УДК 533.72

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПЕРЕНОСЕ ТЕПЛА В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ МЕЖДУ ДВУМЯ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

О. В. Гермидер, В. Н. Попов, А. А. Юшканов*

Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова,
163002 Архангельск, Россия
* Московский государственный областной университет, 107005 Москва, Россия
E-mails: o.germider@narfu.ru, v.popov@narfu.ru, yushkanov@inbox.ru

С использованием метода характеристик в рамках кинетического подхода построено аналитическое решение задачи о переносе тепла в канале, стенки которого образованы двумя коаксиальными цилиндрами. В качестве основного уравнения использовано кинетическое уравнение Вильямса, в качестве граничного условия на стенках канала — модель диффузного отражения. Определено векторное поле потока тепла в канале, вычислен удельный поток тепла через поперечное сечение канала. Показано, что результаты, полученные для предельного случая, когда радиусы цилиндров существенно больше средней длины свободного пробега молекул газа, хорошо согласуются с результатами, полученными для плоского канала с бесконечными параллельными стенками.

Ключевые слова: уравнение Больцмана, течение газа в канале, метод характеристик.

DOI: 10.15372/PMTF20170212

Теоретическое решение задач в области динамики разреженного газа, где неприменимы уравнения Навье — Стокса или уравнения свободномолекулярного течения, должно быть получено в результате интегрирования уравнения Больцмана (или системы уравнений Больцмана, если газ состоит из молекул различных веществ) при соответствующих начальных и граничных условиях. Найдя функцию распределения, с помощью квадратур можно определить макроскопические параметры газа, такие как скорость, температура, давление, тепловой поток и т. д. [1]. Кинетическое уравнение Больцмана представляет собой сложное нелинейное интегродифференциальное уравнение, аналитические методы решения которого, применимые для разреженного газа, отсутствуют. Одним из возможных способов построения решений этого уравнения является упрощение его правой интегральной части путем введения предположений о характере молекулярного взаимодействия. Однако и в этом случае решение большинства практически важных задач может быть получено лишь с использованием численных методов, что в свою очередь требует больших вычислительных затрат. Решение задачи существенно упрощается, если состояние газа незначительно отличается от равновесного. В этом случае функцию распределения можно линеаризовать относительно абсолютного или локально-равновесного максвеллиана

Работа выполнена в рамках Государственного задания “Создание вычислительной инфраструктуры для решения наукоемких прикладных задач” (проект № 3628).

и для задач с простейшей геометрией получить аналитические решения [2]. К числу таких задач относятся задачи о течении газа в каналах. Ранее внимание исследователей было направлено главным образом на решение задач о течении газа в каналах, стенки которых образованы двумя бесконечными параллельными пластинами. Обзор соответствующих работ приведен в [1–5]. Однако в последнее время появилось большое количество работ, посвященных исследованию течений газа в каналах с произвольным поперечным сечением. Например, в работах [6, 7] рассматривалось течение разреженного газа в каналах с прямоугольным и треугольным сечениями соответственно, в [8–10] — в канале с цилиндрическим сечением, в [11] — в канале между двумя коаксиальными цилиндрами, в [12] — в канале с эллиптическим сечением.

Целью данной работы является построение с использованием аналитических методов решения задачи о переносе тепла в канале, образованном двумя коаксиальными цилиндрами. В качестве основного уравнения используется модель Бхатнагара — Гросса — Крука кинетического уравнения Больцмана с частотой, пропорциональной скорости сталкивающихся молекул (кинетическое уравнение Вильямса), а в качестве граничного условия на стенках канала — модель диффузного отражения [2].

1. Постановка задачи. Построение функции распределения молекул газа. Рассмотрим задачу о переносе тепла в канале, стенки которого образованы двумя коаксиальными цилиндрами радиусами R_1' и R_2' ($R_2' > R_1'$). Предположим, что в канале поддерживается постоянный градиент температуры dT/dz' (ось Oz' направлена вдоль оси цилиндров) и изменение давления на длине свободного пробега молекул газа является малым. В этом случае решение задачи можно получить в линеаризованном виде [13], представив функцию распределения в виде

$$f(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{v}) = f_0(C)(1 + h(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C})). \tag{1}$$

Здесь $f_0(C) = n_0(\beta/\pi)^{3/2}\,\mathrm{e}^{-C^2}$ — абсолютный максвеллиан; $C = \beta^{1/2}\boldsymbol{v}$ — безразмерная скорость молекул газа; $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'/(\gamma l_g)$ — безразмерный радиус-вектор; $l_g = \eta_g \beta^{-1/2}/p$ — средняя длина свободного пробега молекул газа; p, η_g — давление и динамическая вязкость газа; $\beta = m/(2k_{\mathrm{B}}T_0)$; m — масса молекулы газа; k_{B} — постоянная Больцмана; T_0 — температура газа в некоторой точке, принятой в качестве начала координат; $\gamma = 15\sqrt{\pi}/16$. Для того чтобы найти функцию $h(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C})$, используем линеаризованное уравнение Вильямса [13, 14], записанное в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) для функций $C_\perp$, ψ, C_z:

$$C_\perp \cos\psi\,\frac{\partial h}{\partial \rho} - \frac{C_\perp \sin\psi}{\rho}\,\frac{\partial h}{\partial \psi} + C_z\,\frac{\partial h}{\partial z} + Ch(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C}) = \\ = \frac{C}{2\pi}\int C'\,\mathrm{e}^{-C'^2}\,k(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}')h(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C}')\,d^3\boldsymbol{C}', \tag{2}$$

$$k(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}') = 1 + \frac{3}{2}\,\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}' + \frac{1}{2}\,(C^2 - 2)(C'^2 - 2).$$

Здесь $C_\perp$ — компонента вектора скорости, находящаяся в плоскости, перпендикулярной оси симметрии канала; ψ — угол в указанной плоскости, определяемый таким образом, что проекции $C_\perp$ на оси прямоугольной системы координат в пространстве скоростей определяются равенствами $C_\rho = C_\perp\cos\psi$, $C_\varphi = C_\perp \sin\psi$ [8, 15]. Решение уравнения (2) будем искать в виде разложения по инвариантам столкновений $h_0(\boldsymbol{C}) = 1$, $h_i(\boldsymbol{C}) = C_i$ ($i = 1 \div 3$), $h_4(\boldsymbol{C}) = C^2 - 3/2$. Учитывая, что направление оси Oz' совпадает с направлением градиента температуры, можно записать

$$h(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C}) = G_n z + AC_z + G_T z(C^2 - 3/2) + \varphi(C), \tag{3}$$

где G_n, G_T — безразмерные градиенты концентрации молекул газа и температуры. В линейном приближении $T(z) = T_0(1 + G_T z)$. Тогда в предположении постоянства давления из равенства $p_0 = n(z)k_\mathrm{B}T(z)$ в линейном приближении находим $n(z) = n_0(1 - G_T z)$, т. е. $G_n = -G_T$. С учетом этих предположений выражение (3) записывается в виде

$$h(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C}) = AC_z + G_T z(C^2 - 5/2) + \varphi(C). \tag{4}$$

Подставляя (4) в (2), получаем уравнение относительно $\varphi(C)$:

$$G_T C_z\Big(C^2 - \frac{5}{2}\Big) + C\varphi(C) = \frac{C}{2\pi}\int C' \,\mathrm{e}^{-C'^2}\, k(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}')\varphi(C')\, d^3\boldsymbol{C}'. \tag{5}$$

Решение уравнения (5) имеет вид

$$\varphi(C) = -G_T\,\frac{C_z}{C}\Big(C^2 - \frac{5}{2}\Big).$$

Таким образом,

$$h(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C}) = AC_z + G_T\Big(z - \frac{C_z}{C}\Big)\Big(C^2 - \frac{5}{2}\Big). \tag{6}$$

Поскольку вектор массовой скорости газа в рассматриваемой задаче имеет только одну ненулевую компоненту $\boldsymbol{U} = (0, 0, U_0)$, из выражения для функции распределения находим

$$U_0 = \pi^{-3/2}\int C_z\,\mathrm{e}^{-C^2}\, h(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C})\, d^3\boldsymbol{C} = \frac{G_T}{3\sqrt{\pi}} + \frac{A}{2}.$$

Следовательно, $A = 2U_0 - 2G_T/(3\sqrt{\pi}\,)$. Подставляя найденное значение в (6), получаем

$$h(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C}) = 2C_z U_0 + G_T\Big[\Big(z - \frac{C_z}{C}\Big)\Big(C^2 - \frac{5}{2}\Big) - \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\,C_z\Big]. \tag{7}$$

В данной работе в качестве граничного условия на стенках канала использована модель диффузного отражения, которая в линейном приближении записывается в виде

$$f(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{v})\big|_s = f_0(C)[1 + G_T z(C^2 - 5/2)], \qquad \boldsymbol{n}_1\boldsymbol{C} > 0, \qquad \boldsymbol{n}_2\boldsymbol{C} > 0 \tag{8}$$

($\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ — векторы нормалей к боковым поверхностям цилиндров, направленные в сторону газа).

Функция $h(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C})$, определяемая выражением (7), является решением уравнения (2), однако она не удовлетворяет граничному условию (8). Для того чтобы это условие выполнялось, введем на множестве функций, зависящих от модуля скорости молекул, скалярное произведение

$$(f, g) = \int\limits_0^{+\infty} C^5\,\mathrm{e}^{-C^2}\, f(C)g(C)\, dC.$$

Выберем две ортогональные функции: $e_1(C) = 1$ и $e_2(C) = C - 5/(2C)$ (в данном случае ортогональность понимается как равенство нулю введенного выше скалярного произведения) и будем искать решение уравнения (1) в виде

$$f(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{v}) = f_0(C)[1 + h(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C}) + Z_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C})], \tag{9}$$

где

$$Z_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C}) = C_z[Z_1(\rho, c_\perp, \psi) + G_T(C - 5/(2C))Z_2(\rho, c_\perp, \psi)], \tag{10}$$

$c_\perp = C_\perp/C$.

Подставляя (10) в (2), получаем уравнение

$$c_\perp \cos\psi \,\frac{\partial Z_1}{\partial \rho} - \frac{c_\perp \sin\psi}{\rho}\,\frac{\partial Z_1}{\partial \psi} + Z_1(\rho, c_\perp, \psi) + \\ + \Big(c_\perp \cos\psi \,\frac{\partial Z_2}{\partial \rho} - \frac{c_\perp \sin\psi}{\rho}\,\frac{\partial Z_2}{\partial \psi} + Z_2(\rho, c_\perp, \psi)\Big) G_T\Big(C - \frac{5}{2C}\Big) = \\ = \frac{3}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} Z_1(\rho, c'_\perp, \psi')\cos^2\theta' \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi', \qquad (11)$$

где θ — угол между вектором скорости молекулы газа $\boldsymbol{C}$ и осью симметрии канала. В этом случае $c_\perp = \sin\theta$. Проецируя левые и правые части уравнения (11) на базисные функции $e_1(C)$ и $e_2(C)$, получаем систему двух независимых уравнений

$$c_\perp \cos\psi \,\frac{\partial Z_1}{\partial \rho} - \frac{c_\perp \sin\psi}{\rho}\,\frac{\partial Z_1}{\partial \psi} + Z_1(\rho, c_\perp, \psi) = \frac{3}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} Z_1(\rho, c'_\perp, \psi')\cos^2\theta' \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi';$$

$$c_\perp \cos\psi \,\frac{\partial Z_2}{\partial \rho} - \frac{c_\perp \sin\psi}{\rho}\,\frac{\partial Z_2}{\partial \psi} + Z_2(\rho, c_\perp, \psi) = 0. \qquad (12)$$

С учетом (8) граничные условия для функций $Z_1(\rho, c_\perp, \psi)$ и $Z_2(\rho, c_\perp, \psi)$ на стенках канала записываются в виде

$$Z_1(R_1, c_\perp, \psi) = -2U_0 + 2G_T/(3\sqrt{\pi}\,), \qquad Z_2(R_1, c_\perp, \psi) = 1, \qquad \cos\psi < 0; \qquad (13)$$

$$Z_1(R_1, c_\perp, \psi) = -2U_0 + 2G_T/(3\sqrt{\pi}\,), \qquad Z_2(R_2, c_\perp, \psi) = 1, \qquad \cos\psi > 0. \qquad (14)$$

Согласно [2] отличная от нуля компонента вектора потока тепла определяется выражением

$$q'_z(\rho') = \frac{m}{2}\int (v_z - u_z(\rho))|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(\rho)|^2 f(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{v})\, d^3\boldsymbol{v} = \frac{p_0}{\beta^{1/2}}\, q_z(\rho),$$

где $q_z(\rho)$ — безразмерная компонента вектора потока тепла:

$$q_z(\rho) = \frac{1}{\pi^{3/2}}\int \mathrm{e}^{-C^2}\, C_z\Big(C^2 - \frac{5}{2}\Big)(h(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C}) + C_z Z_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C}))\, d^3\boldsymbol{C} = \\ = \frac{G_T}{\pi^{3/2}}\int \mathrm{e}^{-C^2}\, C_z^2\Big(C^2 - \frac{5}{2}\Big)\Big(C - \frac{5}{2C}\Big)(Z_2(\rho, c_\perp, \psi) - 1)\, d^3\boldsymbol{C}. \qquad (15)$$

Таким образом, функция $Z_1(\rho, c_\perp, \psi)$ не вносит вклада в поток тепла. Следовательно, решение задачи сводится к отысканию функции $Z_2(\rho, c_\perp, \psi)$, определяемой уравнением (12) с граничными условиями (13), (14). Решение (12) будем искать в виде

$$Z_2(\rho, c_\perp, \psi) = Z(\rho, c_\perp, \psi) + 1. \qquad (16)$$

Тогда с учетом (15), (16) для нахождения функции $Z(\rho, c_\perp, \psi)$ имеем краевую задачу

$$c_\perp \cos\psi \,\frac{\partial Z}{\partial \rho} - \frac{c_\perp \sin\psi}{\rho}\,\frac{\partial Z}{\partial \psi} + Z(\rho, c_\perp, \psi) + 1 = 0; \qquad (17)$$

$$Z(R_1, c_\perp, \psi) = 0, \qquad \cos\psi < 0; \qquad (18)$$

$$Z(R_2, c_\perp, \psi) = 0, \qquad \cos\psi > 0. \qquad (19)$$

Уравнение (17) с граничными условиями (18), (19) будем решать методом характеристик. Система уравнений характеристик для уравнения (17) имеет вид

$$\frac{d\rho}{c_\perp \cos\psi} = -\frac{\rho\, d\psi}{c_\perp \sin\psi} = -\frac{dZ}{Z(\rho, c_\perp, \psi) + 1}.$$

Решая с учетом граничных условий (18), (19) систему уравнений для характеристик, находим

$$Z(\rho, c_\perp, \psi) = \exp\Big(-\frac{\rho\cos\psi - \sqrt{R_1^2 - \rho^2\sin^2\psi}}{\sin\theta}\Big) - 1, \qquad -\alpha \leqslant \psi \leqslant \alpha; \tag{20}$$

$$Z(\rho, c_\perp, \psi) = \exp\Big(-\frac{\rho\cos\psi + \sqrt{R_2^2 - \rho^2\sin^2\psi}}{\sin\theta}\Big) - 1, \qquad \alpha \leqslant \psi \leqslant 2\pi - \alpha; \tag{21}$$

$$\alpha = \arccos\frac{\sqrt{\rho^2 - R_1^2}}{\rho}. \tag{22}$$

Соотношения (20)–(22) полностью определяют составляющую функции распределения, вносящую вклад в вектор потока тепла.

2. Вычисление потока тепла. С учетом полученных результатов находим отличную от нуля компоненту вектора потока тепла $q_z(\rho)$ и поток тепла через поперечное сечение канала J_Q. Подставляя (16), (20), (21) в (15), после ряда преобразований получаем

$$q_z(\rho) = \frac{9G_T}{4\pi^{3/2}}\Big(\int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta\, d\theta\Big\{\int_0^\alpha\Big[\exp\Big(-\frac{\rho\cos\psi - \sqrt{R_1^2 - \rho^2\sin^2\psi}}{\sin\theta}\Big) - 1\Big]\, d\psi +$$

$$+\int_\alpha^\pi\Big[\exp\Big(-\frac{\rho\cos\psi + \sqrt{R_2^2 - \rho^2\sin^2\psi}}{\sin\theta}\Big) - 1\Big]\, d\psi\Big\}\Big);$$

$$J_Q = \frac{4}{(R_2^2 - R_1^2)(R_2 - R_1)}\int_{R_1}^{R_2} q_z(\rho)\rho\, d\rho. \tag{23}$$

3. Анализ полученных результатов. Значения J_Q/G_T, вычисленные с погрешностью 10^{-4} по формуле (23) квадратурным методом Кленшоу — Куртиса при различных значениях R'_1/l_g и R'_2/l_g, приведены в табл. 1 ($\bar{R} = (R'_2 - R'_1)/l_g$). Значения J_Q/G_T, вычисленные с использованием уравнения Шахова (УШ), уравнения с комбинированным ядром (УКЯ), модели Бхатнагара — Гросса — Крука (МБГК) кинетического уравнения Больцмана и уравнения Вильямса (УВ) для канала, стенки которого образованы двумя параллельными плоскостями, расположенными на расстоянии друг от друга $D = D'/(\gamma l_g)$, приведены в табл. 2. Из табл. 1, 2 следует, что при значениях $R'_1 \approx R'_2 \gg l_g$ полученные в данной работе результаты согласуются с соответствующими результатами, полученными для плоских каналов.

Заключение. В работе найдено аналитическое решение задачи о переносе тепла между двумя коаксиальными цилиндрами при наличии градиента температуры, направленного вдоль оси цилиндров. Для произвольных значений радиусов цилиндров определено векторное поле потока тепла и вычислен поток тепла через поперечное сечение канала.

Таблица 1

Значения J_Q/G_T, вычисленные по формуле (23)

R'_1/l_g	J_Q/G_T					
	$\bar R = 0{,}1$	$\bar R = 0{,}3$	$\bar R = 0{,}5$	$\bar R = 1{,}0$	$\bar R = 10{,}0$	$\bar R = 50{,}0$
0,1	3,2288	2,4671	2,0820	1,5336	0,2637	0,055 54
0,5	3,6138	2,6209	2,1590	1,5531	0,2637	0,055 54
1,0	3,7728	2,6956	2,2007	1,5654	0,2637	0,055 55
5,0	4,0315	2,8123	2,2667	1,5864	0,2637	0,055 54
10,0	4,0906	2,8337	2,2777	1,5896	0,2637	0,055 54
100,0	4,1508	2,8492	2,2846	1,5913	0,2637	0,055 54

Таблица 2

Значения J_Q/G_T, вычисленные с использованием различных моделей

D	J_Q/G_T			
	УШ [4]	УКЯ [4]	МБГК [5]	УВ [16]
0,1	4,0546	3,850 90	3,8532	4,1534
1,0	1,7537	1,801 80	1,4188	1,5914
10,0	3,4063	0,349 64	0,2334	0,2637

Проведен численный анализ полученных выражений. Показано, что в случае, когда радиусы цилиндров существенно больше длины свободного пробега молекул газа, представленные в работе результаты согласуются с результатами, полученными для каналов, стенки которых образованы двумя бесконечными плоскостями.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кошмаров Ю. А.** Прикладная динамика разреженного газа / Ю. А. Кошмаров, Ю. А. Рыжов. М.: Машиностроение, 1977.
2. **Коган М. Н.** Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. М.: Наука, 1967.
3. **Шарипов Ф. М.** Движение разреженных газов в каналах и микроканалах / Ф. М. Шарипов, В. Д. Селезнев. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2008.
4. **Siewert C. E.** Poiseuille thermal creep and Couette flow: results based on the CES model linearized Boltzmann equation // Eur. J. Mech. B. Fluids. 2002. V. 21. P. 579–597.
5. **Попов В.** Математическое моделирование течений газа в каналах / В. Попов, И. Тестова, А. Юшканов. Saarbrucken: LAP LAMBERT Acad. Publ., 2012.
6. **Титарев В. А., Шахов Е. М.** Кинетический анализ изотермического течения в длинном микроканале прямоугольного поперечного сечения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 7. С. 1285–1302.
7. **Naris S., Valougeorgis D.** Rarefied gas flow in a triangular duct based on a boundary fitted lattice // Eur. J. Mech. B. Fluids. 2008. V. 27. P. 810–822.
8. **Siewert C. E., Valougeorgis D.** An analytical discrete-ordinates solution of the S-model kinetic equations for flow in a cylindrical tube // J. Quant. Spectroscopy Radiat. Transfer. 2002. V. 72. P. 531–550.
9. **Taheri P., Bahrami M.** Macroscopic description of nonequilibrium effects in thermal transpiration flows in annular microchannels // Phys. Rev. 2012. V. 86. P. 1–9.
10. **Kamphorst C. H., Rodrigues P., Barichello L. B.** A closed-form solution of a kinetic integral equation for rarefied gas flow in a cylindrical duct // Appl. Math. 2014. V. 5. P. 1516–1527.

11. **Титарев В. А., Шахов Е. М.** Численный анализ винтового течения Куэтта разреженного газа между коаксиальными цилиндрами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 3. С. 527–535.
12. **Graur I., Sharipov F.** Gas flow through an elliptical tube over the whole range of the gas rarefaction // Eur. J. Mech. B. Fluids. 2008. V. 27. P. 335–345.
13. **Cercignani C.** The method of elementary solutions for kinetic models with velocity-dependent collision frequency // Ann. Physics. 1966. V. 4. P. 469–481.
14. **Гермидер О. В., Попов В. Н., Юшканов А. А.** Вычисление в рамках кинетического подхода потока тепла в длинном канале постоянного прямоугольного поперечного сечения // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физика, математика. 2015. № 2. С. 96–106.
15. **Шахов Е. М.** Течение разреженного газа между коаксиальными цилиндрами под действием градиента давления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 7. С. 1107–1116.
16. **Гулакова С. В., Попов В. Н.** Вычисление потока тепла в задаче о тепловом крипе на основе уравнения Вильямса // Физ. вестн. Ин-та естеств. наук и биомедицины: Сб. науч. тр. Архангельск: Север. (Арктич.) федер. ун-т, 2013. Вып. 12. С. 25–29.

Поступила в редакцию 26/VI 2015 г.,
в окончательном варианте — 31/III 2016 г.