4). Из сопоставления сплошных и штриховой кривых на рис. 1 следует, что эффективность обнаружения изображения с неизвестной площадью снижается по мере увеличения динамического диапазона изменения неизвестной площади.

Кривые на рис. 2 рассчитаны для значения $\kappa=10$ при $q=1$ (кривая 1), $q=5$ (2), $q=10$ (3), $q=100$ (4). Как следует из рисунка, эффективность обнаружения изображения с неизвестной площадью несколько снижается по мере увеличения степени неоднородности изображения. Отметим, что согласно (25) при известной площади изображения эффективность его обнаружения не зависит от степени неоднородности изображения, а определяется лишь его энергией.

Найденные точные формулы для вероятностей ошибок позволяют исследовать влияние априорного незнания площади и степени неоднородности изображения на эффективность его обнаружения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Островитянов Р. В., Басалов В. Ф.** Статистическая теория радиолокации протяженных объектов. М: Радио и связь, 1982.
2. **Красильников Н. Н.** Теория передачи и восприятия изображений. М.: Радио и связь, 1986.
3. **Осецкая Г. А.** Обнаружение оптического изображения с неизвестными интенсивностью и площадью при наличии фона с неизвестной интенсивностью // Автометрия. 1992. № 4. С. 40.
4. **Осецкая Г. А.** Обнаружение оптического изображения с неизвестной площадью // Радиотехника. 1994. № 1. С. 64.
5. **Трифонов А. П.** Обнаружение сигналов с неизвестными параметрами // Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1984.
6. **Трифонов А. П., Шинаков Ю. С.** Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
7. **Тихонов В. И., Миронов М. А.** Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.

Воронежский государственный университет,
E-mail: trif@rf.phys.vsu.ru

Поступила в редакцию
5 сентября 2002 г.