УДК 539.375

ВАРИАЦИОННЫЕ ПОСТАНОВКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РАЗРУШЕНИЯ

А. Ф. Ревуженко

(*Новосибирск*)

В работе [1] рассматривались постановки краевых задач деформирования материалов, обладающих свойством локализации сдвигов. Ниже рассматриваются вариационные постановки для общего случая разрушения, когда в материале допускаются сильные разрывы как касательной, так и нормальной компонент смещений.

1. Ограничимся случаем плоской деформации или плоского напряженного состояния. Введем декартовы координаты Ox_1x_2. Обозначим через S деформируемую область, ограниченную контуром Γ. Пусть при определенных параметрах нагружения область разделяется линией сильного разрыва смещений. В дальнейшем достаточно ограничиться случаем одной линии. Для нескольких линий результаты сохраняются. Предположим сначала, что траектория распространения линии известна либо из экспериментальных данных, либо из условий симметрии, либо задана из дополнительных соображений. Для одного довольно широкого класса моделей краевую задачу о распространении линии разрыва и деформировании материала вне линии можно свести к определению стационарных значений определенных функционалов на классе разрывных функций. При этом функционалы должны зависеть как от поведения функций в области гладкости, так и от величины разрывов этих функций. Пусть в S заданы некоторые поля напряжений σ_{ij}, смещений u_k и переменных $\lambda_r(i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ r = 1,\ 2,\ \ldots)$. Определим функционал

$$W = \int\limits_{S^+} F\left(u_i^+,\ u_{i,i}^+,\ \gamma^+,\ \sigma_{ij}^+,\ \sigma_{ij,k}^+,\ \lambda_r^+,\ \lambda_{r,k}^+,\ x_k\right) dx_1dx_2 + \int\limits_{S^-} F\left(u_i^-,\ \ldots\right) dx_1dx_2 + \int\limits_{L} U dl - \int\limits_{\Gamma} \Pi dl, \tag{1.1}$$

где $\gamma = u_{1,2} + u_{2,1}$; $\sigma_{12} \equiv \sigma_{21}$; U, Π — функции, определенные на линии разрыва L и внешней границе. Здесь и в дальнейшем запятая перед индексом означает дифференцирование по соответствующей координате, индексы $+,\ -$ отмечают обозначения в областях справа и слева от L. Предположим, что на действительных решениях функционал стационарен. Рассмотрим постановки, когда все уравнения полностью определяются вариационным принципом и, следовательно, дополнительные ограничения внутри S^+, S^- отсутствуют. Необходимое условие экстремума приводит к следующей системе уравнений Эйлера — Остроградского:

$$F_{u_1} - \frac{\partial}{\partial x_1}\{F_{u_{1,1}}\} - \frac{\partial}{\partial x_2}\{F_\gamma\} = 0, \quad F_{u_2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\{F_\gamma\} - \frac{\partial}{\partial x_2}\{F_{u_{2,2}}\} = 0; \tag{1.2}$$

$$F_{\sigma_{11}} - \frac{\partial}{\partial x_1}\{F_{\sigma_{11,1}}\} - \frac{\partial}{\partial x_2}\{F_{\sigma_{11,2}}\} = 0, \tag{1.3}$$

$$F_{\sigma_{22}} - \frac{\partial}{\partial x_1}\{F_{\sigma_{22,1}}\} - \frac{\partial}{\partial x_2}\{F_{\sigma_{22,2}}\} = 0, \quad F_{\sigma_{12}} - \frac{\partial}{\partial x_1}\{F_{\sigma_{12,1}}\} - \frac{\partial}{\partial x_2}\{F_{\sigma_{12,2}}\} = 0;$$

$$F_{\lambda_r} - \frac{\partial}{\partial x_1}\{F_{\lambda_{r,1}}\} - \frac{\partial}{\partial x_2}\{F_{\lambda_{r,2}}\} = 0; \tag{1.4}$$

условию на линии возможного разрыва

$$(1.5)\qquad A_1^-\delta u_1^- + A_2^-\delta u_2^- + B_{11}^-\delta\sigma_{11}^- + B_{22}^-\delta\sigma_{22}^- + B_{12}^-\delta\sigma_{12}^- + \Lambda_r^-\delta\lambda_r^- -$$
$$- \left[A_1^+\delta u_1^+ + A_2^+\delta u_2^+ + B_{11}^+\delta\sigma_{11}^+ + B_{22}^+\delta\sigma_{22}^+ + B_{12}^+\delta\sigma_{12}^+ + \Lambda_r^+\delta\lambda_r^+\right] + \delta U = 0$$

и условию на внешней границе Γ

$$(1.6)\qquad \left\{F_{u_{1,1}}\cos\psi + F_\gamma\sin\psi\right\}\delta u_1 + \left\{F_\gamma\cos\psi + F_{u_{2,2}}\sin\psi\right\}\delta u_2 +$$
$$+ \left\{F_{\sigma_{11,1}}\cos\psi + F_{\sigma_{11,2}}\sin\psi\right\}\delta\sigma_{11} + \left\{F_{\sigma_{22,1}}\cos\psi + F_{\sigma_{22,2}}\sin\psi\right\}\delta\sigma_{22} +$$
$$+ \left\{F_{\sigma_{12,1}}\cos\psi + F_{\sigma_{12,2}}\sin\psi\right\}\delta\sigma_{12} + \left\{F_{\lambda_{r,1}}\cos\psi + F_{\lambda_{r,2}}\sin\psi\right\}\delta\lambda_r = \delta\Pi.$$

Индексы функции F означают частные производные; фигурные скобки — полные производные; ψ — угол между внешней нормалью к S и осью Ox_1; α — угол между нормалью $\bar{n}$ к L и осью Ox_1 (нормаль является внешней по отношению к области S^-). Кроме того, в (1.5) использованы следующие обозначения:

$$(1.7)\qquad A_1 = F_{u_{1,1}}\cos\alpha + F_\gamma\sin\alpha,\quad A_2 = F_\gamma\cos\alpha + F_{u_{2,2}}\sin\alpha,$$
$$B_{11} = F_{\sigma_{11,1}}\cos\alpha + F_{\sigma_{11,2}}\sin\alpha,\quad B_{22} = F_{\sigma_{22,1}}\cos\alpha + F_{\sigma_{22,2}}\sin\alpha,$$
$$B_{12} = F_{\sigma_{12,1}}\cos\alpha + F_{\sigma_{12,2}}\sin\alpha,\quad \Lambda_r = F_{\lambda_{r,1}}\cos\alpha + F_{\lambda_{r,2}}\sin\alpha.$$

Полученные уравнения, граничные условия и условия на линии разрыва записаны в общем виде и очерчивают определенный класс моделей деформирования и разрушения. Возможно несколько путей дальнейшего исследования. Прежде всего отметим, что система (1.2)—(1.4) должна быть эквивалентна уравнениям равновесия и состояния. Кроме того, все уравнения должны быть инвариантны относительно сдвига и вращения системы координат. Условия сопряжения на L и граничные условия должны иметь определенный механический смысл. Общие ограничения на функционал можно исследовать, опираясь на любые из трех перечисленных требований. Наиболее простой путь состоит в анализе механического смысла условий на L и Γ.

Введем на L следующие обозначения:

$$(1.8)\qquad s_i = u_i^+ + u_i^-,\quad R_i = u_i^+ - u_i^-,\quad R_n = \cos\alpha\, R_1 + \sin\alpha\, R_2,$$
$$R_m = -\sin\alpha\, R_1 + \cos\alpha\, R_2,\quad \Sigma_1 = \sigma_{11}\cos\alpha + \sigma_{12}\sin\alpha,$$
$$\Sigma_2 = \sigma_{12}\cos\alpha + \sigma_{22}\sin\alpha,\quad \Sigma_n = \cos\alpha\Sigma_1 + \sin\alpha\Sigma_2,$$
$$\Sigma_m = -\sin\alpha\Sigma_1 + \cos\alpha\Sigma_2.$$

Величины R_i, R_n, R_m имеют смысл проекций скачка перемещений на оси Ox_i и направления $\bar{n} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$, $\bar{m} = \{-\sin\alpha, \cos\alpha\}$; Σ_i, Σ_n, Σ_m имеют смысл тех же проекций вектора напряжения на площадке, касательной к L.

Выше предполагалось, что функционал стационарен па полях смещений, напряжений и переменных λ_r, которые независимы только внутри областей S^+, S^-. На контурах Γ и L допускаются связи, которые могут и не «шифроваться» вариационным принципом. В частности, на L будем всегда предполагать два условия непрерывности напряжений: $\Sigma_n^+ = \Sigma_n^-$, $\Sigma_m^+ = \Sigma_m^-$, или

$$(1.9)\qquad (M\sigma_{11}\cos\alpha + M\sigma_{12}\sin\alpha)^+ = (M\sigma_{11}\cos\alpha + M\sigma_{12}\sin\alpha)^-,$$
$$(M\sigma_{12}\cos\alpha + M\sigma_{22}\sin\alpha)^+ = (M\sigma_{12}\cos\alpha + M\sigma_{22}\sin\alpha)^-,$$

где M — некоторая постоянная. Условие (1.5) с учетом (1.8), (1.9) можно представить в виде

$$\delta\sigma_{12}^{-}\left[-\operatorname{tg}\alpha B_{11}^{-}-\operatorname{ctg}\alpha B_{22}^{-}+B_{12}^{-}\right]-\delta\sigma_{12}^{+}\left[-\operatorname{tg}\alpha B_{11}^{+}-\operatorname{ctg}\alpha B_{22}^{+}+B_{12}^{+}\right]+$$

$$(1.10)\quad+\delta\Sigma_1\frac{B_{11}^{-}-B_{11}^{+}}{\cos\alpha}+\delta\Sigma_2\frac{B_{22}^{-}-B_{22}^{+}}{\sin\alpha}+\delta s_1\frac{A_1^{-}-A_1^{+}}{2}+\delta s_2\frac{A_2^{-}-A_2^{+}}{2}+$$

$$+\delta R_n\left[-\frac{A_1^{+}+A_1^{-}}{2}\cos\alpha-\frac{A_2^{+}+A_2^{-}}{2}\sin\alpha\right]+$$

$$+\delta R_m\left[\frac{A_1^{+}+A_1^{-}}{2}\sin\alpha-\frac{A_2^{+}+A_2^{-}}{2}\cos\alpha\right]+\left[\Lambda_r^{-}\delta\lambda_r^{-}-\Lambda_r^{+}\delta\lambda_r^{+}\right]+\delta U=0.$$

Функция U должна быть инвариантной относительно пространственных сдвигов $(U_{s_i}\equiv 0)$. Тогда из (1.10), (1.7) следуют два условия непрерывности: $A_i^{+}=A_i^{-}$, или

$$(1.11)\quad \begin{aligned}(F_{u_{1,1}}\cos\alpha+F_{\gamma}\sin\alpha)^{+}&=(F_{u_{1,1}}\cos\alpha+F_{\gamma}\sin\alpha)^{-},\\ (F_{\gamma}\cos\alpha+F_{u_{2,2}}\sin\alpha)^{+}&=(F_{\gamma}\cos\alpha+F_{u_{2,2}}\sin\alpha)^{-}.\end{aligned}$$

Таким образом, из предположений о существовании вариационной формулировки и инвариантности функции, определенной на линии разрыва, относительно пространственных сдвигов следуют два условия непрерывности (сохранения) на этой линии. Этот результат не случаен и является частным случаем известных фундаментальных связей свойств инвариантности с законами сохранения.

Естественно предположить, что функция U может зависеть только от непрерывных компонент напряжений. Поэтому в общем случае скобки при вариациях $\delta\sigma_{12}$ должны обращаться в нуль. В отличие от (1.11) последние требования приводят к связям на переменные только по одну сторону от L:

$$F_{\sigma_{11,1}}-F_{\sigma_{12,2}}\equiv 0,\quad F_{\sigma_{22,2}}-F_{\sigma_{12,1}}\equiv 0,\quad F_{\sigma_{11,2}}\equiv 0,\quad F_{\sigma_{22,1}}\equiv 0.$$

Следовательно, порождающая функция F от производных напряжений может зависеть только через комбинации

$$(1.12)\quad p_1=\sigma_{11,1}+\sigma_{12,2},\quad p_2=\sigma_{12,1}+\sigma_{22,2},\quad F=F(\ldots p_1,\ p_2\ \ldots).$$

Справедливость представления (1.12) следует и из того факта, что на границе Г может быть задана информация о напряжениях, определенных только на площадках, касательных к Г. Необходимость (1.12) для внутренних точек S^{+}, S^{-} можно показать, исходя из требований инвариантности.

Полученные результаты позволяют несколько упростить систему (1.3) и условия (1.5), (1.6):

$$(1.13)\quad \frac{\partial}{\partial x_1}F_{p_1}=F_{\sigma_{11}},\ \frac{\partial}{\partial x_2}F_{p_2}=F_{\sigma_{22}},\ \frac{\partial}{\partial x_1}F_{p_2}+\frac{\partial}{\partial x_2}F_{p_1}=F_{\sigma_{12}};$$

$$(1.14)\quad \delta\Sigma_n\left[\left(F_{p_1^{+}}-F_{p_1^{-}}\right)\cos\alpha+\left(F_{p_2^{+}}-F_{p_2^{-}}\right)\sin\alpha\right]+$$

$$+\delta\Sigma_m\left[-\left(F_{p_1^{+}}-F_{p_1^{-}}\right)\sin\alpha+\left(F_{p_2^{+}}-F_{p_2^{-}}\right)\cos\alpha\right]+$$

$$+A_n\delta R_n+A_m\delta R_m+\Lambda_r^{+}\delta\lambda_r^{+}-\Lambda_r^{-}\delta\lambda_r^{-}=\delta U,$$

где $A_n=A_1\cos\alpha+A_2\sin\alpha$; $A_m=-A_1\sin\alpha+A_2\cos\alpha$;

$$(1.15)\quad \left(F_{u_{1,1}}\cos\psi + F_\gamma \sin\psi\right)\delta u_1 + \left(F_\gamma\cos\psi + F_{u_{2,2}}\sin\psi\right)\delta u_2 + \\ + F_{p_1}(\delta\sigma_{11}\cos\psi + \delta\sigma_{12}\sin\psi) + F_{p_2}(\delta\sigma_{12}\cos\psi + \delta\sigma_{22}\sin\psi) + \\ + \left(F_{\lambda_{r,1}}\cos\psi + F_{\lambda_{r,2}}\sin\psi\right)\delta\lambda_r = \delta\Pi.$$

Ограничимся классическим случаем, когда состояние элементарного объема среды полностью характеризуется тензорами напряжений и деформаций. Отсюда следует, что на внешней границе может задаваться информация только о смещениях или напряжениях. Поэтому, как показывает соотношение (1.15), производные F_{p_i} должны выражаться через смещения

$$(1.16)\quad F_{p_1} = Ku_1,\ F_{p_2} = Ku_2,$$

где K — заданная постоянная.

Выше отмечалось, что на L должны выполняться два условия непрерывности напряжений (1.9) и условия непрерывности (1.11). Соотношения (1.11) не должны давать новых условий по сравнению с (1.9). Последнее требование положим в основу конструирования функционалов.

Если функционал зависит от производных $\lambda_{r,k}$, то, как показывает условие (1.15), переменные λ_r должны сводиться либо к перемещениям, либо к напряжениям. Введение таких переменных приводит к задаче в пространстве большей размерности, причем на решении должны выполняться равенства типа $\lambda_r = \sigma_{ij},\ u_k$. Обобщения на этот случай очевидны и в дальнейшем не рассматриваются. Если функционал зависит от самих переменных λ_r, то уравнения (1.3), (1.4) будут описывать в общем случае некоторое пластическое состояние среды. С другой стороны, диаграмма напряжения — разрывы смещений, определяемая функцией U, по своему механическому смыслу должна иметь ниспадающую ветвь. Поэтому, если учитывать возможное пластическое течение вне линии разрыва, необходимо учитывать и эффекты разгрузки, которые происходят вследствие развития линии. В данной работе эта задача не рассматривается, и поэтому случай, когда функционал зависит от λ_r, исключается.

Условия непрерывности (1.9), (1.11) показывают, что система (1.2) должна иметь смысл уравнений равновесия. Предположим, что объемные силы от напряженного состояния не зависят $\left(F_{u_k\sigma_{ij}} \equiv 0\right)$. Отсюда и (1.16) следует представление

$$(1.17)\quad F = K(u_1p_1 + u_2p_2) + X(u_1, u_2) + F^0(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, x_h),$$

где $\varepsilon_{ii} = u_{i,i}$, $\varepsilon_{12} = \gamma$. Последнее позволяет упростить уравнения (1.13):

$$(1.18)\quad F^0_{\sigma_{11}}(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, x_k) = K\varepsilon_{11},\ F^0_{\sigma_{22}} = K\varepsilon_{22},\ F^0_{\sigma_{12}} = K\varepsilon_{12}.$$

Уравнения (1.18) представляют собой алгебраическую систему относительно напряжений или деформаций. Пусть решение системы имеет вид

$$(1.19)\quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{hh},\ x_k),\ \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\sigma_{hh}, x_k)\ (h = 1, 2).$$

(Функция F^0 должна быть такой, чтобы решение от параметра K не зависело.)

Требование совпадения условий непрерывности (1.9), (1.11) накладывает ограничение на допустимый класс функций F^0. Минимальное ограничение на F^0 состоит в том, что (1.9), (1.11) совпадают на решении (1.19). Из сравнения (1.9) с (1.11) следует, что на решении (1.19) должны выполняться равенства

$$(1.20)\quad F^0_{\varepsilon_{11}}(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, x_k) = M\sigma_{11},\ F^0_{\varepsilon_{22}} = M\sigma_{22},\ F^0_{\varepsilon_{12}} = M\sigma_{12}.$$

В дальнейшем уравнения (1.20) будем рассматривать как алгебраическую систему относительно напряжений или деформаций. Тогда функция F^0 должна быть такой, что решения систем (1.18), (1.20) совпадали между собой и с заданным решением (1.19).

Способы построения функции F^0 удобнее проиллюстрировать на простейшей одномерной ситуации. В одномерном случае задача сводится к следующей. Найти функцию двух переменных $z = f(x, y)$ такую, что на заданной кривой $y = y(x)$, $x = x(y)$

$$f_x(x, y) \equiv Ky, \; f_y(x, y) \equiv Mx.$$

Решение будем искать в виде суммы $f = \Phi(x, y) + \Psi(x, y)$, где $\Phi(x, y)$ является общим решением однородной задачи: при $y = y(x)$ $\Phi_x \equiv 0$, $\Phi_y \equiv 0$, а функция Ψ — частное решение неоднородной задачи. Функция Φ определяет в трехмерном пространстве поверхность с нормалью $\bar{n}$. Очевидно, что на кривой $y = y(x)$ $\Phi = \text{const}$, $\bar{n} = \{0, 0, 1\}$. Таким образом, поверхность $z = \Phi(x, y)$ должна касаться плоскости $z = \text{const}$ по кривой $y = y(x)$. Частное решение будем искать в виде

$$\Psi = \Psi_1(x) + \Psi_2(y) + \xi xy,$$

где $\xi = \text{const}$.

Тогда $f(x, y) = (K - \xi)\int y(x)\,dx + (M - \xi)\int x(y)\,dy + \xi xy + \Phi(x, y)$.

Рассмотренные построения можно обобщить на многомерную задачу. Пусть $\Phi(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, x_k)$ — общее решение однородной задачи, т. е. на функциях (1.19) $\Phi_{\varepsilon_{ij}} \equiv 0$, $\Phi_{\sigma_{ij}} \equiv 0$. Одна из конструкций Φ следующая:

$$\Phi = \Phi[\sigma_{ij} - \sigma_{ij}(\varepsilon_{kh}, x_k), \; \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}(\sigma_{kh}, x_k)],$$

Φ — произвольная функция, равная нулю со своими первыми производными при нулевых аргументах. Частное решение неоднородной задачи можно искать в виде

$$\Psi = \Psi_1(\varepsilon_{ij}, x_k) + \Psi_2(\sigma_{ij}, x_k) + \xi(\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{12}\varepsilon_{12}),$$

где функции Ψ_i являются решениями дифференциальных уравнений

(1.21)
$$\Psi_{1,\varepsilon_{ij}}(\varepsilon_{kh}, x_k) = (M - \xi)\,\sigma_{ij}(\varepsilon_{kh}, x_k),$$
$$\Psi_{2,\sigma_{ij}}(\sigma_{kh}, x_k) = (K - \xi)\,\varepsilon_{ij}(\sigma_{kh}, x_k).$$

Рассмотрим подробнее случай линейно-упругого тела:

$$\sigma_{11} = A\varepsilon_{11} + B\varepsilon_{22}, \; \sigma_{22} = B\varepsilon_{11} + A\varepsilon_{22}, \; \sigma_{12} = C\varepsilon_{12},$$
$$\varepsilon_{11} = a\sigma_{11} + b\sigma_{22}, \; \varepsilon_{22} = b\sigma_{11} + a\sigma_{22}, \; \varepsilon_{12} = c\sigma_{12},$$

где $A = 2\mu(1 - \nu)/(1 - 2\nu)$, $B = 2\mu\nu/(1 - 2\nu)$, $C = \mu$ для плоской деформации; $A = \lambda^* + 2\mu$, $B = \lambda^*$, $C = \mu$, $\lambda^* = E\nu/(1 - \nu^2)$ для плоского напряженного состояния; $a = A/(A^2 - B^2)$; $b = -B/(A^2 - B^2)$; $c = 1/C$; μ, ν, E — упругие постоянные. Решение уравнений (1.21) имеет вид

$$\Psi_1 = (M - \xi)\left[\frac{A}{2}\left(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2\right) + B\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \frac{C}{2}\varepsilon_{12}^2\right],$$
$$\Psi_2 = (K - \xi)\left[\frac{a}{2}\left(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2\right) + b\sigma_{11}\sigma_{22} + \frac{c}{2}\sigma_{12}^2\right].$$

Перейдем теперь к ограничениям на функционалы, которые накладываются системой (1.2). Предположим, что объемные силы от смещений не зависят и, следовательно, функция X в представлении (1.17) линейна

$(X = Y_1u_1 + Y_2u_2)$. Функция F такова, что система (1.2) с учетом (1.3) преобразуется к виду

$$(K - M)p_1 + Y_1 = 0,\ (K - M)p_2 + Y_2 = 0.$$

Отсюда следует необходимое условие разрешимости задачи: $K \neq M$ и механический смысл коэффициентов: $Y_i = (K - M)X_i$, где X_i — компоненты объемных сил.

Таким образом, рассматриваемые задачи разрушения (в частности, задачи деформирования без разрывов) допускают бесконечно много вариационных формулировок, соответствующих различным порождающим функциям F:

$$F = K(u_1p_1 + u_2p_2) + Y_1u_1 + Y_2u_2 + \Phi(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, x_k) + \Psi_1(\varepsilon_{ij}, x_k) + \\ + \Psi_2(\sigma_{ij}, x_k) + \xi(\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{12}\varepsilon_{12}).$$

Укажем основные частные случаи.

1. Пусть $\xi = 0$, $K = 0$, $M = 1$, $\Phi \equiv 0$. Тогда вариационный принцип сводится к обобщенному принципу возможных перемещений. Этот вариант, а также примеры решения краевых задач об устойчивом и неустойчивом развитии трещин рассматривались в [2, 3].

2. Если $\xi = 0$, $K = 1$, $M = 0$, $\Phi \equiv 0$, то принцип сводится к обобщенному принципу Кастильяно.

3. Случай $\xi = 1$, $K = 0$, $M = 1$, $\Phi \equiv 0$ соответствует принципу Рейсснера.

2. Рассмотрим основные типы граничных условий. Условия на внешней границе (1.15) с учетом уравнений (1.18) преобразуются к виду

$$M\Sigma_1\delta u_1 + M\Sigma_2\delta u_2 + Ku_1\delta\Sigma_1 + Ku_2\delta\Sigma_2 = \delta\Pi. \tag{2.1}$$

Очевидно, что функция Π может зависеть только от аргументов u_i, Σ_i, x_k. Пусть $\Pi = \Sigma_1Ku_1^0 + \Sigma_2Ku_2^0$ и на границе варьируются только напряжения $(u_i = u_i^0)$. Указанный вид Π описывает заданные граничные смещения. Если на границе варьируются только смещения $(\Sigma_i = \Sigma_i^0)$, то $\Pi = M\Sigma_1^0u_1 + M\Sigma_2^0u_2$. Этот случай соответствует заданным граничным напряжениям.

Предположим теперь, что на границе допускаются вариации как смещений, так и напряжений. Без ограничения общности можно принять, что $\Pi = g(u_i, x_k) + \varphi(\Sigma_i, x_k)$. Из (2.1) следует

$$M\Sigma_1 = g_{u_1}(u_i, x_k),\ M\Sigma_2 = g_{u_2}(u_i, x_k); \tag{2.2}$$

$$Ku_1 = \varphi_{\Sigma_1}(\Sigma_i, x_k),\ Ku_2 = \varphi_{\Sigma_2}(\Sigma_i, x_k). \tag{2.3}$$

Этот вариант означает, что на границе заданы напряжения как функции смещений или смещения как функции напряжений. Условия (2.2), (2.3) выражают одну и ту же механическую зависимость. Поэтому функции g, φ должны быть связаны между собой.

Отметим одно обстоятельство. Если формально положить $M = K$, то левую часть (2.1) можно представить как полный дифференциал. Поэтому, полагая $\Pi = M(\Sigma_1u_1 + \Sigma_2u_2)$, граничным условиям можно удовлетворить тождественно. Следовательно, в этом случае из функционала исключается информация о граничных условиях, и вариационная задача становится, вообще говоря, неопределенной. Полученное выше из других соображений ограничение $M \neq K$ исключает подобную ситуацию.

Перейдем к вопросу об условиях на линии разрыва. Если учесть факт эквивалентности систем (1.18) и (1.20), то условия (1.14) можно преобразовать к виду

$$M\Sigma_n\delta R_n + M\Sigma_m\delta R_m + KR_n\delta\Sigma_n + KR_m\delta\Sigma_m = \delta U. \tag{2.4}$$

На линии возможного разрыва L должно выполняться условие неперекрывания областей S^-, S^+. При численном решении конкретных задач этому условию удобнее удовлетворять, полагая U достаточно большим, если пробные значения R_n, R_m дают перекрывание областей [2]. Пусть функционал зависит только от смещений и дополнительных кинематических ограничений на линии разрыва нет. Тогда из (2.4) следует

$$A_n = U_{R_n}(R_n, R_m, x_k), \quad A_m = U_{R_m}(R_n, R_m, x_k). \tag{2.5}$$

Последние условия имеют смысл связей нормального и касательного напряжений, действующих на линии, с разрывами смещений. Если на L нормальная компонента разрыва явно связана с касательной компонентой

$$f(R_n, R_m) = 0, \tag{2.6}$$

то второе условие имеет вид

$$f_{R_m}\left(U_{R_n} - A_n\right) - f_{R_n}\left(U_{R_m} - A_m\right) = 0.$$

По аналогии с определением дилатансии как свойства материала изменять объем при сдвиге условие (2.6) можно назвать условием локализованной дилатансии. Если функционал зависит только от напряжений и дополнительных ограничений на линии разрыва нет, то на L выполняются условия:

$$\begin{gathered} -\left(F_{p_1^+} - F_{p_1^-}\right)\sin\alpha + \left(F_{p_2^+} - F_{p_2^-}\right)\cos\alpha = U_{\Sigma_m}, \\ \left(F_{p_1^+} - F_{p_1^-}\right)\cos\alpha + \left(F_{p_2^+} - F_{p_2^-}\right)\sin\alpha = U_{\Sigma_n}, \end{gathered} \tag{2.7}$$

имеющие тот же смысл, что (2.5). В общем случае, когда функционал зависит как от напряжений, так и от смещений, выполняются условия (2.5), (2.7), причем функция U должна быть такой, чтобы ее частные производные описывали одну и ту же связь напряжений с разрывами смещений.

Исходя из (2.1), (2.4), можно рассмотреть более сложные краевые условия и свойства материала на линии разрыва.

3. Выше предполагалось, что линии возможного разрыва заранее известны. В точной постановке линии должны определяться в процессе решения задачи. Если линия разрыва заранее неизвестна, то W представляет собой функционал относительно кривой L, напряжений, смещений и переменных λ_r. Естественно усилить принятый вариационный принцип и рассмотреть те линии разрыва, которые доставляют функционалу наиболее глубокий минимум (или стационарное значение). Пусть $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ — параметрические уравнения кривой L, $s = \sqrt{(x_1')^2 + (x_2')^2}$. Варьированную линию возможного разрыва будем считать близкой к исходной в смысле близости первого порядка $(\delta x_i, \delta x_i' \ll 1)$. Необходимое условие стационарности функционала приведет к прежним краевым условиям, связям на линии возможного разрыва и уравнениям в областях гладкости. Дополнительные соотношения получатся для линий возможного разрыва. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательные результаты. Если функционал не зависит от напряжений и вариации δR_m, δR_n независимы или связаны условием, не зависящим от x_i, то

$$\begin{gathered} (U\sin\alpha)' + U_{x_1} + (\varkappa_\alpha\cos\alpha)' + \varkappa_1 - [F]\cos\alpha = 0, \\ -(U\cos\alpha)' + U_{x_2} + (\varkappa_\alpha\sin\alpha)' + \varkappa_2 - [F]\sin\alpha = 0, \end{gathered} \tag{3.1}$$

где штрихом обозначен оператор d/sdt; $[F] = F^+ - F^-$;

$$\varkappa_1 = A_1R_{1,1} + A_2R_{2,1};\ \varkappa_2 = A_1R_{1,2} + A_2R_{2,2};\ \varkappa_\alpha = A_1R_2 - A_2R_1.$$

Уравнения (3.1) получены из предположения, что обе вариации δx_i независимы. Следовательно, в (3.1) содержится информация и о варьировании L вдоль себя. Можно показать, что сумма этих уравнений, умноженных на $(-\sin\alpha)$ и $\cos\alpha$. действительно приводит к тождеству. В качестве независимого уравнения естественно взять линейную комбинацию уравнений (3.1) с коэффициентами $\cos\alpha$, $\sin\alpha$:

$$U\alpha' + U_{x_1}\cos\alpha + U_{x_2}\sin\alpha + (\varkappa_\alpha)' + \varkappa_1\cos\alpha + \varkappa_2\sin\alpha - [F] = 0. \tag{3.2}$$

В частном случае, когда допускаются только касательные разрывы смещения, (3.2) переходит в соответствующее уравнение [1]. Отметим, что при центральных силах взаимодействия между берегами разрыва (вектор напряжения направлен вдоль вектора разрыва смещений) $U = U\left(\sqrt{R_n^2 + R_m^2}, x_k\right)$, $\varkappa_\alpha \equiv 0$ и уравнение (3.2) упрощается.

Если функционал не зависит от производных перемещений, то уравнение «экстремальной» линии разрыва сводится к следующему:

$$U\alpha' + U_{x_1}\cos\alpha + U_{x_2}\sin\alpha - \left[M_\alpha'\right] - [M_1]\cos\alpha - [M_2]\sin\alpha - [F] = 0,$$

$$\text{где } M_i = -F_{p_1}(\sigma_{11,i}\cos\alpha + \sigma_{12,i}\sin\alpha) - F_{p_2}(\sigma_{12,i}\cos\alpha + \sigma_{22,i}\sin\alpha);$$

$$M_\alpha = -F_{p_1}[-(\sigma_{11} - \sigma_{22})\sin\alpha + 2\sigma_{12}\cos\alpha] + \\ + F_{p_2}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})\cos\alpha + 2\sigma_{12}\sin\alpha].$$

В общем случае, когда функционал зависит как от смещений, так и от напряжений:

$$U\alpha' + U_{x_1}\cos\alpha + U_{x_2}\sin\alpha + (\varkappa_\alpha)' + (\varkappa_1\cos\alpha + \varkappa_2\sin\alpha) - \\ - \left[M_\alpha'\right] - [M_1]\cos\alpha - [M_2]\sin\alpha - [F] = 0.$$

Перейдем к вопросу об условиях выхода линии разрыва на внешнюю границу Г. Для определенности рассмотрим краевое условие в точке $t = t_2$. Так как $x_i(t_2) \in \Gamma$, то вариации δx_i в этой точке связаны между собой: $\delta x_1 = \delta H\sin\psi$, $\delta x_2 = -\delta H\cos\psi$, где δH — параметр. Если положение конца линии разрыва известно (например, $x_i(t_2)$ совпадает либо с точкой разрыва граничных перемещений или напряжений, либо с точкой смены типа граничных условий), то $\delta H = 0$ и граничное условие имеет вид $x_i(t_2) = x_i^0$, где x_i^0 — заданы. Это условие удовлетворяет требованию стационарности W. Если положение конца линии разрыва неизвестно, то $\delta H \neq 0$ и требование стационарности приводит к следующему краевому условию:

$$-U\cos(\psi - \alpha) - \varkappa_\alpha\sin(\psi - \alpha) + [M_\alpha]\sin(\psi - \alpha) - Q = 0,$$

$$\text{где } Q = \Pi^+\left(u_i^+, \Sigma_i^+, x_k\right) - \Pi^-\left(u_i^-, \Sigma_i^-, x_k\right).$$

Таким образом, усиленный вариационный принцип позволяет определять как разрывные поля смещений и напряжений, так и положения линий разрыва. Однако при таком подходе не учитывается история нагружения материала, и в общем случае «экстремальные» линии разрыва могут служить только для оценок реальных процессов деформирования. (Учет истории нагружения приведет к запрещению вариаций δx_i на тех участках L, где разрыв уже реализовался.)

При определенных параметрах нагружения разрывы не реализуются и стационарное значение функционала (1.1) будет достигаться на классе гладких функций, хотя и ищется в классе разрывных функций. Этот результат пересекается с результатами, полученными в работе [4]. Выше рассматривались условия стационарности полного функционала (1.1) только в пространстве напряжений и смещений. Можно рассмотреть различные преобразования вариационной задачи методами, развитыми в [5, 6]. Дальнейшие ссылки на работы по применению вариационных методов к задачам разрушения и модельным представлениям содержатся в [1, 2].

Автор выражает благодарность Е. И. Шемякину за ценные замечания.

Поступила 15 X 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И.** Некоторые постановки краевых задач L-пластичности.— ПМТФ, 1979, № 2.
2. **Крамаренко В. И., Ревуженко А. Ф.** Некоторые задачи разрушения в вариационных постановках.— ФТПРПИ, 1978, № 6.
3. **Крамаренко В. И.** Развитие линии скольжения в брусе при изгибе.— ПМТФ, 1979, № 2.
4. **Prager W.** Variational principles of linear elastostatics for discontinuous displacement, strains, and stresses.— In: Recent Progress in Applied Mechanics. The F. Odqvist Volume. N. Y., 1967. Рус. пер. **В. Прагер.** Вариационные принципы линейной статической теории упругости при разрывных смещениях, деформациях и напряжениях.— Сб. пер. Механика, 1969, № 5 (117).
5. **Абовский Н. П., Андреев Н. П., Деруга А. П.** Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М., Наука, 1978.
6. **Розин Л. А.** Вариационные постановки задач для упругих систем. Л., изд. Ленингр. ун-та, 1978.

УДК 517.946

О ПРИБЛИЖЕННОМ ОПИСАНИИ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ С МАССАМИ-ОСЦИЛЛЯТОРАМИ

А. М. Хлуднев

(*Новосибирск*)

Вопросу построения приближенных уравнений для описания статических и динамических задач механики сплошной среды с периодической структурой с помощью осреднений посвящено большое число работ. Общий принцип построения таких приближений и утверждения об их сходимости сформулированы в [1—7]. Исходная задача содержит малый параметр, характеризующий размер периода. Суть метода состоит в том, что искомое решение приближается в виде суммы гладкой и быстроосциллирующей составляющих. В работе излагается метод построения приближенных уравнений для системы, описывающей колебания стержня периодической структуры с непрерывно распределенными массами-осцилляторами [8]. Система уравнений может моделировать продольное движение стержневой конструкции с прикрепленными к ней и несущими функциональную нагрузку массами. Изучается вопрос о близости приближенных решений к точному. Получена оценка сходимости.

Рассмотрим задачу о продольных колебаниях стержня периодической структуры с непрерывно распределенными массами - осцилляторами

$$u_{\varepsilon tt}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_{\varepsilon x}\right)=-\int\limits_0^\infty m(\omega)\,v_{\varepsilon tt}d\omega+f \text{ в } Q, \tag{1}$$

$$v_{\varepsilon tt}+\omega^2(v_\varepsilon-u_\varepsilon)=0 \text{ в } \{m(\omega)>0\}\times Q,$$

$u_\varepsilon=u_{\varepsilon t}=v_\varepsilon=v_{\varepsilon t}=0$ при $t=0$; $u_\varepsilon=0$ при $x=0,\ l$. Здесь $u_\varepsilon(t,$