

УДК 539.377

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ НАГРЕВЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

А. А. Евтушенко, Е. Г. Иваник*, Е. А. Евтушенко

Политехника Бялостоцка, 15-950 Бялысток, Польша

* Львовский государственный аграрный университет, 80381 Львов, Украина

E-mail: ayevt@pb.bialystok.pl

Предложен метод расчета максимальной температуры поверхности кусочно-однородного полупространства, нагреваемой равномерно движущимся локально распределенным потоком тепла. Получены аналитические решения соответствующих квазистационарных задач теплопроводности при малых и больших значениях числа Пекле. На основе этих решений предложены формулы для расчета максимальной температуры в случае промежуточных (средних) значений числа Пекле.

Ключевые слова: температура, теплопроводность, высокоскоростной нагрев.

Введение. Повышенный интерес к решению квазистационарных задач теплопроводности связан с постановками тепловых задач трения в работах [1–5] и исследованиях других авторов. Такая постановка предполагает задание на рабочей поверхности каждого из элементов пары трения распределенного в области контакта движущегося теплового потока. Интенсивность этого фрикционного потока тепла равна удельной мощности трения — произведению относительной скорости скольжения тел на касательное напряжение. Последнее, в свою очередь, пропорционально давлению, полученному в результате решения соответствующей контактной задачи. Наиболее часто при этом используют равномерное либо эллиптическое (герцевское) распределение контактного давления.

Такая расчетная схема используется, в частности, для определения температуры вспышки, которая возникает на площадках фрикционного контакта в местах касания вершин микровыступов поверхностей трущихся тел [6]. Из-за малости размеров пятен касания соответствующие тепловые задачи трения ставятся для полуограниченного тела (полупространства), на поверхности которого в ограниченной области задан равномерно движущийся фрикционный поток тепла [2, 4, 7, 8]. Аналитические решения таких задач получены для двух предельных значений скорости скольжения: стационарного и высокоскоростного. В последнем случае в уравнении теплопроводности пренебрегают второй производной от температуры по независимой переменной в направлении скольжения [5]. Для получения решения в случае промежуточных (средних) значений числа Пекле Pe используют интерполяционные методы, основанные на построении априорных формул, совпадающих в частных случаях с известными стационарными и высокоскоростными решениями [9, 10].

Работа выполнена в рамках комплексной научной темы W/WM/1/04 Политехники Бялостоцкой (Польша).

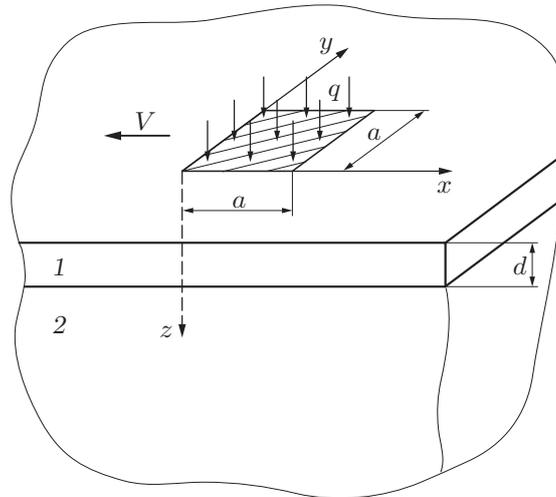


Рис. 1. Схема нагрева составного тела:
1 — слой; 2 — поверхность полубесконечного тела

В рамках описанного подхода в данной работе получено решение трехмерной квазистационарной задачи теплопроводности для кусочно-однородного тела, состоящего из слоя, нанесенного на поверхность полупространства. Главная цель решения тепловых задач трения — дать ограничение на предельно допустимый уровень температуры, поэтому основное внимание уделяется построению инженерных формул для расчета максимальной температуры составного тела.

1. Постановка задачи. Рассмотрим кусочно-однородное полупространство, состоящее из слоя конечной толщины d , нанесенного на поверхность полубесконечного тела. По свободной поверхности слоя с постоянной скоростью V движется тепловой поток, распределенный с интенсивностью q в квадрате со стороной a (рис. 1). Предполагаем, что тепловой контакт тел идеальный, а вне области нагрева поверхность слоя теплоизолирована.

Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$, выбрав положительное направление оси Ox вдоль нижней стороны квадрата в сторону, противоположную направлению движения теплового потока, оси Oy — вдоль левой стороны квадрата, а оси Oz — по нормали к поверхности внутрь кусочно-однородного тела. Величины, относящиеся к слою и полупространству, отметим индексами 1 и 2 соответственно.

Построим решение квазистационарной задачи теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_j}{\partial z^2} = \frac{V}{k_j} \frac{\partial T_j}{\partial x}, \quad j = 1, 2; \quad (1.1)$$

$$-K_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \begin{cases} q(x, y), & 0 \leq x, y \leq a, \\ 0, & (-\infty < x, y < 0) \cup (a < x, y < \infty); \end{cases} \quad (1.2)$$

$$K_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=d} = K_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=d}, \quad -\infty < x, y < \infty; \quad (1.3)$$

$$T_1(x, y, d) = T_2(x, y, d); \quad (1.4)$$

$$\{T_1, T_2\} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty, \quad (1.5)$$

где T_j — температура; q — интенсивность теплового потока; K_j, k_j — тепло- и теплопроводность соответственно.

Переходя в соотношениях (1.1)–(1.5) к безразмерным переменным и параметрам

$$X = \frac{x}{a}, \quad Y = \frac{y}{a}, \quad Z = \frac{z}{a}, \quad \delta = \frac{d}{a}, \quad K^* = \frac{K_2}{K_1}; \quad (1.6)$$

$$Q(X, Y) = \frac{q(x, y)}{q_0}, \quad \text{Pe}_j = \frac{Va}{k_j}, \quad \theta_j = \frac{T_j K_j}{q_0 a}, \quad j = 1, 2$$

(q_0 — максимальное значение интенсивности теплового потока), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial Z^2} &= \text{Pe}_j \frac{\partial \theta_j}{\partial X}, \quad j = 1, 2, \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial Z} \Big|_{Z=0} &= \begin{cases} -Q(X, Y), & 0 \leq X, Y \leq 1, \\ 0, & (-\infty < X, Y < 0) \cup (1 < X, Y < \infty), \end{cases} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial Z} \Big|_{Z=\delta} &= K^* \frac{\partial \theta_2}{\partial Z} \Big|_{Z=\delta}, \quad -\infty < X, Y < \infty, \\ \theta_1(X, Y, \delta) &= \theta_2(X, Y, \delta), \quad -\infty < X, Y < \infty, \\ \{\theta_1, \theta_2\} &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.7)$$

2. Решение задачи. Применив к граничной задаче (1.7) двойное интегральное преобразование Фурье по безразмерным переменным X и Y [11]

$$\bar{\bar{\theta}}_j(\xi, \eta, Z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_j(X, Y, Z) \exp[i(\xi X + \eta Y)] dX dY,$$

получаем

$$\frac{d^2 \bar{\bar{\theta}}_j}{dZ^2} - \alpha_j^2 \bar{\bar{\theta}}_j = 0, \quad j = 1, 2; \quad (2.1)$$

$$\frac{d \bar{\bar{\theta}}_1}{dZ} \Big|_{Z=0} = -\bar{\bar{Q}}(\xi, \eta); \quad (2.2)$$

$$\frac{d \bar{\bar{\theta}}_1}{dZ} \Big|_{Z=\delta} = K^* \frac{d \bar{\bar{\theta}}_2}{dZ} \Big|_{Z=\delta}; \quad (2.3)$$

$$\bar{\bar{\theta}}_1(\xi, \eta, \delta) = \bar{\bar{\theta}}_2(\xi, \eta, \delta); \quad (2.4)$$

$$\bar{\bar{\theta}}_2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad Z \rightarrow \infty, \quad (2.5)$$

где

$$\bar{\bar{Q}}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 Q(X, Y) \exp[i(\xi X + \eta Y)] dX dY; \quad (2.6)$$

$$\alpha_j^2 = \omega^2 - i\xi \text{Pe}_j, \quad j = 1, 2, \quad \omega^2 = \xi^2 + \eta^2. \quad (2.7)$$

Общее решение дифференциальных уравнений (2.1) имеет вид

$$\bar{\bar{\theta}}_j(\xi, \eta, Z) = A_j \exp(-\alpha_j Z) + B_j \exp(\alpha_j Z), \quad (2.8)$$

где $A_j(\xi, \eta)$, $B_j(\xi, \eta)$ ($j = 1, 2$) — неизвестные функции параметров преобразования. Из условия регулярности (2.5) следует, что $B_2 = 0$. Подставив решение (2.8) в оставшиеся

граничные условия (2.2)–(2.4), приходим к системе трех линейных алгебраических уравнений относительно искомым функций A_1, A_2, B_1 :

$$\begin{aligned} \varkappa_1(A_1 - B_1) &= \bar{Q}(\xi, \eta), \\ \bar{\lambda}A_1 \exp(-\varkappa_1\delta) - \bar{\lambda}B_1 \exp(\varkappa_1\delta) - A_2K^* \exp(-\varkappa_2\delta) &= 0; \\ A_1 \exp(-\varkappa_1\delta) + B_1 \exp(\varkappa_1\delta) - A_2 \exp(-\varkappa_2\delta) &= 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\bar{\lambda} = \sqrt{\varkappa_1/\varkappa_2}$.

Максимальная температура кусочно-однородного тела достигается на поверхности слоя. Поэтому запишем решение системы линейных уравнений (2.9) только для функций A_1 и B_1 , входящих в состав трансформанты $\bar{\theta}_1$:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\bar{Q}(K^* + \bar{\lambda}) \exp(\varkappa_1\delta)/D, & B_1 &= \bar{Q}(K^* - \bar{\lambda}) \exp(-\varkappa_1\delta)/D; \\ D &= \varkappa_1[(\bar{\lambda} - K^*) \exp(-\varkappa_1\delta) - (\bar{\lambda} + K^*) \exp(\varkappa_1\delta)]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Подставив соотношения (2.10) при $Z = 0$ в решение (2.8), получаем

$$\bar{\theta}_1(\xi, \eta, 0) = \bar{\theta}_0(\xi, \eta, 0) \frac{1 - \gamma(\xi, \eta)}{1 + \gamma(\xi, \eta)} = \bar{\theta}_0(\xi, \eta, 0) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \gamma^n(\xi, \eta) \right]; \quad (2.11)$$

$$\bar{\theta}_0(\xi, \eta, 0) = \bar{Q}(\xi, \eta)/\varkappa_1, \quad \gamma(\xi, \eta) = \bar{C} \exp(-2\varkappa_1\delta), \quad \bar{C} = (K^* - \bar{\lambda})/(K^* + \bar{\lambda}). \quad (2.12)$$

Вид формулы (2.11) указывает на то, что в пространстве оригиналов безразмерную максимальную температуру поверхности слоя можно представить как

$$\theta_{1,\max} = \theta_{0,\max} [1 + F(C, \delta, \text{Pe}_1)], \quad (2.13)$$

где $\theta_{0,\max}$ — безразмерная температура поверхности полупространства с теплофизическими свойствами слоя; $-1 < C < 1$ — безразмерный параметр, трансформанта Фурье которого определяется по формуле (2.12). Функция $F(C, \delta, \text{Pe}_1)$ в соотношении (2.13) неизвестна. Однако, принимая во внимание формулы (2.11), (2.12), можно построить ее асимптотические выражения для предельных значений безразмерной толщины слоя δ :

$$F(C, \delta, \text{Pe}_1) = \begin{cases} 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-C)^n = -\frac{2C}{1+C}, & \delta \rightarrow 0, \\ 0, & \delta \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.14)$$

или

$$F(C, \delta, \text{Pe}_1) = -\frac{2C}{1+C} F^*(C, \delta, \text{Pe}_1), \quad F^*(C, \delta, \text{Pe}_1) = \begin{cases} 1, & \delta \rightarrow 0, \\ 0, & \delta \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.15)$$

С учетом (2.14), (2.15) из равенства (2.13) находим

$$F^*(C, \delta, \text{Pe}_1) = \frac{1+C}{2C} \left(1 - \frac{\theta_{1,\max}}{\theta_{0,\max}} \right). \quad (2.16)$$

Таким образом, для определения максимальной температуры кусочно-однородного тела необходимо знать функцию $F^*(C, \delta, \text{Pe}_1)$. Вследствие сложной структуры функции $\gamma(r, s)$ в (2.12) решить эту проблему для произвольной скорости движения теплового потока не удалось. Поэтому вначале построим решения для двух предельных режимов: стационарного нагрева ($V \approx 0$, этот режим осуществляется при $0 \leq \text{Pe}_1 < 0,4$) и высокоскоростного нагрева (при $\text{Pe}_1 > 20$) [12].

3. Стационарная задача теплопроводности. В данном случае $\text{Re}_1 = \text{Re}_2 = 0$ и из формул (2.7) следует $\sqrt{\omega^2 - i \text{Re}_1} = |\omega| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, $\lambda \rightarrow 1$. Параметр C в (2.12) принимает вид

$$C = (K^* - 1)/(K^* + 1). \quad (3.1)$$

Из соотношений (2.11) получаем

$$\bar{\theta}_1(\xi, \eta, 0) = \bar{\theta}_0(\xi, \eta, 0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-C)^n \bar{G}_n(\xi, \eta, 0); \quad (3.2)$$

$$\bar{\theta}_0(\xi, \eta, 0) = \bar{Q}(\xi, \eta)/|\omega|, \quad \bar{G}_n(\xi, \eta, 0) = (\bar{Q}(\xi, \eta)/|\omega|) \exp(-2n\delta|\omega|). \quad (3.3)$$

Более подробно рассмотрим нагрев поверхности слоя равномерным тепловым потоком интенсивности $q(x, y) = q_0$ ($Q(X, Y) = 1$). С учетом значения интеграла (см. [13])

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-2n\delta|\omega|)}{|\omega|} \exp[-i(\xi X + \eta Y)] d\xi d\eta = \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + 4n^2\delta^2}}$$

на основе теоремы о свертке для интегрального преобразования Фурье из соотношений (3.3) находим

$$G_n(X, Y, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \frac{dX' dY'}{\sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + 4n^2\delta^2}}. \quad (3.4)$$

Вследствие симметрии задачи максимальная температура достигается на поверхности слоя, в центре области нагрева. После интегрирования при $X = Y = 0,5$ формула (3.4) примет вид

$$G_{n,\max} \equiv G_n\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{\pi} \left[\ln \left| \frac{\sqrt{2 + 16n^2\delta^2} + 1}{\sqrt{2 + 16n^2\delta^2} - 1} \right| - 4n\delta \operatorname{arctg} \frac{1}{4n\delta\sqrt{2 + 16n^2\delta^2}} \right]. \quad (3.5)$$

Полагая в соотношениях (3.3) $\delta = 0$, получаем $\bar{\theta}_0(\xi, \eta, 0) = \bar{G}_n(\xi, \eta, 0)$. Тогда из равенства (3.5) находим известное значение безразмерной максимальной температуры однородного полупространства [4]

$$\theta_{0,\max} = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right| = \frac{2}{\pi} \ln |\sqrt{2} + 1| \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \quad (3.6)$$

Максимальную безразмерную температуру кусочно-однородного тела находим из решения (3.2) в виде

$$\theta_{1,\max}^{(s)} = \theta_{0,\max}^{(s)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-C)^n G_{n,\max}. \quad (3.7)$$

Здесь $\theta_{0,\max}^{(s)}$ вычисляется по формуле (3.6), $G_{n,\max}$ — по формуле (3.5), а индекс (s) указывает на то, что рассматривается стационарное решение.

Подставив (3.7) в (2.16), получаем

$$F^*(C, \delta, 0) = -\frac{1 + C}{C\theta_{0,\max}^{(s)}} \sum_{n=1}^{\infty} (-C)^n G_{n,\max}. \quad (3.8)$$

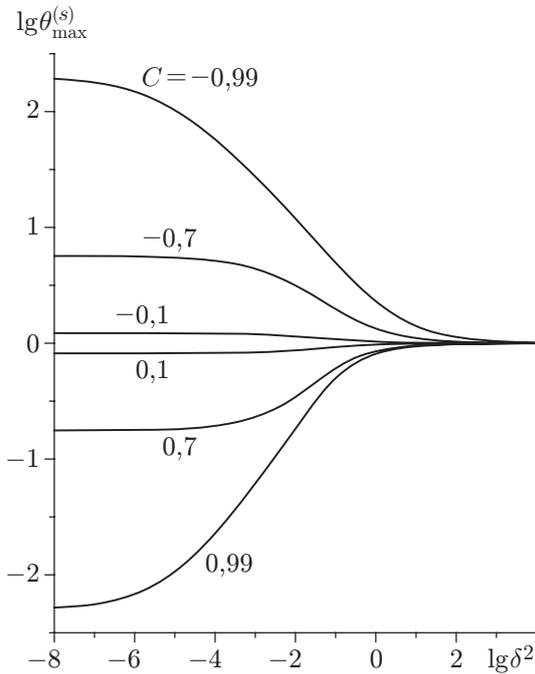


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость отношения максимальных стационарных температур кусочно-однородного и неоднородного полупространств от безразмерной толщины слоя

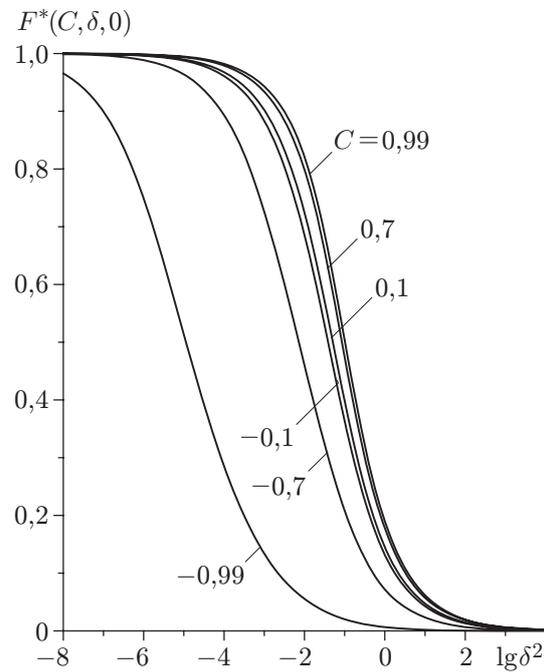


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость функции $F^*(C, \delta, 0)$ от относительной толщины слоя при различных значениях параметра C

Зависимость отношения $\theta_{\max}^{(s)} = \theta_{1,\max}^{(s)} / \theta_{0,\max}^{(s)}$ от безразмерной толщины слоя δ для различных значений безразмерного параметра C в (3.1) показана на рис. 2. Отметим, что при $C \rightarrow -1$ ($K^* \rightarrow 0$) теплопроводность слоя значительно больше теплопроводности основания ($K_1 \gg K_2$), и наоборот, при $C \rightarrow 1$ ($K^* \rightarrow \infty$) $K_1 \ll K_2$. С увеличением параметра C при фиксированной толщине слоя δ максимальная температура уменьшается. Наибольшая температура достигается в случае теплопроводного слоя, нанесенного на теплоизолированное полупространство. Если теплопроводность слоя больше (меньше) теплопроводности основания, то увеличение толщины слоя приводит к снижению (повышению) температуры. В обоих случаях при $\delta > 3,5$ влиянием слоя на максимальную температуру кусочно-однородного тела можно пренебречь и в расчетах использовать решение (3.6) для однородного полупространства.

С учетом соотношения (2.16) максимальную температуру можно также определять с помощью функции $F^*(C, \delta, 0)$ по формуле

$$\theta_{1,\max}^{(s)} = \theta_{0,\max}^{(s)} \left[1 - \frac{2C}{1+C} F^*(C, \delta, 0) \right], \quad \theta_{0,\max}^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \quad (3.9)$$

Функция $F^*(C, \delta, 0)$ в (3.8) монотонно убывает с увеличением параметра δ (рис. 3). Уменьшение относительной теплопроводности слоя K^* (параметра C в (3.1)) при фиксированной его толщине δ приводит к уменьшению значений функции $F^*(C, \delta, 0)$. Зная теплофизические (C) и геометрические (δ) параметры задачи, по соответствующей кривой на рис. 3 находим значение функции $F^*(C, \delta, 0)$. Подставляя его в формулу (3.9), определяем максимальную температуру кусочно-однородного тела.

Рассмотрим также случай нагрева поверхности кусочно-однородного тела потоком тепла, равномерно распределенным по граничной поверхности в круге радиуса $0,5a$. Решение соответствующей осесимметричной стационарной задачи теплопроводности получено с использованием интегрального преобразования Ганкеля нулевого порядка по безразмерной переменной $\rho = 2r/a$, где r — радиальная составляющая цилиндрической системы координат (r, φ, z) с началом в центре круга нагрева.

Максимальную температуру в этом случае определяем по формуле (3.7) при

$$G_{n,\max} = \int_0^\infty \frac{\exp(-n\delta\xi)}{\xi} J_1(\xi) d\xi = \sqrt{n^2\delta^2 + 1} - n\delta, \quad \theta_{0,\max} = \int_0^\infty \frac{J_1(\xi)}{\xi} d\xi = 1$$

($J_1(\xi)$ — функция Бесселя первого рода порядка 1).

4. Высокоскоростной нагрев. Режим высокоскоростного нагрева реализуется при $Pe_1 \geq 20$ и характеризуется тем, что изменением градиентов температуры в направлениях x и y ($\partial^2 T_j / \partial x^2$, $\partial^2 T_j / \partial y^2$) в уравнении теплопроводности (1.1) можно пренебречь [14]. Тогда из соотношения (2.1) следует, что $\omega^2 \rightarrow 0$ и $\sqrt{\omega^2 - i Pe_1} \rightarrow \sqrt{-i Pe_1}$, а параметр C в (2.12) принимает вид

$$C = \frac{K^* - \lambda}{K^* + \lambda}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{Pe_1}{Pe_2}} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}. \quad (4.1)$$

Таким образом, имеем двумерную (по переменным X, Z) квазистационарную задачу теплопроводности для кусочно-однородного полупространства, нагреваемого в полосе $0 \leq X \leq 1$ на поверхности $Z = 0$ распределенным тепловым потоком $Q(X) = q(aX)/q_0$. В результате решения этой задачи с помощью интегрального преобразования Фурье по переменной X получаем трансформанту температуры на поверхности слоя $Z = 0$:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_1(\xi, 0) &= \bar{\theta}_0(\xi, 0) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \gamma^n(\xi) \right], \\ \bar{\theta}_0(\xi, 0) &= \bar{Q}(\xi) / \sqrt{-i\xi Pe_1}, \quad \gamma(\xi) = C \exp(-2\delta\sqrt{-i\xi Pe_1}), \\ \bar{Q}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 Q(X) \exp(i\xi X) dX. \end{aligned} \quad (4.2)$$

На основании теоремы о свертке для интегрального преобразования Фурье из соотношений (4.2) получаем

$$\begin{aligned} \theta_1(X, 0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 Q(X') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{-i\xi Pe_1}} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-C)^n \exp(-2n\delta\sqrt{-i\xi Pe_1}) \right] \times \\ &\quad \times \exp(-i\xi(X - X')) d\xi dX'. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Учитывая значение интеграла (см. [13])

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-2n\delta\sqrt{-i\xi Pe_1})}{\sqrt{-i\xi Pe_1}} \exp(-i\xi X) d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{Pe_1 X}} \exp\left(-\frac{n^2\delta^2 Pe_1}{X}\right), \quad n \geq 0,$$

из равенства (4.3) получаем расчетную формулу для безразмерной температуры поверхности кусочно-однородного полупространства

$$\theta_1(X, 0) = \begin{cases} 0, & X \leq 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi \text{Pe}_1}} \int_0^X Q(X') H(X - X') dX', & 0 \leq X \leq 1, \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi \text{Pe}_1}} \int_0^1 Q(X') H(X - X') dX', & X \geq 1, \end{cases} \quad (4.4)$$

где

$$H(X) = \frac{1}{\sqrt{X}} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-C)^n \exp\left(-\frac{n^2 \delta^2 P_1}{X}\right) \right]. \quad (4.5)$$

В случае постоянной интенсивности теплового потока $Q(x) = 1$ с учетом значения интеграла

$$\begin{aligned} \int_0^X \frac{1}{\sqrt{X - X'}} \exp\left(\frac{-n^2 \delta^2 \text{Pe}_1}{X - X'}\right) dX' &= \\ &= 2\sqrt{X} \exp\left(-\frac{n^2 \delta^2 \text{Pe}_1}{X}\right) - 2n\delta\sqrt{\pi \text{Pe}_1} \operatorname{erfc}\left(\frac{n\delta\sqrt{\text{Pe}_1}}{\sqrt{X}}\right), \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

из соотношений (4.4), (4.5) получаем

$$\begin{aligned} \theta_1(X, 0) &= \theta_0(X, 0) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-C)^n R_n(X) \right], \quad 0 \leq X \leq 1, \\ \theta_0(X, 0) &= \sqrt{\frac{X}{\pi \text{Pe}_1}}, \quad R_n(X) = \exp\left(-\frac{n^2 \delta^2 \text{Pe}_1}{X}\right) - n\delta\sqrt{\frac{\pi \text{Pe}_1}{X}} \operatorname{erfc}\left(n\delta\sqrt{\frac{\text{Pe}_1}{X}}\right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Максимальное значение температуры достигается на правом (выходящем) крае полосы нагрева [12]. Тогда из формул (4.6) при $X = 1$ следует

$$\theta_{1,\max}^{(f)} \equiv \theta_1(1, 0) = \theta_{0,\max}^{(f)} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-C)^n R_{n,\max} \right]; \quad (4.7)$$

$$\theta_{0,\max}^{(f)} = 1/\sqrt{\pi \text{Pe}_1}, \quad R_{n,\max} = \exp(-n^2 \delta^2 \text{Pe}_1) - n\delta\sqrt{\pi \text{Pe}_1} \operatorname{erfc}(n\delta\sqrt{\text{Pe}_1}), \quad (4.8)$$

где верхний индекс (f) указывает на то, что рассматривается режим высокоскоростного нагрева. (Отметим, что формула (4.8) для максимальной безразмерной температуры $\theta_{0,\max}^{(f)}$ однородного полупространства впервые получена в работе [14].)

Решение (4.7), (4.8) можно также представить в виде

$$\theta_{1,\max}^{(f)} = \theta_{0,\max}^{(f)} \left[1 - \frac{2C}{1+C} F^*(C, \delta, \text{Pe}_1) \right], \quad F^*(C, \delta, \text{Pe}_1) = -\frac{1+C}{C\theta_{0,\max}^{(f)}} \sum_{n=1}^{\infty} (-C)^n R_{n,\max}. \quad (4.9)$$

При $\delta \rightarrow 0$ из формулы (4.8) следует, что $R_{n,\max} \rightarrow 1$, и из соотношения (4.9) получаем $F^*(C, 0, \text{Pe}_1) = 1$. Если же $\delta \rightarrow \infty$, то $R_{n,\max} \rightarrow 0$ и $F^*(C, \infty, \text{Pe}_1) \rightarrow 0$. Таким образом,

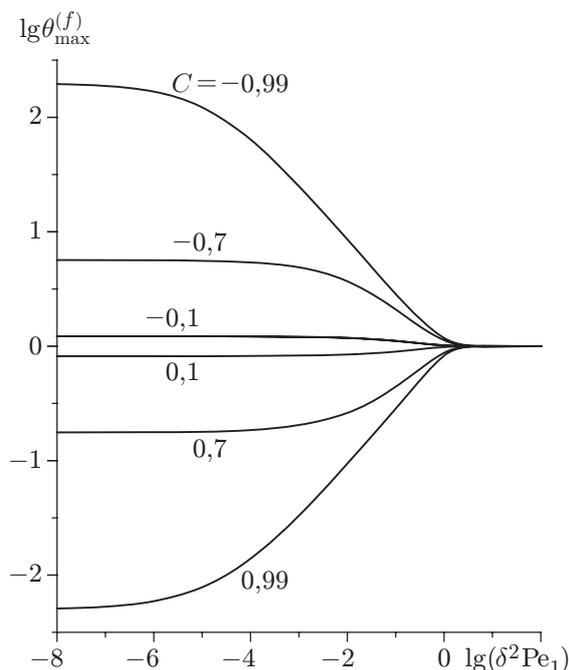


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость отношения максимальных температур кусочно-однородного и неоднородного полупространств при высокоскоростном нагреве от безразмерной толщины слоя

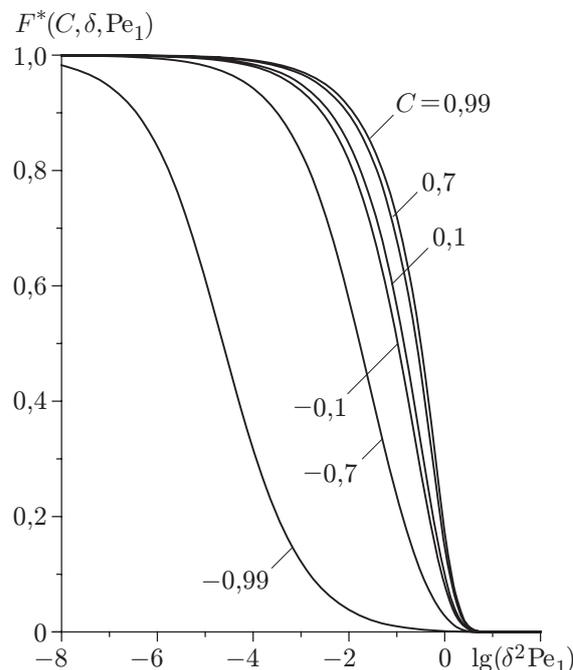


Рис. 5

Рис. 5. Изменение функции $F^*(C, \delta, Pe_1)$ с увеличением безразмерного комплекса $\delta^2 Pe_1$ при различных значениях параметра C

функция $F^*(C, \delta, Pe_1)$ монотонно убывает с увеличением параметра δ , принимая значения между нулем и единицей.

Зависимость отношения $\theta_{\max}^{(f)} = \theta_{1,\max}^{(f)} / \theta_{0,\max}^{(f)}$ от безразмерного комплекса $\delta^2 Pe_1$ показана на рис. 4. Эта же зависимость для функции $F(C, \delta, Pe_1)$ в (4.9) приведена на рис. 5 (параметр C рассчитан по (4.1)). Видно, что при $\delta^2 Pe_1 > 1$ ($\delta > 1/\sqrt{Pe_1}$) влиянием слоя на максимальную температуру кусочно-однородного тела можно пренебречь. В то же время это свидетельствует о том, что эффективная глубина прогревания (расстояние от поверхности слоя, на котором температура составляет 5 % максимальной поверхностной) уменьшается с увеличением скорости движения теплового потока.

5. Решение для промежуточных значений числа Пекле ($0,4 \leq Pe_1 \leq 20$). При стационарном и высокоскоростном нагреве перенос тепла в твердом теле осуществляется в основном с помощью кондуктивного и конвективного механизмов соответственно [8]. В предположении, что для промежуточных значений скорости движения теплового потока эти виды переноса тепла действуют параллельно, в работе [9] по аналогии с формулой для сопротивления электрического тока при параллельной схеме соединения проводников предложена априори интерполяционная формула для определения максимальной температуры однородного полупространства при промежуточных значениях числа Пекле $0,4 \leq Pe_1 \leq 20$:

$$1/\theta_{0,\max} = 1/\theta_{0,\max}^{(s)} + 1/\theta_{0,\max}^{(f)}, \tag{5.1}$$

где максимальные температуры при стационарном ($\theta_{0,\max}^{(s)}$) и высокоскоростном ($\theta_{0,\max}^{(f)}$) нагреве полупространства определяются по формулам (3.7) и (4.7) соответственно.

$Pe_1 = Pe_2$	$\theta_{1,\max}^{(s)}$ в (3.8)	$\theta_{1,\max}^{(f)}$ в (4.7)	$\theta_{1,\max}$ в (5.3)	$\theta_{1,\max}$ в (5.4)	$\theta_{1,\max}$ в (5.5)
0,1	0,91	—	0,80	0,90	0,89
0,4	0,91	—	0,71	0,88	0,84
1	—	—	0,62	0,83	0,77
5	—	—	0,42	0,59	0,51
10	—	—	0,32	0,44	0,39
20	—	0,32	0,24	0,30	0,28
30	—	0,25	0,19	0,24	0,23
50	—	0,18	0,15	0,17	0,17

Позже автор работы [10] модифицировал формулу (5.1), предложив суммировать величины, обратные квадратам максимальных температур:

$$1/\theta_{0,\max}^2 = 1/(\theta_{0,\max}^{(s)})^2 + 1/(\theta_{0,\max}^{(f)})^2. \quad (5.2)$$

Проведенный в [10] численный анализ показал, что результаты, полученные по эмпирической формуле (5.2), практически совпадают со значениями максимальной температуры, найденной из точного решения [4].

В случае кусочно-однородного полупространства по аналогии с формулами (5.1) и (5.2) запишем

$$1/\theta_{1,\max} = 1/\theta_{1,\max}^{(s)} + 1/\theta_{1,\max}^{(f)}; \quad (5.3)$$

$$1/\theta_{1,\max}^2 = 1/(\theta_{1,\max}^{(s)})^2 + 1/(\theta_{1,\max}^{(f)})^2. \quad (5.4)$$

Предлагается также другой способ интерполяции между стационарным и высокоскоростным режимами нагрева. При $0 \leq Pe_1 \leq 0,4$ согласно (3.8) имеем $\theta_{0,\max}^{(s)} = 1/\sqrt{\pi}$, а при $Pe_1 > 20$ из соотношения (4.8) получаем $\theta_{0,\max}^{(f)} = 1/\sqrt{\pi Pe_1}$. Тогда для промежуточных значений числа Пекле $0,4 \leq Pe_1 \leq 20$ максимальную температуру однородного полупространства можно определять по приближенной формуле

$$\theta_{0,\max} = 1/\sqrt{\pi(1 + Pe_1)},$$

которая при $Pe_1 \rightarrow 0$ и $Pe_1 \gg 1$ согласуется с приведенными выше результатами.

Аналогично в случае кусочно-однородного полупространства предполагаем, что

$$\theta_{1,\max} = \theta_{0,\max} \left[1 - \frac{2C}{1+C} F^*(C, \delta_p, 0) \right]. \quad (5.5)$$

Значение функции $F^*(C, \delta_p, 0)$ вычисляется по формуле (3.8) при

$$C = \frac{K^* - \lambda}{K^* + \lambda}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{1 + Pe_1}{1 + Pe_2}} \quad (5.6)$$

и замене безразмерной толщины слоя δ на комплекс $\delta_p = \delta^2 \sqrt{1 + Pe_1}$.

Результаты расчетов максимальной безразмерной температуры кусочно-однородного полупространства для различных значений числа Пекле $Pe_1 = Pe_2$ при $\delta = 0,1$ и $K^* = 0,5$ представлены в таблице. Приведенные данные показывают, что наилучшее совпадение в случае промежуточных значений числа Пекле имеет место для максимальных температур, найденных по формуле Гринвуда (5.4) и по предложенной в настоящей работе методике (формулы (5.5), (5.6)). Об этом же свидетельствуют и результаты вычислений, представленные на рис. 6, 7.

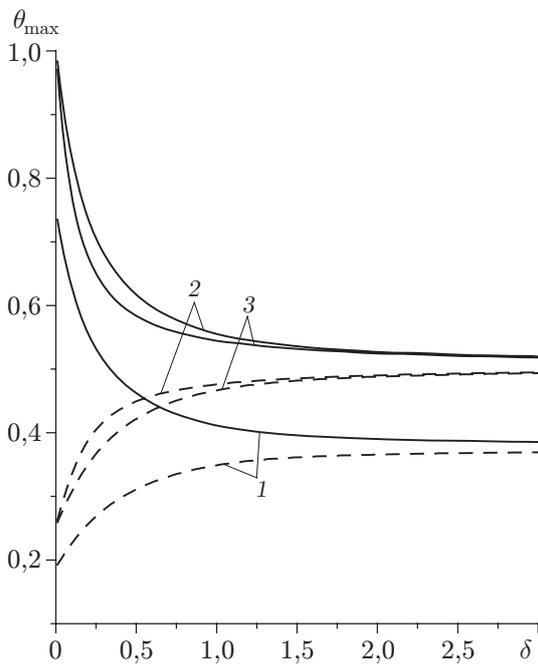


Рис. 6

Рис. 6. Зависимость безразмерной максимальной температуры θ_{\max} от относительной толщины слоя δ при $Re_1 = Re_2 = 1$:
 сплошные кривые — $K^* = 0,5$; штриховые — $K^* = 2$; 1 — расчет по формуле (5.3);
 2 — расчет по (5.4); 3 — расчет по (5.5)

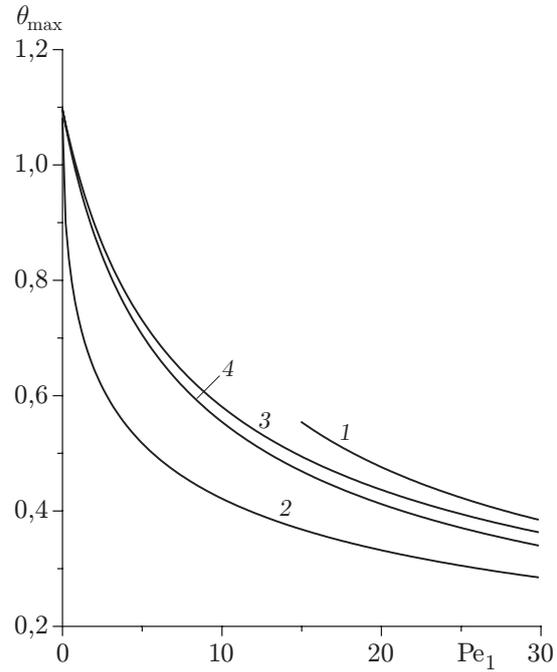


Рис. 7

Рис. 7. Зависимость безразмерной максимальной температуры θ_{\max} от числа Пекле ($Re_1 = Re_2 = 1$) при $K^* = 0,5$:
 1 — расчет по формуле (4.7); 2 — расчет по (5.3); 3 — расчет по (5.4); 4 — расчет по (5.5)

6. Обсуждение результатов и выводы. Установлено, что для промежуточных (средних) значений числа Пекле влияние слоя на максимальную температуру составного тела определяется двумя безразмерными параметрами — C и δ_p в (5.6). Параметр $-1 < C < 1$, в свою очередь, зависит от теплофизических свойств материалов слоя и основания, геометрических размеров области нагрева и скорости ее движения. Случай $C < 0$ соответствует увеличению, а $C > 0$ — уменьшению максимальной температуры кусочно-однородного полупространства по сравнению с однородным, причем $C = 0$, когда материалы слоя и полупространства одинаковы.

Параметр δ_p зависит от относительной толщины слоя δ и числа Пекле Re_1 . Для малых значений δ_p функция $F(C, \delta_p, 0) \approx 1$ и из соотношения (5.5) получаем оценку для максимальной температуры составного тела

$$\theta_{1,\max} = \theta_{0,\max} \frac{1 - C}{1 + C} = \theta_{0,\max} \frac{\lambda}{K^*} \tag{6.1}$$

(параметр λ рассчитывается по формуле (4.1), а относительная теплопроводность полупространства и слоя K^* — по формуле (1.6)). Перейдя в формуле (6.1) к размерным величинам, с учетом того, что $\lambda \rightarrow 1$ при $Re_j \rightarrow 0$ ($j = 1, 2$), получим максимальную температуру однородного (из материала основания) полупространства

$$T_{1,\max} = (q_0 a / K_2) \theta_{0,\max}.$$

Следовательно, при малых толщине слоя и значениях Re_1 влиянием слоя на максимальную температуру можно пренебречь.

При больших значениях δ_p и Re_1 функция $F(C, \delta_p, 0) \approx 0$. Тогда решения для кусочно-однородного полубесконечного тела и для однородного (с теплофизическими свойствами слоя) полупространства совпадают:

$$T_{1,\max} = (q_0 a / K_1) \theta_{0,\max}.$$

Предложенную методику определения параметра δ_p и функции $F(C, \delta_p, 0)$ по формулам (3.8) и (5.6) можно использовать для оценки степени влияния материала слоя на максимальную температуру кусочно-однородного тела. Получено, что при больших значениях числа Пекле ($Pe > 20$) и фиксированной толщине слоя внешний тепловой поток полностью поглощается слоем, т. е. имеет место скин-эффект, когда теплофизические свойства материала основания не влияют на максимальную температуру составного тела. Предельное значение параметра δ_p , при котором все тепло поглощается слоем, равно единице. Следовательно, эффективная глубина прогревания может быть рассчитана по формуле

$$d = a / \sqrt{1 + Pe_1}, \quad Pe_1 \geq 0,4.$$

Из (1.6), (5.5) следует, что отношение максимальных поверхностных температур кусочно-однородного $T_{1,\max}$ и однородного $T_{2,\max}$ тел равно

$$\alpha = \frac{T_{1,\max}}{T_{2,\max}} = \frac{K^*}{\lambda} \left[1 - \frac{2C}{1+C} F^*(C, \delta_p, 0) \right]. \quad (6.2)$$

Если толщина слоя и числа Пекле достаточно малы, то с учетом соотношения (6.1) из формулы (6.2) получаем, что $\alpha \rightarrow 1$. В то же время при больших и средних значениях толщины слоя и чисел Пекле величину α можно оценить по приближенной формуле $\alpha \approx K^* / \lambda$ (параметр λ рассчитывается по формулам (4.1) при $Pe_1 > 20$ и (5.6) при $0,4 \leq Pe_1 \leq 20$).

Функция $F^*(C, \delta_p, 0)$ играет важную роль при определении максимальной температуры не только на поверхности слоя, но и в плоскости раздела материалов сопряженных тел. Обозначим через $\beta = T_{2,\max}|_{z=d} / T_{1,\max}|_{z=0}$ отношение максимальных температур основания и слоя. Если $F^*(C, \delta_p, 0) \approx 1$, то, как отмечено выше, максимальная температура составного тела определяется только теплофизическими свойствами основания и, следовательно, $\beta \rightarrow 1$. Если же $F^*(C, \delta_p, 0) \approx 0$, то основное влияние на максимальную температуру оказывают свойства материала слоя и $\beta \rightarrow 0$.

Проведенный численный анализ задачи показал, что изменение формы области нагрева с квадратной на круговую той же площади незначительно (не более 5 %) изменяет величину максимальной температуры составного тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Щедров В. С.** Температура на скользящем контакте // Трение и износ в машинах. М.: Изд-во АН СССР, 1955. Вып. 10. С. 155–296.
2. **Коровчинский М. В.** Основы теории термического контакта при локальном трении // Новое в теории трения. М.: Наука, 1966. Ч. 1. С. 98–145.
3. **Blok H.** The flash temperature concept // Wear. 1963. V. 6, N 6. P. 483–494.
4. **Иегер Дж. К.** Движущиеся источники тепла и температура трения // Прикладная механика и машиностроение: Сб. пер. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. С. 22–39.
5. **Ling F. F.** Surface mechanics. N. Y.: John Wiley and Sons, 1973.

6. **Чичинадзе А. В., Браун Э. Д., Гинзбург А. Г., Игнатъева З. В.** Расчет, испытание и подбор фрикционных пар. М.: Наука, 1979.
7. **Евтушенко А. А., Уханская О. Н.** Распределение температуры и перемещений в полупространстве под действием движущегося теплового потока и конвективного охлаждения // Физ.-хим. механика материалов. 1992. Т. 28, № 3. С. 18–25.
8. **Tian X., Kennedy F. E.** Temperature rise at the sliding contact interface for a coated semi-infinite body // Trans. ASME. J. Tribology. 1993. V. 115, N 1. P. 1–9.
9. **Archard J. F.** The temperature of rubbing surfaces // Wear. 1958/59. V. 2, N 6. P. 438–455.
10. **Greenwood J. A.** An interpolation formula for flash temperatures // Wear. 1991. V. 150, N 2. P. 153–158.
11. **Sneddon N. I.** The use of integral transforms. N. Y.: McGraw-Hill, 1972.
12. **Ling F. F., Yang C. C.** Temperature distribution in a semi-infinite solid under a fast-moving arbitrary heat source // Intern. J. Heat Mass. Transfer. 1971. V. 14, N 1. P. 199–206.
13. **Sneddon I. N.** The use of transform methods in elasticity. Raleigh, 1964. (Techn. Rept / Univ. of North Carolina at Raleigh; N 64–1789).
14. **Ling F. F., Mow V. C.** Surface displacement of a convective elastic half-space under an arbitrary distributed fast-moving heat source // Trans. ASME. J. Basic Engng. 1965. V. 87, N 3. P. 729–734.

*Поступила в редакцию 5/IV 2004 г.,
в окончательном варианте — 25/VI 2004 г.*
