УДК 539.3

НАПРЯЖЕНИЯ В УПРУГОМ ТЕЛЕ В УСЛОВИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

В. Д. Бондарь

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

В нелинейной постановке в актуальных переменных исследовано поле напряжений в цилиндрическом упругом теле при антиплоской деформации при ряде ограничений на объемные и поверхностные силы. В декартовых и комплексных переменных получена краевая задача для независимых компонент напряжений и указаны достаточные условия ее эллиптичности; установлены ограничения на поверхностную нагрузку. Даны аналитические решения для линейного и слабонелинейного упругих потенциалов. Установлена аналогия с плоским дозвуковым течением идеального газа. Развит приближенный метод решения задачи.

В рамках нелинейной теории упругости в актуальных переменных рассмотрим напряженное состояние цилиндрического упругого тела с заданным упругим потенциалом, возникающее при антиплоской деформации вдоль тела при отсутствии объемных сил и постоянстве поверхностной нагрузки вдоль образующей цилиндра. Напряжения можно определять из уравнений равновесия и совместности напряжений в объеме тела и силовых условий на его поверхности.

В актуальной декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 с осью x_3, параллельной образующей цилиндра (x_3 — продольная координата), и осями $x_1 = x$, $x_2 = y$ в плоскости его среднего поперечного сечения S с границей L (x, y — поперечные координаты) антиплоская деформация описывается перемещениями $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = w(x, y)$. Мерой деформации в этих переменных служит тензор Альманси, компоненты E_{kl} и инварианты E_k которого, определяемые формулами [1]

$$2E_{kl} = \partial_k u_l + \partial_l u_k - \partial_k u_m \partial_l u_m,$$
$$E_1 = E_{mm}, \qquad 2E_2 = E_{mm}E_{nn} - E_{mn}E_{nm}, \qquad E_3 = \det(E_{kl})$$

(здесь и далее индекс пробегает значения 1, 2, 3, по повторяющемуся индексу проводится суммирование), при антиплоской деформации выражаются через осевое смещение:

$$2E_{11} = -\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2, \qquad 2E_{22} = -\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2, \qquad 2E_{33} = 0,$$
$$2E_{12} = -\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}, \qquad 2E_{31} = \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad 2E_{32} = \frac{\partial w}{\partial y}; \tag{1}$$

$$2E_1 = -|\nabla w|^2, \qquad 4E_2 = -|\nabla w|^2, \qquad E_3 = 0 \tag{2}$$

и, следовательно, являются функциями поперечных координат.

В общем случае уравнения совместности деформаций можно получить исключением перемещений из формул, представляющих деформации через эти величины [2]. Исключая перемещения из соотношений (1), получим уравнения совместности антиплоской деформации

$$2E_{11} = -(2E_{31})^2, \qquad 2E_{22} = -(2E_{32})^2, \qquad 2E_{33} = 0, \tag{3}$$

$$2E_{12} = -2E_{31}2E_{32}, \qquad \frac{\partial 2E_{32}}{\partial x} - \frac{\partial 2E_{31}}{\partial y} = 0.$$

Система (3) состоит из конечных и дифференциального уравнений. Первые четыре уравнения выражают компоненты деформации через две из них E_{31}, E_{32} нелинейными формулами, а последнее связывает независимые компоненты линейным дифференциальным уравнением. Инварианты деформации (2) неположительны, представимы через инвариант E_1: $2E_2 = E_1$, $E_3 = 0$ и удовлетворяют условию несжимаемости [1] $2E_1 - 4E_2 + 8E_3 = 0$. Следовательно, при антиплоской деформации материал ведет себя как несжимаемый.

Механическое поведение несжимаемого упругого тела в актуальных переменных определяется модифицированным законом Мурнагана [1, 3], связывающим напряжения Коши P_{kl} с деформациями Альманси:

$$P_{kl} = -q^*\delta_{kl} + (\delta_{km} - 2E_{km})\frac{\partial U}{\partial E_{lm}},$$

где q^* — лагранжев множитель; δ_{kl} — дельта Кронекера; U — упругий потенциал. Для однородного изотропного тела упругий потенциал является функцией базисных инвариантов деформации. В рассматриваемом случае в силу свойств инвариантов он зависит только от первого из них: $U = U(E_1)$. С учетом этого свойства потенциала и соотношений

$$E_1 = E_{lm}\delta_{ml}, \qquad \frac{\partial E_1}{\partial E_{lm}} = \delta_{ml}, \qquad \frac{\partial U(E_1)}{\partial E_{lm}} = U'(E_1)\delta_{ml}$$

закон Мурнагана при антиплоской деформации представим квазилинейной зависимостью напряжений от деформаций

$$P_{kl} = -q\delta_{kl} - 2U'(E_1)E_{kl}, \tag{4}$$

где $q = q^* - U'$ — гидростатическое давление.

Обратив зависимости (4), получим выражения для деформаций

$$2E_{kl} = -(P_{kl} + q\delta_{kl})/U'. \tag{5}$$

Содержащаяся в (5) производная упругого потенциала может быть представлена через напряжения. Действительно, исключение инварианта E_1 из соотношений

$$2E_1 = 2E_{mm} = -(2E_{31})^2 - (2E_{32})^2 = -(P_{31}^2 + P_{32}^2)/U'^2, \qquad U' = T(2E_1) \tag{6}$$

(следующих из формул (3) и (5)) дает искомую зависимость в неявном виде

$$U' = T(-R^2/U'^2), \qquad R^2 = P_{31}^2 + P_{32}^2. \tag{7}$$

В частности, для квадратичного потенциала Ривлина — Сондерса (в линейном случае совпадающего с потенциалом Муни)

$$U(E_1) = aE_1^2 - 2bE_1 \qquad (a > 0, \quad b > 0, \quad E_1 < 0), \tag{8}$$

описывающего с приемлемой точностью большие упругие деформации резиноподобных материалов [4, 5], зависимость $U'(R^2)$ дается решением кубического уравнения

$$U'^3 + 2bU'^2 + aR^2 = 0. \tag{9}$$

Подстановкой $U' = V - 2b/3$ это уравнение сводится к неполному уравнению с коэффициентами, удовлетворяющими неравенству

$$\begin{gathered} V^3 - (4b^2/3)V + m = 0, \\ m = aR^2 + 16b^3/27, \qquad Q = (-4b^2/9)^3 + (m/2)^2 = (8ab^3/27)R^2 + (a^2/4)R^4 > 0, \end{gathered} \tag{10}$$

которое имеет одно вещественное решение [6]

$$V = I_+(R^2) + I_-(R^2), \qquad I_\pm = \sqrt[3]{-m/2 \pm \sqrt{Q}}.$$

Следовательно, решение уравнения (9) имеет вид

$$U'(R^2) = I_+(R^2) + I_-(R^2) - 2b/3. \tag{11}$$

Величины m, Q, R^2 определены формулами (7) и (10). Таким образом, обращенным законом Мурнагана (5) деформации определяются через напряжения и давление.

Подстановка деформаций (5) в равенства (3) приводит к уравнениям совместности напряжений

$$\begin{gathered} P_{11} = -q + P_{31}^2/U', \quad P_{22} = -q + P_{32}^2/U', \quad P_{33} = -q, \quad P_{12} = P_{31}P_{32}/U', \\ \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{P_{32}}{U'} - \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{P_{31}}{U'} = 0, \end{gathered} \tag{12}$$

где U' определено в (11). Первые четыре из этих уравнений дают представления напряжений через давление и напряжения P_{31}, P_{32}, а последнее является нелинейным дифференциальным уравнением для независимых напряжений.

Примем, что на известной поверхности (с внешней нормалью n_m) цилиндра задана нагрузка p_k. Представим ее через напряжения формулой $p_k = P_{km}n_m$. На боковой поверхности S_* цилиндра компоненты нормали равны $(n_m) = (n_1(x,y), n_2(x,y), 0)$, поэтому боковая нагрузка с учетом (12) представляется в виде

$$p_1 = -qn_1 + (P_{31}/U')P_{3m}n_m, \quad p_2 = -qn_2 + (P_{32}/U')P_{3m}n_m, \quad p_3 = P_{3m}n_m. \tag{13}$$

На торцах $S^\pm$ цилиндра (знак “плюс” соответствует верхнему торцу, “минус” — нижнему) компоненты нормали постоянны: $(n_m^\pm) = (0, 0, \pm 1)$, и нагрузка равна

$$p_1^\pm = \pm P_{31}, \qquad p_2^\pm = \pm P_{32}, \qquad p_3^\pm = \pm P_{33} = \mp q. \tag{14}$$

Из формул (13), (14) следует, что предположение о независимости поверхностной нагрузки от координаты x_3 означает, что на поверхности цилиндра от x_3 не зависит и давление. В дальнейшем принимается, что давление не зависит от x_3 во всем объеме цилиндра: $q = q(x,y)$. Следовательно, в цилиндре напряжения (4) являются функциями поперечных координат: $P_{kl} = P_{kl}(x,y)$.

При отсутствии объемных сил уравнения равновесия $\partial P_{km}/\partial x_m = 0$ с учетом представлений напряжений (12) и выражений $q = q(x,y)$, $P_{kl} = P_{kl}(x,y)$ имеют вид

$$\begin{gathered} -\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{P_{31}}{U'}\Big(\frac{\partial P_{31}}{\partial x} + \frac{\partial P_{32}}{\partial y}\Big) + U'\Big(\frac{P_{31}}{U'}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{P_{31}}{U'} + \frac{P_{32}}{U'}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{P_{31}}{U'}\Big) = 0, \\ -\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{P_{32}}{U'}\Big(\frac{\partial P_{31}}{\partial x} + \frac{\partial P_{32}}{\partial y}\Big) + U'\Big(\frac{P_{32}}{U'}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{P_{32}}{U'} + \frac{P_{31}}{U'}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{P_{32}}{U'}\Big) = 0; \end{gathered} \tag{15}$$

$$\frac{\partial P_{31}}{\partial x} + \frac{\partial P_{32}}{\partial y} = 0. \tag{16}$$

Уравнения (15) определяют давление, уравнение (16) (вместе с последним уравнением в (12)) — независимые напряжения. Действительно, уравнения (15) с учетом равенств (12), (16) и обозначения для суммы квадратов независимых напряжений (7) преобразуются к виду

$$-\frac{\partial q}{\partial x} + U'\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{R^2}{2U'^2} = 0, \qquad -\frac{\partial q}{\partial y} + U'\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{R^2}{2U'^2} = 0.$$

С учетом первого соотношения в (6) и равенств

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{R^2}{2U'^2} = -\frac{\partial E_1}{\partial x_k}, \qquad U'\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{R^2}{2U'^2} = -U'\frac{\partial E_1}{\partial x_k} = -\frac{\partial U}{\partial x_k} \qquad (k = 1,\ 2)$$

запишем эти уравнения в виде $\partial(q+U)/\partial x = 0$, $\partial(q+U)/\partial y = 0$. В результате интегрирования они определяют гидростатическое давление через упругий потенциал:

$$q = h - U, \tag{17}$$

где h — постоянная интегрирования.

Осевые составляющие $F_3^{\pm}$ результирующих торцевых нагрузок (14) линейно зависят от h:

$$F_3^{\pm} = \int\limits_S p_3^{\pm}\, dS = \mp\int\limits_S q\, dS = \mp\Big(hS - \int\limits_S U\, dS\Big),$$

поэтому эта величина может быть выражена через осевую нагрузку. В частности, при отсутствии осевой нагрузки постоянная h равна среднему значению потенциала в сечении цилиндра:

$$h = \frac{1}{S}\Big(\int\limits_S U\, dS \mp F_3^{\pm}\Big) \qquad \text{при} \quad F_3^{\pm} = 0, \quad h = \frac{1}{S}\int\limits_S U\, dS. \tag{18}$$

В последнем случае гидростатическое давление согласно (17) и (18) совпадает с отклонением упругого потенциала от его среднего значения.

На границе L сечения цилиндра напряжения P_{31}, P_{32} выражаются через нагрузку нелинейными уравнениями (13). Введем в рассмотрение линейные комбинации g_n, g_t напряжений (коэффициентами в которых служат компоненты нормали n_1, n_2 и касательной $t_1 = -n_2$, $t_2 = n_1$), взаимно однозначно связанные с напряжениями P_{31}, P_{32}:

$$\begin{gathered} g_n = P_{31}n_1 + P_{32}n_2, \qquad g_t = P_{31}t_1 + P_{32}t_2 = -P_{31}n_2 + P_{32}n_1, \\ P_{31} = g_n n_1 - g_t n_2, \qquad P_{32} = g_n n_2 + g_t n_1, \qquad R^2 = P_{31}^2 + P_{32}^2 = g_t^2 + g_n^2 \quad \text{на } L. \end{gathered} \tag{19}$$

Определим из (13) g_n, g_t, а затем по ним и сами напряжения. При этом будут установлены ограничения на нагрузку.

С учетом формул (13), (17), (19) и значений $(t_m) = (-n_2, n_1, 0)$, $(n'_m) = (-n_1, -n_2, 0)$, $(b_m) = (0, 0, 1)$ компонент ортов естественных осей контура естественные компоненты p_t, $p_{n'}$, p_b (касательная, нормальная и бинормальная) вектора контурной нагрузки равны

$$p_t = p_m t_m = g_n g_t/U', \quad -p_{n'} = p_n = p_m n_m = U - h + g_n^2/U', \quad p_b = p_m b_m = g_n. \tag{20}$$

В (20) последнее равенство определяет величину g_n:

$$g_n = p_b, \tag{21}$$

а первые два — величину g_t. Действительно, подставляя в рассматриваемое на границе уравнение (9) величину $R^2 = g_n^2 + g_t^2$, а во второе уравнение в (20) — упругий потенциал (8), представленный через его производную: $U = (U'^2 - 4b^2)/(4a)$, получим уравнения для U': $U'^3 + 2bU'^2 + a(g_n^2 + g_t^2) = 0$, $U'^3 - 4BU' + 4ag_n^2 = 0$ $(B = b^2 + a(h + p_n))$. Подстановка в них выражений $g_n = p_b$, $U' = p_b g_t/p_t$ из первого и третьего равенств в (20) дает кубические уравнения для g_t: $p_b^3 g_t^3 + Ap_t g_t^2 + ap_b^2 p_t^3 = 0$, $p_b^2 g_t^3 - 4Bp_t^2 g_t + 4ap_t^3 p_b = 0$ $(A = 2bp_b^2 + ap_t^2)$. Первое из них имеет одно вещественное решение при произвольных параметрах [6]

$$g_t = \frac{p_t}{p_b}\Big(\sqrt[3]{-\frac{d}{2} + \sqrt{M}} + \sqrt[3]{-\frac{d}{2} - \sqrt{M}} - \frac{A}{3p_b^2}\Big), \quad d = ap_b^2 + \frac{2A^3}{27p_b^6}, \quad M = \frac{a^2p_b^4}{4} + \frac{aA^3}{27p_b^4}, \tag{22}$$

второе — одно вещественное решение при параметрах, удовлетворяющих неравенству

$$g_t = \frac{p_t}{p_b}\Big(\sqrt[3]{-2ap_b^2 + 2\sqrt{N}} + \sqrt[3]{-2ap_b^2 - 2\sqrt{N}}\Big), \quad N = a^2p_b^4 - \frac{16}{27}B^3 > 0. \tag{23}$$

Неравенство (23) и условие согласования выражений (22) и (23) для величины g_t

$$\sqrt[3]{-d/2 + \sqrt{M}} + \sqrt[3]{-d/2 - \sqrt{M}} - A/(3p_b^2) = \sqrt[3]{-2ap_b^2 + 2\sqrt{N}} + \sqrt[3]{-2ap_b^2 - 2\sqrt{N}}$$

устанавливают ограничения на поверхностную нагрузку, обеспечивающие реализацию антиплоской деформации цилиндра. Таким образом, граничные значения независимых напряжений даются формулами (19), в которых по заданной удовлетворяющей ограничениям нагрузке величины g_t, g_n определяются выражениями (21) и (22).

Дифференциальные уравнения (12), (16) (U' выражено через напряжения формулой (11)) и граничные условия (19)

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x}\frac{P_{32}}{U'} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{P_{31}}{U'} = 0, \quad \frac{\partial P_{31}}{\partial x} + \frac{\partial P_{32}}{\partial y} = 0, \\ P_{31} = g_n n_1 - g_t n_2, \quad P_{32} = g_n n_2 + g_t n_1 \qquad \text{на} \quad L \end{gathered} \tag{24}$$

определяют нелинейную краевую задачу для независимых декартовых напряжений. Представим уравнения в развернутом виде и установим условия эллиптичности этой системы.

Если продифференцировать по координатам производную $U'(E_1)$ и учесть выражение $E_1 = -R^2/(2U'^2)$ инварианта, то градиенты $\partial U'/\partial x$, $\partial U'/\partial y$ будут определяться в виде

$$\frac{\partial U'}{\partial x} = \frac{U'U''}{2(R^2U'' - U'^3)}\frac{\partial}{\partial x}(P_{31}^2 + P_{32}^2), \qquad \frac{\partial U'}{\partial y} = \frac{U'U''}{2(R^2U'' - U'^3)}\frac{\partial}{\partial y}(P_{31}^2 + P_{32}^2).$$

С учетом этих соотношений уравнения (24) запишутся в следующем виде:

$$\begin{gathered} H_1 = U'P_{31}P_{32}\Big(\frac{\partial P_{31}}{\partial x} - \frac{\partial P_{32}}{\partial y}\Big) + (U''P_{32}^2 - U'^3)\frac{\partial P_{31}}{\partial y} - (U''P_{31}^2 - U'^3)\frac{\partial P_{32}}{\partial x} = 0, \\ H_2 = \frac{\partial P_{31}}{\partial x} + \frac{\partial P_{32}}{\partial y} = 0. \end{gathered} \tag{25}$$

Рассмотрим характеристический определитель D этой системы [7]. Обозначая искомые величины через $w_1 = P_{31}$, $w_2 = P_{32}$, представим определитель в виде

$$D = \det(A_{kl}), \qquad A_{kl} = \frac{\partial H_k}{\partial(\partial w_l/\partial x_m)}\, v_m, \qquad A_{21} = v_1, \quad A_{22} = v_2,$$

$$A_{11} = U''w_1w_2v_1 + (U''w_2^2 - U'^3)v_2, \qquad A_{12} = (-U''w_1^2 + U'^3)v_1 - U''w_1w_2v_2.$$

Значение этого определителя равно

$$D = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} = -U'^3(v_1^2 + v_2^2) + U''(w_1v_1 + w_2v_2)^2.$$

Отсюда следует, что

$$D > 0 \quad \text{при} \quad U' < 0, \quad U'' \geqslant 0, \qquad D < 0 \quad \text{при} \quad U' > 0, \quad U'' \leqslant 0. \tag{26}$$

Если упругий потенциал удовлетворяет условиям (26) (первому или второму), то характеристическое уравнение $D = 0$ не имеет вещественных корней. Следовательно, нелинейная система (25) является эллиптической на любом решении. Таким образом, неравенства (26) являются достаточными условиями эллиптичности уравнений антиплоской деформации упругого материала.

Для квадратичного упругого потенциала Ривлина — Сондерса (8) производные имеют значения $U' = 2aE_1 - 2b < 0$, $U'' = 2a > 0$ $(a > 0,\ b > 0,\ E_1 < 0)$, следовательно, для него условия эллиптичности (26) выполнены.

Краевая задача (24) представима в комплексной форме. Перейдем от декартовых координат x_m к комплексным z^k:

$$z^1 = z = x + iy, \quad z^2 = \bar z = x - iy, \quad z^3 = x_3,$$
$$2\,\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}, \qquad 2\,\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial z^3} = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Комплексные компоненты нормали n^k и напряжений P^{kl} выражаются через декартовы компоненты тех же величин формулами преобразования $n^k = n_m\,\partial z^k/\partial x_m$, $P^{kl} = P_{ms}\,(\partial z^k/\partial x_m)(\partial z^l/\partial x_s)$ в виде [8–10]

$$\begin{gathered} n^1 = \bar n^2 = n_1 + in_2, \qquad n^3 = n_3, \qquad P^{11} = \bar P^{22} = P_{11} - P_{22} + 2iP_{12}, \\ P^{12} = P_{11} + P_{22}, \qquad P^{31} = \bar P^{32} = P_{31} + iP_{32}, \qquad P^{33} = P_{33}. \end{gathered} \tag{27}$$

На боковой поверхности цилиндра в точках контура L у нормали к поверхности третья компонента равна нулю, а первая и вторая представляются через декартовы и комплексные уравнения контура L $x = x(s)$, $y = y(s)$ и $z = z(s)$, $\bar z = \bar z(s)$ (s — дуга контура) формулами $n_1 = dy/ds$, $n_2 = -dx/ds$; $n^1 = \bar n^2 = -i\,dz/ds$. В силу (7), (12), (17) комплексные напряжения (27) представляются через компоненту P^{31} в виде

$$\begin{gathered} P^{11} = \bar P^{22} = (P^{31})^2/U'(R^2), \quad P^{12} = 2(U(R^2) - h) + R^2/U'(R^2), \\ P^{33} = U(R^2) - h, \quad P^{32} = \bar P^{31}, \quad R^2 = P^{31}\bar P^{31}. \end{gathered} \tag{28}$$

В комплексных переменных нелинейная краевая задача (24) для напряжений имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{P^{31}}{U'} - \frac{\partial}{\partial \bar z}\,\frac{\bar P^{31}}{U'} = 0, \quad \frac{\partial P^{31}}{\partial z} + \frac{\partial \bar P^{31}}{\partial \bar z} = 0, \quad P^{31}\,\frac{d\bar z}{ds}\Big|_L = g_t - ig_n, \tag{29}$$

где зависимость $U' = U'(R^2)$ $(R^2 = P^{31}\bar P^{31})$ определена выражением (11).

В случае линейного упругого потенциала ($a = 0$ в (8)) производная потенциала постоянна: $U' = -2b = \mathrm{const}$, в силу чего задача (29) становится линейной (совпадающей с соответствующей задачей линейной упругости):

$$\frac{\partial P^{31}}{\partial z} - \frac{\partial \bar P^{31}}{\partial \bar z} = 0, \quad \frac{\partial P^{31}}{\partial z} + \frac{\partial \bar P^{31}}{\partial \bar z} = 0, \quad P^{31}\,\frac{d\bar z}{ds}\Big|_L = g_t - ig_n.$$

Следствием этих уравнений является уравнение $\partial P^{31}/\partial z = 0$. В результате интегрирования оно определяет комплексное напряжение через произвольную функцию $\bar\varphi'(\bar z)$ — комплексный потенциал. Подстановка полученного выражения для напряжения в краевое условие приводит к краевой задаче для потенциала

$$P^{31} = \bar\varphi'(\bar z), \quad \varphi(z)\big|_L = g(s) + G, \quad g(s) = \int\limits_0^s (g_t + ig_n)\,ds, \quad G = \mathrm{const}\,. \tag{30}$$

Если S — односвязная область (конечная или бесконечная), ограниченная простым гладким контуром L в плоскости z, то ее можно конформно отобразить на единичный круг K с окружностью C в плоскости ζ с помощью голоморфной функции $z = \omega(\zeta)$, $\omega'(\zeta) \ne 0$. При отображении комплексный потенциал и его производная принимают значения $\varphi(z) = \varphi(\zeta)$, $\varphi'(z) = \varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta)$, что согласно (30) позволяет представить напряжение через потенциал и отображающую функцию и записать краевую задачу для преобразованного потенциала на границе единичного круга (без ограничения общности полагая $G = 0$)

$$P^{31} = \bar{\varphi}'(\bar{\zeta})/\bar{\omega}'(\bar{\zeta}), \quad \varphi(\sigma) = g(\sigma), \quad \zeta = r\mathrm{e}^{i\theta} \in K, \quad \sigma = \mathrm{e}^{i\theta} \in C. \tag{31}$$

При квадратичном упругом потенциале (8) в случае слабой нелинейности (когда коэффициент при квадратичном члене мал по сравнению с коэффициентом при линейном члене: $c = a/(2b) \ll 1$) можно получить приближенное аналитическое решение задачи (29). В линейном по малому параметру приближении рассматриваемые величины представим в виде

$$\begin{gathered} P^{31} = P_0^{31} + cP_1^{31}, \quad U' = U_0' + cU_1', \quad g_t = g_{t0} + cg_{t1}, \quad g_n = g_{n0} + cg_{n1}, \\ R^2 = (R^2)_0 + c(R^2)_1, \quad U = U_0 + cU_1, \end{gathered} \tag{32}$$

где с учетом (9), (21), (22) и (28)

$$\begin{gathered} U_0' = -2b, \quad U_1' = -(R^2)_0/(2b), \quad (R^2)_0 = P_0^{31}\bar{P}_0^{31}, \quad (R^2)_1 = P_0^{31}\bar{P}_1^{31} + P_1^{31}\bar{P}_0^{31}, \\ g_{t0} = -2bp_t/p_b, \quad g_{t1} = -p_t(4b^2p_t^2 + p_b^4)/(2bp_b^3), \quad g_{n0} = p_b, \quad g_{n1} = 0, \\ U_0 = (R^2)_0/(4b), \quad U_1 = (R^2)_0/(32b^3). \end{gathered} \tag{33}$$

Подстановка величин (32) в соотношения (29) и приравнивание в разных частях равенств коэффициентов при одинаковых степенях параметра приводят к линейным краевым задачам для нулевой и первой составляющих напряжений

$$\frac{\partial P_0^{31}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{P}_0^{31}}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial P_0^{31}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{P}_0^{31}}{\partial \bar{z}} = 0, \quad P_0^{31}\,\frac{d\bar{z}}{ds}\Big|_L = g_{t0} - ig_{n0}; \tag{34}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial P_1^{31}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{P}_1^{31}}{\partial \bar{z}} + \frac{3}{4b^2}\Big[(\bar{P}_0^{31})^2\frac{\partial P_0^{31}}{\partial \bar{z}} - (P_0^{31})^2\frac{\partial \bar{P}_0^{31}}{\partial z}\Big] = 0, \\ \frac{\partial P_1^{31}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{P}_1^{31}}{\partial \bar{z}} = 0, \quad P_1^{31}\,\frac{d\bar{z}}{ds}\Big|_L = g_{t1} - ig_{n1}. \end{gathered} \tag{35}$$

Задача (34) для нулевой составляющей напряжения совпадает с соответствующей задачей линейной упругости и имеет решение вида (30)

$$P_0^{31} = \bar{\varphi}_0'(\bar{z}), \quad \varphi_0(z)\big|_L = g_0(s) + G_0, \quad g_0(s) = \int\limits_0^s (g_{t0} + ig_{n0})\,ds, \quad G_0 = \mathrm{const}\,.$$

По напряжению P_0^{31} находим

$$\begin{gathered} \frac{3}{4b^2}\Big[(\bar{P}_0^{31})^2\frac{\partial P_0^{31}}{\partial \bar{z}} - (P_0^{31})^2\frac{\partial \bar{P}_0^{31}}{\partial z}\Big] = \frac{3}{4b^2}\big[\varphi_0'^2(z)\bar{\varphi}_0''(\bar{z}) - \bar{\varphi}_0'^2(\bar{z})\varphi_0''(z)\big] = 2\,\frac{\partial f}{\partial z}, \\ f(z,\bar{z}) = \frac{3}{8b^2}\Big[\bar{\varphi}_0''(\bar{z})\int \varphi_0'^2(z)\,dz - \bar{\varphi}_0'^2(\bar{z})\varphi_0'(z)\Big], \end{gathered}$$

после чего задача (35) для напряжения P_1^{31} принимает вид

$$\frac{\partial P_1^{31}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{P}_1^{31}}{\partial \bar{z}} + 2\,\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P_1^{31}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{P}_1^{31}}{\partial \bar{z}} = 0, \quad P_1^{31}\,\frac{d\bar{z}}{ds}\Big|_L = g_{t1} - ig_{n1}.$$

Сложение уравнений приводит к уравнению $\partial(P_1^{31} + f)/\partial z = 0$, которое в результате интегрирования дает представление напряжения через комплексный потенциал $\bar{\varphi}_1'(\bar{z})$, а подстановка этого представления напряжения в краевое условие дает краевую задачу для потенциала

$$P_1^{31} = \bar{\varphi}_1'(\bar{z}) - f(z,\bar{z}), \quad \varphi_1(z)\big|_L = g_1(s) + G_1, \quad g_1 = \int\limits_0^s \Big(g_{t1} + ig_{n1} + \bar{f}\,\frac{dz}{ds}\Big)ds,$$

где $G_1 = \mathrm{const}$.

Использование конформного отображения односвязной области S на единичный круг позволяет представить составляющие напряжения через преобразованные комплексные потенциалы, а задачи для потенциалов записать на единичной окружности в виде, аналогичном (31):

$$\begin{gathered}P_0^{31} = \bar{\varphi}_0'(\bar{\zeta})/\bar{\omega}'(\bar{\zeta}), \quad \varphi_0(\sigma) = g_0(\sigma), \quad P_1^{31} = \bar{\varphi}_1'(\bar{\zeta})/\bar{\omega}'(\bar{\zeta}) - f(\zeta,\bar{\zeta}), \quad \varphi_1(\sigma) = g_1(\sigma),\\ f(\zeta,\bar{\zeta}) = \frac{3}{8b^2}\Big[\frac{\bar{\Phi}_0'(\bar{\zeta})}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})}\int \frac{\varphi_0'^2(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\,d\zeta - \frac{\bar{\varphi}_0'^2(\bar{\zeta})}{\bar{\omega}'^2(\bar{\zeta})}\,\frac{\varphi_0'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\Big], \quad \Phi_0(\zeta) = \frac{\varphi_0'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}.\end{gathered} \tag{36}$$

Таким образом, в линейном по малому параметру приближении напряжение (32) согласно (36) определяется потенциалами и отображением в виде

$$P^{31} = P_0^{31} + cP_1^{31} = \bar{\varphi}_0'(\bar{\zeta})/\bar{\omega}'(\bar{\zeta}) + c(\bar{\varphi}_1'(\bar{\zeta})/\bar{\omega}'(\bar{\zeta}) - f(\zeta,\bar{\zeta})),$$

где потенциалы находятся из соответствующих краевых задач. Что касается зависимых напряжений (28), то их линейные по малому параметру приближения представляются через величины (36) формулами

$$P^{11} = \bar{P}^{22} = -\frac{(P_0^{31})^2}{2b} + c\,\frac{P_0^{31}}{8b^3}(P_0^{31}(R^2)_0 - 8b^2P_1^{31}), \quad P^{32} = \bar{P}_0^{31} + c\bar{P}_1^{31},$$

$$P^{12} = -2h + c\,\frac{3(R^2)_0^2 - 8b^2(R^2)_1}{16b^3}, \quad P^{33} = \frac{(R^2)_0}{4b} - h + c\,\frac{(R^2)_0^2}{32b^3},$$

где величины $(R^2)_0$, $(R^2)_1$ определены в (33).

Приближения напряжений более высокого порядка можно получить аналогично, если величины (32) разлагать по малому параметру в ряды.

Рассмотрим другой приближенный способ решения задачи (24). В этой задаче первое уравнение может быть удовлетворено, если представить напряжения (отнесенные к U') через градиенты осевого смещения $w(x,y)$:

$$\frac{P_{31}}{U'} = -\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \frac{P_{32}}{U'} = -\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{37}$$

Второе уравнение удовлетворяется, если выразить напряжения через градиенты функции напряжений $t(x,y)$:

$$P_{31} = \frac{\partial t}{\partial y}, \qquad P_{32} = -\frac{\partial t}{\partial x}. \tag{38}$$

Исключение напряжений из равенств (37), (38) приводит к нелинейной системе уравнений для функций t, w, в которой U' определено выражением (11), а величина R^2 — формулами (7), (38):

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{U'}\,\frac{\partial t}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{U'}\,\frac{\partial t}{\partial y}, \quad U' = I_+(R^2) + I_-(R^2) - \frac{2b}{3}, \quad R^2 = \Big(\frac{\partial t}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial t}{\partial y}\Big)^2. \tag{39}$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям плоского безвихревого установившегося движения идеального газа с дозвуковой скоростью [11]

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\rho}{\rho_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\rho}{\rho_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad \frac{\rho}{\rho_0}=\Big(1-\frac{v^2}{v^2_{\max}}\Big)^{1/(\chi-1)},\quad v^2=\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)^2,\qquad (40)$$

где χ — показатель адиабаты. Величинам w, t, $1/U'$, R^2 в уравнениях (39) соответствуют функция тока ψ, потенциал скорости φ, относительная плотность ρ/ρ_0 и квадрат скорости газового потока v^2 в уравнениях (40). При этом в отличие от потенциалов φ, ψ газовой динамики, не имеющих физического смысла, один из потенциалов упругости (потенциал w) имеет смысл осевого смещения.

Аналогично (40) уравнения (39) допускают представление в виде линейной системы уравнений для тех же искомых функций w, t при подходящем выборе независимых переменных. В (39) нелинейность обусловлена величиной $1/U'$, зависящей только от R^2. Поэтому перейдем от декартовых координат x, y в физической плоскости к переменным R, J — полярным координатам в плоскости напряжений P_{31}, P_{32}: $P_{31}=R\cos J$, $P_{32}=R\sin J$. Используя соотношения (37), (38), рассмотрим выражение

$$dt+iU'\,dw=(-P_{32}\,dx+P_{31}\,dy)+iU'\Big(-\frac{P_{31}}{U'}\,dx-\frac{P_{32}}{U'}\,dy\Big)=-i(P_{31}-iP_{32})\,dz=-iR\mathrm{e}^{-iJ}\,dz.$$

При $R\neq 0$ отсюда следует

$$dz=(i\mathrm{e}^{iJ}/R)(dt+iU'\,dw).\qquad (41)$$

Полагая t, w, z функциями R, J, из (41) найдем

$$\frac{\partial z}{\partial R}=\frac{i\mathrm{e}^{iJ}}{R}\Big(\frac{\partial t}{\partial R}+iU'\,\frac{\partial w}{\partial R}\Big),\quad \frac{\partial z}{\partial J}=\frac{i\mathrm{e}^{iJ}}{R}\Big(\frac{\partial t}{\partial J}+iU'\,\frac{\partial w}{\partial J}\Big).\qquad (42)$$

Приравняв в (42) смешанные производные $\partial^2 z/\partial R\partial J$, $\partial^2 z/\partial J\partial R$, получим

$$\frac{\partial t}{\partial R}+iU'\,\frac{\partial w}{\partial R}=\frac{i}{R}\Big(\frac{\partial t}{\partial J}+iU'\,\frac{\partial w}{\partial J}\Big)+\frac{\partial U'}{\partial R}\,\frac{\partial w}{\partial J}.$$

Отделение действительных и мнимых частей в этом равенстве приводит к линейной системе уравнений для t и w

$$\frac{\partial t}{\partial J}=RU'\,\frac{\partial w}{\partial R},\qquad \frac{\partial w}{\partial J}=\Big(R\,\frac{d}{dR}\,\frac{U'}{R}\Big)^{-1}\frac{\partial t}{\partial R}.\qquad (43)$$

С помощью дифференцирования из уравнений (43) можно исключить одну из функций t, w и получить для другой дифференциальное уравнение второго порядка. В частности, уравнение для осевого смещения имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial R^2}-\frac{1}{U'}\,\frac{d}{dR}\Big(\frac{U'}{R}\Big)\frac{\partial^2 w}{\partial J^2}+\frac{1}{RU'}\,\frac{d(RU')}{dR}\,\frac{\partial w}{\partial R}=0.$$

Уравнения (43) допускают дальнейшее упрощение. Коэффициенты при производных в правых частях равенств различаются только знаком, если функция $U'(R^2)$ имеет вид радикала:

$$RU'=-\Big(R\,\frac{d}{dR}\,\frac{U'}{R}\Big)^{-1},\qquad U'=-(1+kR^2)^{1/2},\quad k=\mathrm{const}\,.\qquad (44)$$

При слабой нелинейности ($c=a/(2b)\ll 1$) зависимость $U'(R^2)$ можно записать в виде (44). Действительно, аппроксимируя ее линейной функцией малого параметра $U'=m_0(R^2)+cm_1(R^2)$, найдем коэффициенты из условия тождественного выполнения уравнения (9) для U' в этом приближении $m_0^3 + 3cm_0^2 m_1 + 2b(m_0^2 + 2cm_0 m_1) + 2cbR^2 = 0$. Приравнивание нулю коэффициентов при нулевой и первой степенях параметра в данном равенстве дает уравнения, определяющие искомые величины в виде $m_0 = -2b$, $m_1 = -R^2/(2b)$. Таким образом, величина U' представима в виде

$$U' \approx m_0 + cm_1 = -2b(1 + cR^2/(4b^2)) \approx -2b(1 + 2cR^2/(4b^2))^{1/2}. \tag{45}$$

Выражения (44) и (45) совпадают при $2b = 1$ ($c = a$), $k = 2c/(4b^2) = 2a$, при этом зависимость (45) имеет вид

$$U' = -(1 + 2aR^2)^{1/2}, \tag{46}$$

а уравнения (43) — вид

$$\frac{\partial t}{\partial J} = -R\sqrt{1 + 2aR^2}\,\frac{\partial w}{\partial R}, \quad \frac{\partial w}{\partial J} = R\sqrt{1 + 2aR^2}\,\frac{\partial t}{\partial R}. \tag{47}$$

Переходя от R к переменной V и используя связь производных по этим переменным

$$V = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1 + 2aR^2} + 1}{\sqrt{1 + 2aR^2} - 1} \quad \Big(R = \frac{1}{\sqrt{2a}\,\operatorname{sh} V}\Big), \qquad R\sqrt{1 + 2aR^2}\,\frac{\partial}{\partial R} = -\frac{\partial}{\partial V}, \tag{48}$$

уравнения (47) для функций $t(V, J)$, $w(V, J)$ представим в виде уравнений Коши — Римана [12]

$$\frac{\partial t}{\partial J} = \frac{\partial w}{\partial V}, \qquad \frac{\partial w}{\partial J} = -\frac{\partial t}{\partial V}. \tag{49}$$

Если ввести в рассмотрение комплексную функцию v комплексных переменных Z, $\bar{Z}$

$$\begin{gathered} v = w(Z, \bar{Z}) + it(Z, \bar{Z}), \quad Z = J + iV, \quad \bar{Z} = J - iV, \\ 2\,\frac{\partial}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial J} - i\,\frac{\partial}{\partial V}, \quad 2\,\frac{\partial}{\partial \bar{Z}} = \frac{\partial}{\partial J} + i\,\frac{\partial}{\partial V}, \end{gathered} \tag{50}$$

то уравнения (49) можно записать в комплексной форме

$$2\,\frac{\partial v}{\partial Z} = \frac{\partial(w + it)}{\partial J} - i\,\frac{\partial(w + it)}{\partial V} = \frac{\partial w}{\partial J} + \frac{\partial t}{\partial V} + i\Big(\frac{\partial t}{\partial J} - \frac{\partial w}{\partial V}\Big) = 0.$$

Интегрируя последнее соотношение, находим v как произвольную функцию $\bar{W}$ переменной $\bar{Z}$:

$$v = \bar{W}(\bar{Z}). \tag{51}$$

На контуре L с уравнениями $x = x(s)$, $y = y(s)$ согласно (24) и (46) определены напряжения $P_{31} = P_{31}(s)$, $P_{32} = P_{32}(s)$ и производная упругого потенциала $U' = -\sqrt{1 + 2a(P_{31}^2(s) + P_{32}^2(s))}$. Поэтому уравнения (37) (совместные в силу первого равенства в (24)) на L определяют перемещение

$$w^*(s) = w_0 + \int\limits_0^s \frac{P_{31}x' + P_{32}y'}{\sqrt{1 + 2a(P_{31}^2 + P_{32}^2)}}\,ds, \tag{52}$$

где w_0 — заданная постоянная. Известные контурные напряжения определяют на L величины R, J: $R = \sqrt{P_{31}^2 + P_{32}^2} = R(s)$, $J = \operatorname{arctg}(P_{32}/P_{31}) = J(s)$, а также в соответствии с (48) и (50) величины $V = V(s)$, $J = J(s)$ ($Z = Z(s)$, $\bar{Z} = \bar{Z}(s)$). Учитывая представление перемещения через комплексный потенциал $w = \operatorname{Re} v = \operatorname{Re} W$ и его значение на контуре (52), получим краевую задачу для потенциала

$$\operatorname{Re} W(Z)\big|_L = w^*. \tag{53}$$

Найденный из (53) потенциал $W(Z)$ определяет функцию $w(Z, \bar{Z}) = (W(Z) + \bar{W}(\bar{Z}))/2$, которую можно записать в переменных z, $\bar{z}$. Интегрируя равенство (41) (после перехода с учетом (46), (48) и (49) к переменным Z, $\bar{Z}$), найдем соотношение

$$z - z_0 = \frac{\sqrt{2a}}{2} \Big[\int \mathrm{e}^{iZ} W'(Z)\, dZ + \int \mathrm{e}^{i\bar{Z}} \bar{W}'(\bar{Z})\, d\bar{Z} \Big].$$

Присоединив к нему комплексно-сопряженное равенство, получим зависимости $z = z(Z, \bar{Z})$, $\bar{z} = \bar{z}(Z, \bar{Z})$. Якобиан этого преобразования, вычисленный с учетом соотношений (46)–(50), отличен от нуля:

$$\frac{\partial(z, \bar{z})}{\partial(Z, \bar{Z})} = \frac{\partial(z, \bar{z})}{\partial(R, J)} \, \frac{\partial(R, J)}{\partial(V, J)} \, \frac{\partial(V, J)}{\partial(Z, \bar{Z})} = \frac{\partial(z, \bar{z})}{\partial(R, J)} \, \frac{R}{2i} \sqrt{1 + 2aR^2} \neq 0,$$

так как согласно (42), (43) и (46)

$$\frac{\partial(z, \bar{z})}{\partial(R, J)} = \frac{2i}{R^3} \Big[R^2 (1 + 2aR^2) \Big(\frac{\partial w}{\partial R} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial J} \Big)^2 \Big] \neq 0.$$

Следовательно, преобразование обратимо: $Z = Z(z, \bar{z})$, $\bar{Z} = \bar{Z}(z, \bar{z})$, т. е. между парами переменных z, $\bar{z}$ и Z, $\bar{Z}$ имеется взаимное соответствие. В силу этого соответствия найденная функция $w(Z, \bar{Z})$ представима в виде $w(Z(z, \bar{z}), \bar{Z}(z, \bar{z})) = w(z, \bar{z})$. Эта функция определяет перемещение, а согласно (37) и выражению $U' = -(1 - 2a|\nabla w|^2)^{-1/2}$ и напряжения в области S.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Murnaghan F.** Finite deformations of an alastic solid // Amer. J. Math. 1937. V. 59, N 2. P. 235–260.
2. **Бондарь В. Д.** Об уравнениях совместности деформаций и напряжений // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, № 6. С. 1094–1104.
3. **Седов Л. И.** Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962.
4. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
5. **Бондарь В. Д.** Нелинейная антиплоская деформация упругого тела // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 2. С. 171–179.
6. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1968.
7. **Петровский И. Г.** Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.
8. **Green A. E., Zerna W.** Theoretical elasticity. Oxford: Clarendon Press, 1954.
9. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
10. **Снеддон И. Н., Берри Д. С.** Классическая теория упругости. М.: Физматгиз, 1961.
11. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 2.
12. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 23/IV 2001 г.