

УДК (539.3 + 532.5):629.12

## ДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ВМОРОЖЕННУЮ ОПОРУ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ СОБСТВЕННЫМИ И КВАЗИСОБСТВЕННЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ЛЕДЯНОЙ ПЛАСТИНЫ

А. Г. Грешилов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия  
E-mail: algreshilov@mail.ru

Приведены результаты численно-аналитического исследования собственных и квазисобственных изгибно-гравитационных колебаний круглой упругой плавающей на поверхности жидкости ледяной пластины, примороженной к цилиндрической вертикальной опоре. В рамках теории длинных волн на мелкой воде для ограниченного и неограниченного бассейнов исследована зависимость собственных и квазисобственных частот от геометрических параметров области колебаний.

Ключевые слова: изгибно-гравитационные колебания, собственные колебания, гидроупругость, мелкая вода, круглая пластина.

DOI: 10.15372/PMTF20160111

**Введение.** Интерес к исследованию задачи о колебаниях ледяной пластины обусловлен ее широкой применимостью во многих практических приложениях и при инженерных расчетах (проектирование плавающих платформ, установка буровых вышек в полярных условиях, проектирование аэродромов на льду и др.).

Следует отметить, что уже существуют проекты гигантских плавучих объектов (аэропортов и островов), основанные на концепции плавающей пластины.

Целью настоящей работы является исследование поведения примороженной к вертикальной опоре упругой пластины, плавающей на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, в случае ограниченного и неограниченного бассейнов, а также определение динамических нагрузок на вертикальную опору. Рассматривается асимптотическое поведение собственных частот при неограниченном увеличении радиуса бассейна, определяется зависимость собственных частот колебаний пластины от собственных частот колебаний свободной поверхности воды в замкнутом бассейне (плескания). При этом собственные и квазисобственные колебания упругой пластины, плавающей на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, рассматриваются в рамках линейной теории мелкой воды.

**Постановка задачи.** К вертикальной жесткой опоре радиусом  $R_0$  приморожена тонкая упругая пластина радиусом  $R_1$  и толщиной  $d$ , расположенная на свободной поверхности слоя идеальной несжимаемой жидкости толщиной  $h$  (рис. 1).

Будем полагать, что справедливы следующие допущения:

1) зазоры между упругой пластиной и свободной поверхностью жидкости отсутствуют;

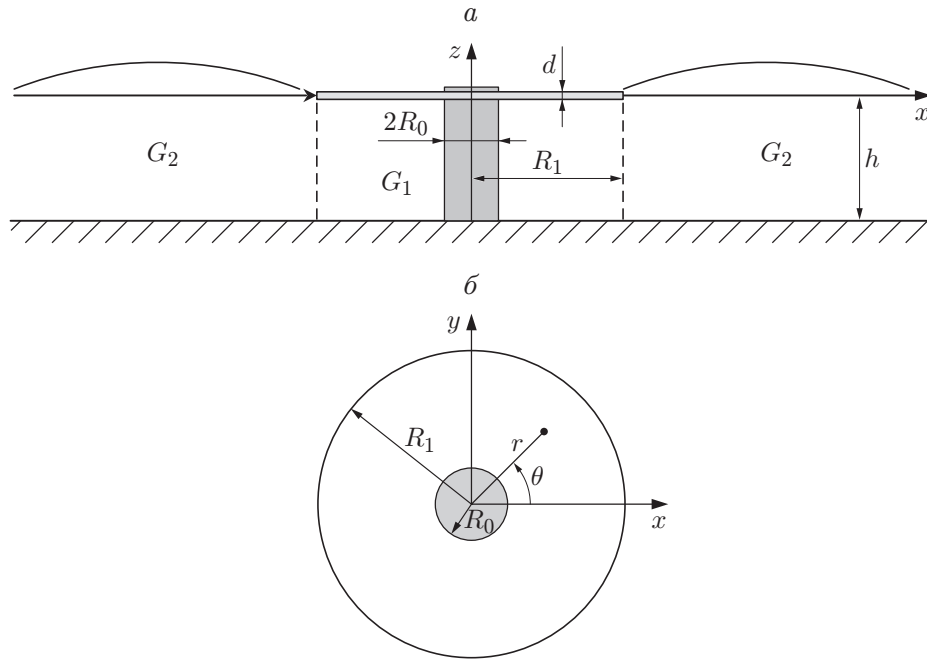


Рис. 1. Геометрия области задачи:  
*a* — вид сбоку, *б* — вид сверху

- 2) кромка упругой пластины  $r = r_0$  закреплена;
- 3) на кромке пластины  $r = r_1$  отсутствуют перерезывающие силы и изгибающие моменты;
- 4) жесткость пластины на изгиб постоянна;
- 5) жидкость является идеальной, несжимаемой, однородной, а ее движение — безвихревым;
- 6) амплитуда волн, вызванных изгибами и кручением упругой пластины, мала;
- 7) колебания упругой пластины, плавающей на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, описываются линейной теорией мелкой воды.

Обозначим область с пластиной и область со свободной поверхностью жидкости через  $G_1$ ,  $G_2$  соответственно, потенциалы скоростей жидкости для этих областей — через  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ , вертикальные прогибы пластины и вертикальные смещения свободной поверхности жидкости — через  $W_1$ ,  $W_2$ . Вертикальные смещения  $W_{1,2}$  удовлетворяют уравнению мелкой воды

$$\frac{\partial W_j}{\partial t} + h \Delta W_j = 0, \quad j = 1, 2, \tag{1}$$

где лапласиан  $\Delta$  в полярных координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

В области  $G_1$  давление жидкости  $P_1$  определяется линеаризованным уравнением Бернулли

$$P_1 = -\rho g W_1 - \rho \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}, \tag{2}$$

в области  $G_2$  давление жидкости на свободной поверхности равно нулю. Прогиб  $W_1$  удовлетворяет уравнению [1]

$$D \Delta^2 W_1 + m \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} = P_1, \tag{3}$$

где  $D = Ed^3/(12(1 - \nu^2))$  — жесткость на изгиб пластины;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $d$  — толщина пластины.

Из уравнений (1)–(3) получаем линеаризованное уравнение для потенциала скорости жидкости для области под упругой пластиной

$$D \Delta^3 \Phi_1 + m \frac{\partial^2 \Delta \Phi_1}{\partial t^2} + \rho g \Delta \Phi_1 - \frac{\rho}{h} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

где  $m = \rho_{pl}d$  — масса пластины на единицу площади;  $\rho_{pl}$ ,  $\rho$  — плотность пластины и воды;  $g$  — ускорение свободного падения.

**Кинематические и динамические граничные условия.** Согласно [2] в области  $G_1$  на границе пластины и опоры при  $r = R_0$  задаем условие непротекания

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = 0, \quad (5)$$

на границе областей  $G_1$ ,  $G_2$  при  $r = R_1$  — условия сопряжения

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \Big|_{r=R_1-0} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \Big|_{r=R_1+0}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \Big|_{r=R_1-0} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \Big|_{r=R_1+0}. \quad (7)$$

В области  $G_1$  на границе пластины и опоры при  $r = R_0$  имеют место условия [1]

$$\Delta \Phi_1 \Big|_{r=R_0} = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Delta \Phi_1}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = 0. \quad (9)$$

При  $r = R_0$  условие (8) является условием равенства нулю вертикальных прогибов пластины, условие (9) — условием равенства нулю угла наклона плоскости, касательной к изогнутой срединной поверхности пластины [1].

На свободной кромке пластины при  $r = R_1$  суммарная вертикальная сила  $F$  и изгибающий момент  $M_r$  равны нулю [1]:

$$M_r = 0; \quad (10)$$

$$F = Q_r - \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} = 0. \quad (11)$$

Здесь  $Q_r$  — перерезывающая сила;  $M_{r\theta}$  — крутящий момент. Выражения для  $M_r$ ,  $Q_r$ ,  $M_{r\theta}$  в полярных координатах имеют вид [1]

$$M_r = -D \left[ \frac{\partial^2 W_1}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial W_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \theta^2} \right) \right]; \quad (12)$$

$$Q_r = -D \frac{\partial \Delta W_1}{\partial r}; \quad (13)$$

$$M_{r\theta} = D(1 - \nu) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W_1}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial W_1}{\partial \theta} \right). \quad (14)$$

Используя уравнения (10), (11), граничные условия для пластины при  $r = R_1$  запишем в виде

$$L_1(W_1) \Big|_{r=R_1} \equiv \left[ \Delta - \frac{1 - \nu}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right] W_1 = 0; \quad (15)$$

$$L_2(W_1)|_{r=R_1} \equiv \left[ \frac{\partial}{\partial r} \Delta + \frac{1-\nu}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] W_1 = 0. \quad (16)$$

Дифференцируя выражения (15), (16) и используя уравнение мелкой воды, получаем граничные условия при  $r = R_1$ :

$$L_1(\Delta\Phi_1)|_{r=R_1} = 0, \quad L_2(\Delta\Phi_1)|_{r=R_1} = 0.$$

**Решение дифференциального уравнения (4).** Примем следующие зависимости от времени вертикальных прогибов и потенциалов скоростей жидкости:

$$W_j(t) = w_j(r, \theta) e^{-i\omega t}, \quad \Phi_j(t) = \varphi_j(r, \theta) e^{-i\omega t}, \quad j = 1, 2. \quad (17)$$

С учетом выражений (4), (17) уравнение для  $\varphi_1(r, \theta)$  запишем в виде

$$(D\Delta^3 + a\Delta + b)\varphi_1 = 0, \quad (18)$$

где  $a = \rho g(1 - \sigma)$ ;  $\sigma = \omega^2 m / (\rho g)$ ;  $b = \rho g k^2$ ;  $\omega$  — частоты собственных и квазисобственных колебаний;  $k$  — волновое число. В области  $G_2$  потенциал  $\varphi_2$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta\varphi_2 + k^2\varphi_2 = 0. \quad (19)$$

При рассмотрении квазисобственных колебаний упругой пластины в области  $G_2$  ставится условие излучения [3]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} - ik\varphi_2 \right) = 0.$$

При рассмотрении собственных колебаний упругой пластины в области  $G_2$  вместо условия излучения задается условие непротекания на границе бассейна

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=R_2} = 0,$$

где  $R_2$  — радиус бассейна. Из кинематических и динамических граничных условий (5)–(9), (15), (16) получаем граничные условия для функций  $\varphi_1, \varphi_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = 0, \quad \Delta\varphi_1 \Big|_{r=R_0} = 0, \quad \frac{\partial \Delta\varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = 0, \\ \varphi_1 \Big|_{r=R_1-0} = \varphi_2 \Big|_{r=R_1+0}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=R_1-0} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=R_1+0}, \\ L_1(\Delta\varphi_1) \Big|_{r=R_1} = 0, \quad L_2(\Delta\varphi_1) \Big|_{r=R_1} = 0. \end{aligned}$$

Уравнение (18) для области  $G_1$  представим в форме

$$\prod_{s=1}^3 (\Delta - Z_s)\varphi_1 = 0, \quad (20)$$

где  $Z_s$  ( $s = 1, 2, 3$ ) — корни кубического уравнения  $DZ^3 + aZ + b = 0$ . Решение дифференциального уравнения (20) получаем в следующем виде [4]:

$$\varphi_1 = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (A_{m,n} I_n(\tau_m r) + B_{m,n} K_n(\tau_m r)) e^{in\theta}.$$

Здесь  $\tau_m = \sqrt{Z_m}$ ;  $\text{Re}(Z_m) > 0$ ;  $I_n(\tau_m r)$ ,  $K_n(\tau_m r)$  — функции Бесселя;  $A_{m,n}$ ,  $B_{m,n}$  — константы. В области  $G_2$  решение уравнения Гельмгольца (19) принимает следующий вид:

— при собственных колебаниях

$$\varphi_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (G_n H_n^1(kr) + F_n H_n^2(kr)) e^{in\theta}$$

$(H_n^1(kr), H_n^2(kr))$  — функции Ганкеля;  $G_n, F_n$  — константы);

— при квазисобственных колебаниях

$$\varphi_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_n H_n^1(kr) e^{in\theta}.$$

Функции  $w_1, \varphi_1$  связаны соотношением

$$w_1 = -\frac{ih}{\omega} \Delta \varphi_1.$$

Коэффициенты  $A_{m,n}, B_{m,n}, G_n, F_n$  определяются из системы линейных уравнений, полученных из граничных условий [4]:

$$C^{(n)} \cdot \mathbf{x}^{(n)} = 0.$$

Здесь  $C^{(n)}$  — матрица, составленная из множителей при коэффициентах  $A_{m,n}, B_{m,n}, G_n, F_n$ ;  $\mathbf{x}^{(n)}$  — вектор-столбец, состоящий из коэффициентов  $A_{m,n}, B_{m,n}, G_n, F_n$ . Волновое число  $k$  для собственных и квазисобственных колебаний пластины находится из уравнения  $\det C^{(n)} = 0$  ( $k = k_1 = k_2 = \dots$ ).

**Результаты численных исследований.** Численные расчеты проводились при следующих значениях параметров:  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>,  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_{pl} = 900$  кг/м<sup>3</sup>,  $E = 4,14 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu = 0,15$ ,  $R_0 = 30$  м,  $R_1 = 1000$  м,  $d = 3$  м,  $h = 30$  м. Поскольку низкочастотные моды оказывают более существенное влияние на изгибно-гравитационные формы колебаний, чем моды высокой частоты [5], далее в численных расчетах рассматриваются радиальные моды колебаний пластины при  $k = k_1, n = 0, 1$ .

На рис. 2 показаны формы гравитационно-изгибных колебаний пластины для радиальной моды колебаний при  $k = k_1, n = 0, 1, R_1 = 500$  м. Видно, что при первой гармонике низкочастотной моды колебаний ( $n = 0$ ) возникает выталкивающая сила, которая определяется действующими на опору перерезывающими силами и моментами (12)–(14). Однако в рамках используемой модели упругой пластины определить раскачивающие опору силы, возникающие вследствие колебаний по второй гармонике ( $n = 1$ ), невозможно, поскольку отсутствуют горизонтальные касательные усилия и усилия, нормальные к боковым граням малого элемента пластины, вследствие пренебрежения деформацией срединной плоскости [1].

В табл. 1 представлены асимптотики собственных частот для первой ( $n = 0$ ) и второй ( $n = 1$ ) гармоник низкочастотной радиальной моды колебаний при  $R_2 \rightarrow \infty$ .

При увеличении радиуса бассейна наблюдается уменьшение собственных частот. Также при увеличении радиуса бассейна значения собственных частот колебаний пластины стремятся к значениям  $\omega_*$  собственных частот колебаний свободной поверхности воды в ограниченном бассейне. В случае бассейна бесконечного радиуса при  $k = k_1$  квазисобственная частота радиальной моды колебаний пластины для  $n = 0$  равна  $\omega = 0,0240 - 0,0497i$  рад/с, для  $n = 1$  —  $\omega = 0,0086 - 0,0172i$  рад/с.

На рис. 3 представлена зависимость собственных частот колебаний пластины  $\omega$  от радиуса бассейна  $R_2$  для радиальной моды колебаний при  $n = 0$ , полученная с использованием данных, приведенных в табл. 1. Для радиальной моды колебаний при  $n = 1$  зависимость аналогична. На рис. 3 видно, что зависимость собственных частот колебаний

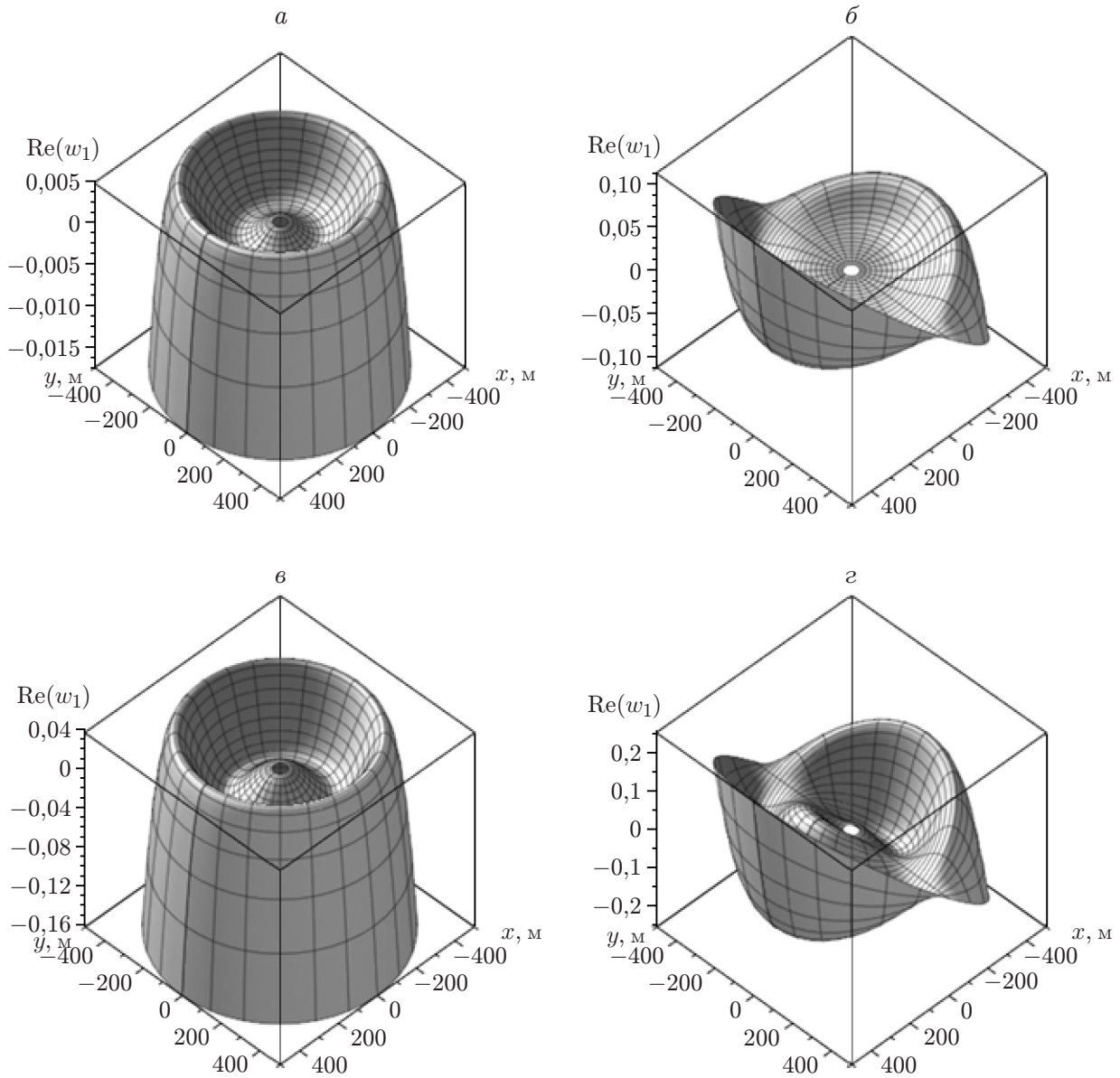


Рис. 2. Зависимость формы собственных (*a–в*) и квазисобственных (*г*) колебаний  $\text{Re}(w_1)$  от пространственных координат для радиальной моды колебаний при  $k = k_1$ ,  $R_0 = 30$  м,  $R_1 = 500$  м,  $R_2 = 5000$  м,  $d = 3$  м,  $h = 30$  м:  
*a* —  $n = 0$ ,  $\omega = 0,1313$  рад/с, *б* —  $n = 1$ ,  $\omega = 0,0631$  рад/с, *в* —  $n = 0$ ,  $\omega = 0,0583 - 0,1029i$  рад/с, *г* —  $n = 1$ ,  $\omega = 0,0171 - 0,0360i$  рад/с

Таблица 1

Зависимость собственных частот от радиуса бассейна  
для радиальной моды колебаний при  $k = k_1$ ,  $n = 0; 1$

$R_2$ , м	$n = 0$		$n = 1$	
	$\omega$ , рад/с	$\omega_*$ , рад/с	$\omega$ , рад/с	$\omega_*$ , рад/с
1000	0,068 500	0,064 829 00	0,031 400	0,301 770 00
2000	0,032 400	0,031 134 00	0,015 900	0,015 671 00
4000	0,016 500	0,016 465 00	0,008 020	0,007 870 20
8000	0,008 180	0,008 144 60	0,003 880	0,003 857 90
16 000	0,004 120	0,004 081 30	0,001 970	0,001 954 70
32 000	0,002 060	0,002 052 10	0,000 982	0,000 981 29
64 000	0,001 030	0,001 029 40	0,000 496	0,000 495 29
128 000	0,000 513	0,000 512 16	0,000 243	0,000 242 93

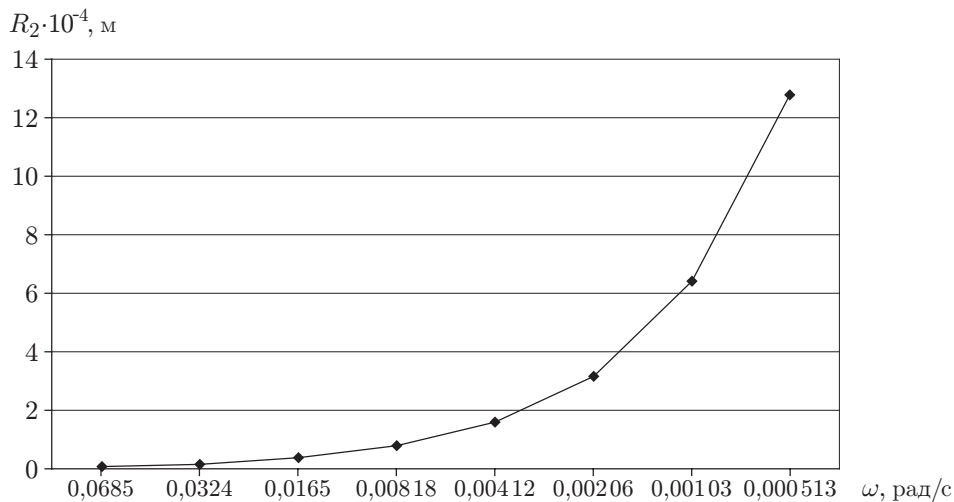


Рис. 3. Зависимость собственных частот колебаний пластины  $\omega$  от радиуса бассейна  $R_2$  для радиальной моды колебаний при  $k = k_1$ ,  $n = 0$

пластины от радиуса бассейна аппроксимируется гиперболой и при  $R_2 \rightarrow \infty$  собственные частоты колебаний пластины  $\omega \rightarrow 0$ . Можно сделать вывод, что в рамках выбранной модели при  $R_2 \rightarrow \infty$  квазисобственные частоты колебаний пластины не зависят от собственных частот.

В табл. 2 приведены значения (полученные с использованием данных для собственных частот колебаний пластины радиальной моды при  $n = 0$  (см. табл. 1)) выталкивающих сил  $F$ , действующих на опору со стороны пластины при значениях коэффициентов  $A_{m,n}$ ,  $B_{m,n}$ ,  $G_n$ ,  $F_n$ , равных значениям компонент вектора из нуль-пространства матрицы  $C^{(n)}$ , при которых выталкивающая сила максимальна.

Из табл. 2 следует, что при увеличении радиуса бассейна динамическая нагрузка на опору со стороны пластины также увеличивается. Для квазисобственной частоты  $\omega = 0,0240 - 0,0497i$  рад/с радиальной моды колебаний при  $k = k_1$ ,  $n = 0$  значение вертикальной выталкивающей силы  $F = 4,5 \cdot 10^4$  Н.

**Заключение.** Получены зависимости собственных и квазисобственных колебаний ледяной пластины от геометрических параметров области колебаний, найдены собственные и квазисобственные частоты изгибно-гравитационных колебаний упругой пластины для заданных геометрических параметров. Установлено, что при первой моде колебаний упру-

Таблица 2

Зависимость выталкивающей силы  $F$  от радиуса бассейна для радиальной моды колебаний при  $k = k_1$ ,  $n = 0$

$R_2$ , м	$F$ , Н	$R_2$ , м	$F$ , Н
1000	$1,4 \cdot 10^3$	16 000	$1,0 \cdot 10^6$
2000	$8,0 \cdot 10^3$	32 000	$2,0 \cdot 10^6$
4000	$2,5 \cdot 10^4$	64 000	$3,5 \cdot 10^6$
8000	$2,5 \cdot 10^5$	128 000	$6,0 \cdot 10^6$

гой пластины образуются перерезывающие силы и моменты, действующие на опору со стороны упругой пластины, тем самым задавая периодическую силу, выталкивающую опору. При увеличении радиуса бассейна при собственных колебаниях пластины имеется тенденция увеличения нагрузки на опору со стороны выталкивающих сил. При увеличении радиуса бассейна значения собственных частот колебаний пластины уменьшаются и стремятся к значениям собственных частот колебаний свободной поверхности воды в ограниченном бассейне.

Автор выражает благодарность С. В. Сухину за корректную постановку задачи и постоянную помощь в работе, а также И. В. Стуровой за помощь в работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. М.: Либрокон, 2009.
2. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
3. Владимиров В. С. Уравнения математической физики: Учеб. М.: Наука, 1988.
4. Zilman G., Miloh T. Hydroelastic buoyant circular plate in shallow water: a closed form solution // Appl. Ocean Res. 2000. V. 22. P. 191–198.
5. Montiel F. Numerical and experimental analysis of water wave scattering by floating elastic plates: Ph.D. thesis. Otago: Univ. of Otago, 2012.

*Поступила в редакцию 10/XII 2014 г.*