

12. Струминский В. В., Смирнов Л. П. и др. Законы механики дисперсных сред и двухфазных систем в связи с проблемами повышения эффективности технологических процессов. Препринт № 1. М.: Сектор механики неоднородных сред АН СССР, 1979.
13. Ламб Г. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947.
14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1977.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М.: Наука, 1976.
16. Головин А. М., Чижов В. Е. К расчету бинарной коррелятивной функции в двухфазной системе. — ПММ, 1977, № 6.

Поступила 7/VII 1983 г.

УДК 533.06

СТРУКТУРА ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ОТСОСОМ

С. К. Бетяев

(Москва)

Использование отсоса пограничного слоя в целях увеличения аэродинамического качества крыла имеет два назначения: ламинаризацию потока и устранение или затягивание его отрыва. Как исследование устойчивости течения, так и постановка варпационной задачи об определении энергетически оптимальной скорости отсоса должны базироваться на анализе течения в пристеночной области, где имеются потери давления и происходит переход от резких изменений скорости к непрерывному (осредненному) распределению. Такой анализ проведен в рамках уравнения Навье — Стокса с помощью комбинированного метода разных масштабов и сращивания асимптотических разложений при максимальных упрощениях, касающихся постановки задачи и схемы системы отсоса. Определены условия, необходимые для отсоса распределенного расхода жидкости, который считается заданным.

1. Выберем в качестве базовых единичных параметров хорду профиля, скорость невозмущенного потока и плотность жидкости. В локально-декартовой системе координат x_1, y_1 с осью x_1 , направленной вдоль контура профиля, уравнение переноса завихренности — $\Delta\psi$ (ψ — функция тока, $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial y_1^2$) в плоском течении имеет вид $L(\Delta\psi) = 0$, где $\delta^{-2} = 1/\nu$ — число Рейнольдса; ν — коэффициент кинематической вязкости; квазилинейный дифференциальный оператор

$$(1.1) \quad L = \frac{\partial\psi}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_1} - \delta^2 \Delta.$$

Скорость отсоса пограничного слоя v_{01} по порядку величины равна толщине пограничного слоя:

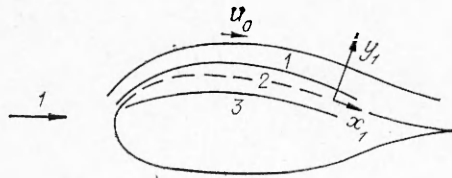
$$(1.2) \quad v_{01} = \delta v_0(x_1).$$

Если v_{01} меньше этой величины, то влияние отсоса на пограничный слой несущественно. Наоборот, если v_{01} больше $O(\delta)$, то реализуется невязкое течение [6].

Примем, что отсос осуществляется через регулярную решетку поперечных щелей с полупериодом $\tau = B(x_1)\delta^n$, где $0 < n \leq 2$. При $n > 2$ масштабы возмущений настолько малы, что вследствие проявления молекулярных эффектов уравнение Навье — Стокса становится неприменимым. Случай $n \rightarrow 0$ соответствует дискретному отсосу. Коэффициент проницаемости $x_0 = x_{01}/\tau$, где x_{01} — полуширина щели, будем считать произвольным ($0 \leq x_0 \leq 1$).

Применительно к отсосу жидкости через пористые стенки рассматриваемая ниже модель перетекания жидкости не учитывает стохастического расположения пор и их формы, однако имеет идеологическое оправдание, так как модель Дарси, широко апробированная практикой в задачах фильтрации потенциальных потоков, неприменима при отсосе завихренных потоков, т. е. при отсосе пограничного слоя.

Концепция пограничного слоя справедлива, если длина участка отсоса по порядку величины равна $O(1)$, число Рейнольдса велико, т. е. $\delta \ll 1$, а нормальная составляющая скорости удовлетворяет условию



Ф и г. 1

(1.2). В приближении пограничного слоя имеем

$$\psi(x_1, y_1; \delta) = \delta \Psi_1(x_1, Y) + o(\delta),$$

где $y_1 = \delta Y$. Функция тока $\bar{\Psi}_1$ определяется из уравнения Прандтля, граничного условия при $Y \rightarrow \infty$, а также из условий на стенке

$$(1.3) \quad \Psi_{1Y}(x_1, 0) = 0, \quad \Psi_1(x_1, 0) = - \int v_0 dx_1.$$

В результате решения уравнения пограничного слоя определяется значение безразмерного напряжения трения $\lambda(x_1)$, которое понадобится в дальнейшем для сращивания асимптотических разложений:

$$(1.4) \quad \Psi_{1YY}(x_1, Y \rightarrow 0) = \lambda.$$

Известным будем также считать давление на дне пограничного слоя $p_0(x_1) + \delta A(x_1) + o(\delta)$, где $p_0(x_1)$ — распределение давления на внешней границе пограничного слоя 1 (фиг. 1).

2. В подслое 2 с характерным продольным размером τ течение почти периодическое — амплитуда высокочастотных возмущений изменяется по оси x_1 на масштабах, сравнимых с хордой профиля. Для описания таких течений воспользуемся методом разных масштабов, введя «быструю» переменную x :

$$(2.1) \quad dx/dx_1 = 1/\tau.$$

Оператор L не будет вырожденным, если поперечную координату y_1 растянуть в τ раз: $y_1 = \tau y$. Кроме того, сохраним «медленную» переменную x_1 , зависимость решения от которой очевидна. Таким образом, вместо двух независимых переменных x_1 и y_1 будем иметь три переменных: x, y, x_1 .

Рассмотрим сначала случай $n > 1$. Решение в подслое 2, имеющем толщину порядка $O(\delta^n)$, должно сращиваться с условиями на дне пограничного слоя ($Y \rightarrow 0$). Из условия (1.4) имеем

$$\psi = O(\delta Y^2) = O(\tau^2 y^2 / \delta^2) = O(\delta^{2n-1}).$$

Из второго условия (1.3) находим

$$\psi = O(\tau \delta) = O(\delta^{n+1}).$$

Оценки для функции тока получились разные. Поскольку $n + 1 \geq 2n - 1$, завихренность течения на бесконечности ($y \rightarrow \infty$) определяется первым членом внутреннего разложения и имеет первостепенное значение по сравнению с перетеканием через щели, которое определяется последующими членами разложения. Только в предельном случае $n = 2$ оценки для ψ одинаковы, за отсос ответствен первый член разложения.

Обращаясь к исходному оператору (1.1), заключаем, что первый член разложения определяется из уравнений невязкого течения при $n < 3/2$ и из уравнений ползущих движений при $n > 3/2$, а каждый последующий член разложения, учитывающий влияние отброшенных в первом приближении членов, по порядку величины меньше предыдущего в $\delta^{|2n-3|}$ раз. При $n = 3/2$ ряд становится бесконечным — течение описывается полным уравнением Навье — Стокса. При любом $n \neq 3/2$ только конечное число слагаемых ряда будет старше члена, пропорционального δ^{n+1} и ответственного за отсос пограничного слоя.

Итак, внутреннее разложение представим в виде

$$(2.2) \quad \psi(x_1, y_1; \delta) = \delta^{2n-1} \psi_1(x, y, x_1) + \delta^{2n-1} \sum_{j=1}^N \delta^{j|2n-3|} \psi_j^0(x, y, x_1) + \delta^{n+1} \psi_2(x, y, x_1) + o(\delta^{n+1}),$$

где $N = \langle (2 - n) / (|2n - 3|) \rangle$ — целая часть числа $(2 - n) / (|2n - 3|)$.

Поскольку функции ψ_{2x}^0 подчиненные нулевым граничным условиям, не связаны с отсосом жидкости и не определяют ни проскальзывание потока на проницаемой границе, ни перепад давления в слое 2, ограничимся рассмотрением функций ψ_1 и ψ_2 , которые находятся независимо от ψ_2^0 . Разложение (2.2) будем считать справедливым и в тех случаях, когда число $(2-n)/(2n-3)$ является целым.

Граничные условия для функций ψ_1 и ψ_2 при $y \rightarrow +\infty$ определяются в результате сращивания с условиями (1.3), (1.4):

$$(2.3) \quad \psi_{1x}(x, \infty, x_1) = \psi_{2y}(x, \infty, x_1) = 0, \quad \psi_{1yy}(x, \infty, x_1) = B^2 \lambda, \quad \psi_{2x} = -Bv_0.$$

Ограничимся рассмотрением наиболее простого случая — обтекания решетки щелей (фиг. 2). Точка C' имеет координаты $(x_0, 0)$. Поскольку течение периодически по x , область вытянута по нормали к контуру профиля (бесконечная полоса с разрезами). Условие периодичности течения состоит в том, что вектор скорости, давление и завихренность на линиях $x = \text{const} + 2k$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, при одном и том же y принимают одинаковые значения. Кроме того, на твердых границах ($x_0 \leq |x| \leq 1$) выполняется условие прилипания.

Так как скорости в подслое 2 малы, при принятых предположениях внутреннее разложение (2.2) справедливо и в случае распределенного отсоса (или вдува) сжимаемого газа.

Такое же разложение справедливо и в случае непрерывного отсоса пространственного пограничного слоя с помощью высокочастотных поперечных щелей, так как справедлив закон плоских сечений — координата, изменяющаяся вдоль щелей, «заморожена» и является параметром, соответствующий компонент скорости определяется независимо.

Для единственности решения задачи необходимо задать искомые функции на всей границе области. Очевидно, что недостает граничных условий при $y = -\infty$. Их вид зависит от конкретной системы отсоса (область 3 на фиг. 1). Отметив, что учет постоянной завихренности при $y = -\infty$ не вносит дополнительных трудностей в решение задачи, по аналогии с (2.3) примем

$$(2.4) \quad \psi_{1x} = \psi_{1yy} = \psi_{2y} = 0, \quad \psi_{2x} = -Bv_0.$$

Вид разложения для давления определяется из уравнения Навье — Стокса. При $n > 3/2$ имеем

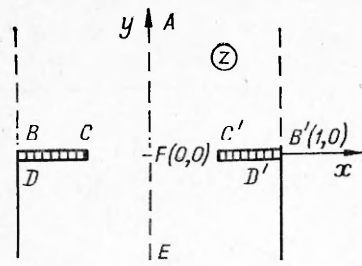
$$(2.5) \quad p(x_1, y_1; \delta) = p_0(x_1) + \delta A(x_1) + \delta B^{-2} p_1(x, y, x_1) + \delta B^{-2} \sum_{j=1}^N \delta^{j|2n-3|} p_j^0(x, y, x_1) + \delta^{3-n} B^{-2} p_2(x, y, x_1) + o(\delta^{3-n}).$$

3. Получим сначала решение задачи об определении ψ_1 и ψ_2 при $n > 3/2$. В этом случае обе функции являются решением уравнений ползущих течений. Плоские задачи теории ползущих течений решаются методом подбора некоторой аналитической функции в конформно преобразованной плоскости [1, 2]. Такой метод пригоден, если решение выражается с помощью элементарных функций. Предлагаемый ниже алгоритм пригоден для получения решения в общем случае.

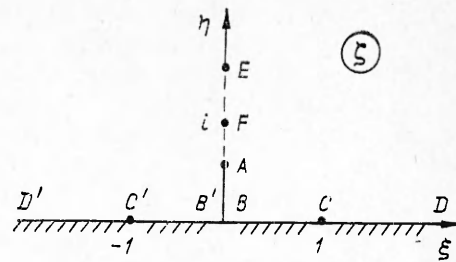
Пусть конформное преобразование $z(\zeta) = x(\xi, \eta) + iy(\xi, \eta)$, где $\zeta = \xi + i\eta$, переводит область течения (период решетки $|x| \leq 1$) на верхнюю полуплоскость $\eta \geq 0$ таким образом, что прямая $\eta = 0$ представляет собой образ твердых границ ($x_0 \leq |x| \leq 1$):

$$(3.1) \quad z = \frac{i}{\pi} \ln \left(\frac{ib - \zeta}{b\zeta - i} \frac{b\bar{\zeta} + i}{\bar{\zeta} + ib} \right), \quad b = \text{ctg} \frac{\pi x_0}{4} > 1.$$

Соответствие точек показано на фиг. 2, 3. Два разреза AB и ED совпадают с осью $\xi = 0$: $0 \leq \eta \leq 1/b$ и $b \leq \eta \leq \infty$.



Ф и г. 2



Ф и г. 3

Величина $W(z, x_1) = p - i\omega$, где $\omega = -\Delta\psi = -\partial^2\psi/\partial x^2 - \partial^2\psi/\partial y^2$ («стерты» нижние индексы у p и ω), должна быть аналитической функцией — ее мнимая и действительная части связаны условиями Коши — Римана. Переменная x_1 «заморожена», ее можно считать параметром. Для ω заданы граничные условия при $y \rightarrow +\infty$, а для давления — при $y \rightarrow -\infty$. Представим функцию W в виде

$$(3.2) \quad W = -8[f(\zeta) + z(\zeta)f'(\zeta)/z'(\zeta)] + p_0 - i\omega_0,$$

где $f(\zeta)$ — аналитическая функция, подлежащая определению, p_0 и ω_0 — давление и завихренность в точке $\zeta = \infty$.

Решением уравнения Пуассона $\Delta\psi = \text{Im } W$ будет функция

$$(3.3) \quad \psi(\xi, \eta) = \psi_0(\bar{\xi}, \eta) + iz(\zeta)\bar{z}(\bar{\zeta})[f(\zeta) - \bar{f}(\bar{\zeta})] - \frac{1}{2}\omega_0 y^2.$$

Черта над функцией означает замену i на $-i$ в коэффициентах отдельных частей этой функции, $\bar{\zeta} = \xi - i\eta$. Функция ψ_0 является потенциалом невязкого безотрывного течения жидкости, т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа, а также условию непротекания на границе $\eta = 0$.

Для определения неизвестной функции $f(\zeta)$ потребуем выполнения условия прилипания: $\psi_\eta(\xi, 0) = 0$. Тогда граничное значение $f(\zeta)$ будет равно

$$(3.4) \quad f(\zeta) = \frac{1}{2} \int_0^{\bar{\zeta}} \psi_{\eta\xi}(\xi, 0) \frac{d\xi}{x^2(\xi, 0)}.$$

Точка $z = 0$ не принадлежит твердой поверхности, поэтому подынтегральное выражение не имеет особенности. Условие непротекания $\psi_\xi(\xi, 0) = 0$ выполняется автоматически, так как граничное значение функции f действительно.

Восстанавливая функцию f по ее граничному значению (3.4) во всей полуплоскости $\eta > 0$ с помощью интеграла Коши, получим

$$(3.5) \quad f(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - \zeta}.$$

Таким образом, предлагаемый метод решения уравнений Стокса заключается в том, что любому невязкому течению, определяемому функцией тока ψ_0 , ставится в соответствие вязкое течение, определяемое функцией тока ψ и формулами (3.3) — (3.5). Для доказательства единственности полученного решения предположим, что (u_1, v_1) и (u_2, v_2) — два набора распределения скоростей, удовлетворяющих условиям периодичности, прилипания на твердых границах и условиям в бесконечно удаленных точках. Составив разности $u = u_1 - u_2, v = v_1 - v_2$, рассмотрим интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-1}^1 (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) dx dy.$$

Считая, что величина I ограничена, т. е. особенность завихренности на кромках щели имеет вид $|z \pm x_0|^\alpha$, где $\alpha < 1$, после несложных преобразований получим $I = 0$. Следовательно, всюду в области $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$. Решение единственно.

4. Теперь можно перейти к нахождению функций ψ_1 и ψ_2 , входящих в разложение (2.2) при $n > 3/2$, и соответствующих им функций тока невязкого течения ψ_{01} и ψ_{02} . Для определения функции ψ_{01} в точках $A(0, i/b)$ и $E(0, ib)$, являющихся образами бесконечно удаленных точек физической плоскости ($y \rightarrow \pm\infty$), расположим особенности в виде точечных вихрей интенсивности $2\pi\Gamma_1$ и $-2\pi\Gamma_2$:

$$\psi_{01}(\xi, \eta, x_1) = \text{Im} \left(i\Gamma_1 \ln \frac{\xi - ib}{\xi + ib} - i\Gamma_2 \ln \frac{\xi - i/b}{\xi + i/b} \right).$$

Функция тока ψ_{01} удовлетворяет условию непротекания, так как в точках $(0, -i/b)$ и $(0, -ib)$ помещены сопряженные вихри. Из условия однолистности функции $f(\xi)$ в бесконечно удаленной точке ($f(\infty) = f(-\infty) = 0$) получаем $\Gamma_2 = \Gamma_1$. Такое течение представляет собой однородный поток в плоскости z . Две постоянные $\omega_0(x_0, x_1)$ и $\Gamma_1(x_0, x_1)$ определяются по известной завихренности в точках A и E , т. е. из условий (2.3), (2.4):

$$\begin{aligned} \pi\omega_0 &= 2\Gamma_1 b(b^2 - 1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^2 - 1}{(\xi^2 + b^2)(1 + b^2\xi^2)} \frac{\ln(\xi^2 + b^2)}{x^2(\xi, 0)} d\xi, \\ 2b\Gamma_1 &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^2 - 1}{(\xi^2 + b^2)(1 + b^2\xi^2)} \ln \frac{\xi^2 + 1/b^2}{\xi^2 + b^2} \frac{d\xi}{x^2(\xi, 0)} = \frac{\pi B^2 \lambda}{b^2 - 1}. \end{aligned}$$

Разложение для скорости в точке $y = \infty$ имеет вид

$$(4.1) \quad \psi_{1y}(x, \infty, x_1) = B^2 \lambda y + \pi\Gamma_1 + o(1).$$

Второй член разложения $\pi\Gamma_1$ ответствен за проскальзывание скорости на дне пограничного слоя. Зависимость $\Gamma_1/B^2\lambda$ от коэффициента проницаемости x_0 представлена на фиг. 4. Из сращения погранслоного разложения с (4.1) получим

$$(4.2) \quad \psi(x_1, y_1; \delta) = \delta\psi_1(x_1, Y) + \delta^n\psi_2(x_1, Y) + o(\delta^n),$$

где $\psi_{2y}(x_1, 0) = \pi\Gamma_1$.

Второй член разложения (4.2), характеризующий проскальзывание, старше, чем член, связанный с вытеснением внешнего невязкого потока на профиле и имеющий порядок $O(\delta^2)$.

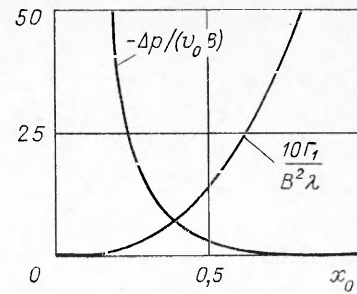
Для определения функции ψ_{02} в точках A и E расположим источник и сток одинаковой интенсивности $q(x_1) = Bv_0/\pi < 0$:

$$\psi_{02}(\xi, \eta, x_1) = q \text{Im} \ln \frac{\xi^2 + b^2}{\xi^2 + 1/b^2}.$$

Функция тока ψ_2 определяет перепад давления $\Delta p = p_A - p_E$, потребный для реализации отсоса. Он не зависит от значения завихренности в бесконечно удаленных точках ($y = \pm\infty$) и пропорционален скорости отсоса

$$\Delta p(x_0, x_1) = -4Bv_0 \frac{b^4 - 1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 + x(\xi, 0)}{x^2(\xi, 0)} \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 + b^2)(1 + b^2\xi^2)} > 0.$$

Зависимость $\Delta p/(Bv_0)$ от коэффициента проницаемости x_0 представлена на фиг. 4. В случае малой проницаемости щелей ($x_0 \ll 1$) потери давле-



Ф и г. 4

ния резко возрастают, $\Delta p \simeq -8Bv_0x_0^{-2}/\pi$. В случае большой проницаемости щелей ($1 - x_0 \ll 1$) потери давления малы, $\Delta p \simeq -\pi Bv_0(1 - x_0)^2$.

На острых кромках щелей C и C' завихренность имеет бесконечный разрыв. На границе подслоя ($y \rightarrow +\infty$) возмущение завихренности затухает пропорционально $y \exp(-\pi y)$.

Если коэффициент проницаемости мал, т. е. $x_0 \ll 1$, то с помощью предельного перехода $\pi b = 4/x_0 \rightarrow \infty$ получается известное решение задачи об обтекании единичной щели [2]:

$$W = -g\mu(\mu^2 - 1)^{-1/2}, \quad 2\mu = 2z/x_0 = -\xi - 1/\xi.$$

Предлагаемый метод решения задач теории ползущих движений применим и в более общем случае, когда стенки щели и канала отсоса искривлены. Пусть снова функция $x + iy = z(\xi)$ конформно отображает область течения на полуплоскость $\text{Im } \xi > 0$ таким образом, что граница $\eta = 0$ взаимно-однозначно соответствует твердым стенкам. Представляя решение задачи в виде (3.2), (3.3) вместо условия прилипания (3.4) получим

$$(4.3) \quad r^2(\xi, 0) \frac{df_1(\xi)}{d\xi} + f_2(\xi) \frac{\partial r^2(\xi, 0)}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \psi_{0\eta}(\xi, 0),$$

где $r^2(\xi, 0) = x^2(\xi, 0) + y^2(\xi, 0)$, $f(\xi, 0) = f_1(\xi) + if_2(\xi)$.

Таким образом, получилась обобщенная краевая задача Гильберта с условием, содержащим первую производную. Решение этой задачи единственно [3]. Также к задаче Гильберта (4.3) сводится задача об обтекании волнистой непроницаемой стенки с периодом волны $2\tau \ll \delta^{3/2}$. Другой предельный случай ($2\tau \gg \delta$) рассмотрен в [4].

5. В случае $1 < n < 3/2$ функция ψ_2 также находится из решения уравнений Стокса. Остается определить функцию ψ_1 , являющуюся решением уравнений Эйлера. Для определения завихренности $-\Delta\psi_1$, сохраняющейся вдоль линий тока, рассмотрим течение с характерным поперечным масштабом $\delta^{2(n-1)}$. На такой длине подслоя полностью обновляется вследствие отсоса жидкости. Поскольку завихренность в этом подслое постоянна, то и завихренность, поступающая в заданное сечение внутренней области, будет постоянной и равной $B^2\lambda$.

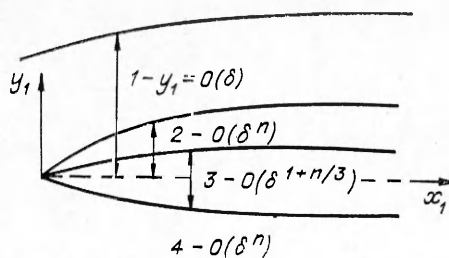
Попутно отметим, что ввиду наличия слоя обновления рассматриваемый асимптотический подход справедлив на расстояниях $O[\delta^{2(n-1)}]$ от точки начала отсоса и на расстояниях $O(\delta^n)$ от конца участка отсоса.

Итак, решение, подчиняющееся условиям сращивания при $y \rightarrow \pm\infty$ и условию прилипания, имеет вид

$$(5.1) \quad \psi_{1yy}(x, y, x_1) = \begin{cases} B^2\lambda & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Так как это решение формально удовлетворяет уравнению Навье — Стокса, при $1 < n < 3/2$ все функции ψ_j^0 , входящие в разложение (2.2), будут равны нулю.

Разрыв решения (5.1) недопустим в вязкой жидкости. Следовательно, в области $y = O(\varepsilon)$, где $\varepsilon \ll 1$, образуется локальный вязкий слой, в котором разрыв завихренности сглаживается. Схема течения с указанием характерной толщины областей показана на фиг. 5, где 1 — основная часть пограничного слоя, 2 — локально-невязкая зона, 3 — локально-вязкий подслой, 4 — локальная зона ползущего (стоксова) течения, определяемого функцией тока ψ_2 . В этом случае градиенты давления, вызванные вытесняющим действием вязкого подслоя, не пере-



Ф и г. 5

даются в невозмущенный поток ввиду демпфирующего действия промежуточного слоя, где $x = O(\delta^n)$, $y = O(\delta)$.

Случай, когда $0 < n < 1$, существенно отличается от рассмотренных. Разложение (2.2) непригодно, так как толщина локально-вязкого слоя, имеющая порядок $O(\delta^n)$, превышает толщину пограничного слоя, пристеночный слой с масштабом $\tau \times \tau$ становится вязким.

При $0 < n < 3/4$ вблизи щели образуется вязкий пограничный слой с характерной толщиной $O(\delta^{1+n/3})$ и с нулевым градиентом давления. При $3/4 < n < 1$ вытесняющее действие этого слоя приводит к появлению внепорядковых градиентов давления во внешнем вязком потоке — схема течения перестраивается. Режим свободного взаимодействия реализуется при $n = 3/4$, в вязком подслое справедливо разложение

$$\Psi(x_1, y_1; \delta) = \delta^{3/2} \bar{\Psi}(x, y_2) + o(\delta^{3/2}),$$

где $y_1 = \delta^{5/4} y_2$.

Система уравнений, описывающая течение в этой области, имеет стандартный вид [5]

$$(5.2) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y_2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y_2} - \frac{\bar{\partial} \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_2^2} = - \frac{dp^*}{dx} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y_2^3},$$

$$p^*(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} g(x^0) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} (x^0 - x) dx^0,$$

$$g(x) = - \lim_{y_2 \rightarrow \infty} \frac{\partial \Psi / \partial x}{\partial \Psi / \partial y_2}.$$

На твердых границах ($|x| > x_0$, $y_2 = 0$) выполняется условие прилипания

$$\partial \Psi / \partial x = \partial \Psi / \partial y_2 = 0.$$

При $|x| < x_0$ имеем

$$\partial \Psi(x, 0) / \partial x = 0.$$

Условие на верхней границе вязкого подслоя ($y_2 \rightarrow +\infty$) находится из сращивания асимптотических разложений:

$$\partial \Psi / \partial y_2 = B^2 \lambda y_2.$$

Условие на нижней границе вязкого подслоя ($y_2 \rightarrow -\infty$) имеет вид

$$\partial \Psi / \partial y_2 = 0.$$

Вместо задания начальных данных используется условие периодичности $\partial \Psi(-1, y_2) / \partial y_2 = \partial \Psi(1, y_2) / \partial y_2$.

Рассмотренные режимы течения можно выделить и в более общем случае, когда вместо линейного профиля скорости на дне пограничного слоя (1.4) имеется степенной профиль $\Psi_{1Y}(x_1, Y \rightarrow 0) = \lambda Y^k$, где $0 < k < \infty$. Течение будет ползущим, если

$$2 > n > \begin{cases} 3/(k+1) & \text{при } 1/2 < k < 2, \\ 1 & \text{при } k > 2. \end{cases}$$

Автор весьма признателен А. В. Зубцову и В. Ф. Молчанову за плодотворное обсуждение темы работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е., Чаплыгин С. А. О трении смазочного слоя между шипом и подшипником. — Тр. отделения физических наук общества любителей естествознания, 1906, т. 13, вып. 1.
2. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. II. М.: ИЛ, 1960.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

4. Зубцов А. В., Пономарев В. П. Асимптотическое решение задачи об обтекании волнистой поверхности плоским потоком вязкой жидкости. — Учен. зап. ЦАГИ, 1972, т. 3, № 2.
5. Сычев В. В. О ламинарном отрыве. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 3.
6. Бетяев С. К. Отрывные течения. Препринт № 14—83. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1983.

Поступила 24/VII 1983 г.

УДК 532.59 : 522.2

ПРОНИКАНИЕ ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА В СЛАБО СЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

А. А. Коробкин

(Новосибирск)

Введение. Рассмотрим начальный этап неустановившегося движения жидкости, вызванного прониканием в нее твердого тела. Первоначально ($t' = 0$) жидкость покоится, а тело касается ее свободной поверхности в единственной точке. Область $\Omega(t')$, занятая жидкостью, изменяется со временем, причем ее граница $\partial\Omega(t')$ состоит из свободной поверхности Σ_1 , твердой поверхности проникающего тела Σ_2 , линии контакта между ними Γ и, возможно, неподвижных твердых стенок Σ_3 (например, посадка гидросамолета на поверхность водоема). Диапазон скоростей предполагается таким, что число Рейнольдса $Re \gg 1$, а число Маха $M \ll 1$.

Количественная информация о процессе проникания может быть получена лишь на основе численных расчетов. Однако точность этих расчетов существенно снижается в моменты, когда меняется топология течения, возникают особенности поля давлений, бесконечные ускорения жидких частиц и т. д. Особенности подобного рода следует выделять аналитически.

Численное решение задачи о проникании заостренных тел (клин, конус) в несжимаемую жидкость было построено в [1], при этом полученное распределение давления на пятне контакта хорошо согласуется с экспериментом. Для затупленных же тел использование модели идеальной несжимаемой жидкости приводит к бесконечному давлению при $t' = 0$, какой бы малой ни была скорость проникания [2]. Это связано с тем, что модель несжимаемой жидкости, в которой скорость распространения возмущений считается бесконечной, не в состоянии описать важный этап истории процесса проникания затупленного тела. А именно существует момент времени t'_* порядка нескольких микросекунд такой, что при $t' < t'_*$ линия контакта Γ движется со скоростью, превышающей скорость звука в жидкости. При этом фронт возмущений присоединен к линии Γ , а возмущенная часть жидкости ограничена твердой поверхностью с одной стороны и фронтом ударной волны — с другой. До момента отрыва ударной волны от линии контакта свободная поверхность остается невозмущенной. Таким образом, для получения реальных результатов на этой стадии расчетов независимо от величины числа Маха M необходимо использовать модель сжимаемой жидкости.

Построенное и исследованное в [3] при малых t' решение задачи проникания затупленного твердого тела в идеальную несжимаемую жидкость хорошо описывает процесс при $t' \gg t'_*$, когда ударная волна достаточно далеко отошла от линии контакта. Это решение, как будет показано ниже, следует рассматривать как главный член внешнего (по отношению к $t' = 0$) асимптотического разложения при $M \rightarrow 0$ решения задачи проникания в модели идеальной сжимаемой жидкости.

1. Постановка задачи. Ограничимся исследованием плоской задачи о проникании параболического контура.

Рассматривается плоское неустановившееся изэнтропическое движение идеальной сжимаемой жидкости, заполняющей в момент $t' = 0$ полуплоскость $y' < 0$ и первоначально покоящейся (как и раньше, штрихом снабжаются размерные переменные). Линия $y' = 0$ в начальный момент является свободной границей. Предполагается, что поверхностное натяжение и внешние массовые силы отсутствуют.

Пусть R и V — положительные постоянные. При фиксированном t' уравнение

$$(1.1) \quad y' = (1/2R)x'^2 - Vt'$$

определяет параболу на плоскости x', y' , которую будем отождествлять с твердым недеформируемым контуром.

При $t' = 0$ этот контур касается свободной границы в точке $x' = 0$. Соотношение (1.1) задает движение контура вдоль оси y' с постоянной ско-