

УДК 532.546

РЕШЕНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ЗАДАЧИ О ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСЕ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ, НАСЫЩЕННОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТЬЮ, ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

М. А. Эззат, А. А. Эль-Бари*, А. С. Хатем

Университет Александрии, Александрия, Египет

* Арабская академия наук и технологий, Александрия, Египет

E-mails: maezzatz2000@yahoo.com, aaelbary@aast.edu, a_amalh44@hotmail.com

С использованием пространства состояний и обратного преобразования Лапласа решаются безразмерные уравнения неустановившейся одномерной задачи о пограничном слое, образующемся при тепломассопереносе в пористой среде, насыщенной вязкоупругой жидкостью, вблизи бесконечной вертикальной пластины при наличии однородного магнитного поля. Получены аналитические решения для температуры, концентрации, скорости и индуцированных магнитного и электрического полей. Обратное преобразование Лапласа находится численным методом. С использованием предложенного метода решены две задачи: задача о пограничном слое вязкоупругой жидкости вблизи вертикальной стенки, на которой в начальный момент времени задаются ступенчатые температура и концентрация, и задача о течении вязкоупругой жидкости между двумя вертикальными стенками. Построенные решения зависят от чисел Прандтля, Шмидта, Грасгофа, коэффициента скорости реакции, коэффициента вязкоупругости и проницаемости среды. Представлены результаты детального исследования зависимости решения от перечисленных выше параметров, позволяющие получить представление об основных свойствах решения. В частности, изучены распределения скорости, температуры, концентрации в потоке, а также индуцированные магнитное и электрическое поля и распределения коэффициента поверхностного трения, локальных чисел Нуссельта и Шервуда.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, естественная конвекция, тепломассоперенос, неньютоновская жидкость, неустановившийся пограничный слой, пространство состояний.

Введение. После появления работы [1], в которой исследовалось течение пограничного слоя вдоль твердой поверхности, было опубликовано большое количество работ, в которых изучалось течение пограничного слоя вязкоупругой жидкости второго порядка по пластической растягивающейся поверхности, а также характеристики тепломассопереноса в этом слое (см. [2–4]). Результаты этих исследований имеют приложения в различных областях техники (экструзия полимерных листов из красителя, производство стекловолокна, бумажное производство, нанесение полимерных пленок и т. п.). В [5] приведен подробный обзор работ, в которых изучается пограничный слой нелинейной жидкости.

В [6, 7] получены уравнения пограничного слоя для модели вязкой жидкости с очень короткой памятью, названной авторами жидкостью B' . В [8] изучалось движение осцилли-

рующего потока за бесконечной пористой пластиной с учетом массопереноса. В [9] исследовались свободная конвекция и массоперенос в потоках вязкой и вязкоупругой жидкостей за вертикальной стенкой.

Установившийся ламинарный поток гидромагнитной жидкости, обусловленный растяжением упругого листа, при наличии однородного магнитного поля изучен в работе [10]. В [11] рассмотрен магнитогидродинамический поток вязкой жидкости за ускоряющейся пластиной. Влияние флуктуаций скорости в потоке на поверхностное трение, температуру и перенос тепла при наличии поперечного магнитного поля исследовалось в [12]. В [13] изучалась свободная конвекция в потоке электропроводящей вязкой жидкости за бесконечной пластиной при наличии поперечного магнитного поля. В [14] с использованием пространства состояний [15] решена задача о пограничном слое вязкоупругой гидромагнитной жидкости, колеблющемся в пористой среде за бесконечной вертикальной стенкой.

Представляет интерес изучение естественной конвекции тепла и массы в потоке ньютоновской жидкости в пористой среде. Перенос тепла и массы вследствие плавучести пористой среды, насыщенной жидкостью, часто встречается в геофизических и геотермальных процессах (перенос массы на скальные основания, обусловленный химическими реакциями). Это явление может возникнуть и при захоронении ядерных отходов, если в результате разрушения резервуара произойдет распространение радиоактивных материалов. Тепло-массоперенос имеет место при проникании влаги через пористый изоляционный материал, при просачивании химических веществ сквозь насыщенную влагой почву. Наиболее полный обзор работ по этой тематике приведен в [16].

В [17–19] изучалась задача о тепло-массопереносе в вязкоупругом пограничном слое на растягивающемся листе при наличии магнитного поля. В [20] тепло-массоперенос исследовался с учетом гидромагнитного эффекта, а также с учетом наличия стоков и источников тепла. В [21] с использованием интегрального метода получено аналитическое решение задачи о тепло-массопереносе вследствие плавучести вдоль вертикальной поверхности в насыщенной жидкостью пористой среде. Температура поверхности и концентрация полагались постоянными. В [22] с помощью интегрального метода изучалось влияние магнитного поля на тепло-массоперенос вследствие естественной конвекции вблизи вертикальной поверхности, на которой поддерживались постоянные температура и концентрация.

Как правило, в перечисленных выше работах использовалось уравнение теплопроводности параболического типа, которое дает бесконечную скорость распространения тепловых волн. Уравнение теплопроводности параболического типа можно заменить уравнением волнового типа, либо рассматривая процесс переноса тепла на микроуровне, либо изменив классический закон Фурье в рамках феноменологического подхода.

В [23] впервые введена математическая поправка, устраняющая присущий закону Фурье дефект скорости распространения тепловых волн. Предложенная в [23] теория допускает существование тепловых волн, распространяющихся с конечной скоростью. С момента появления идеи Максвелла [24] и работы [23] опубликовано большое количество работ, посвященных устранению парадокса распространения тепловых волн с бесконечной скоростью (см. [25]). В работе [26] изучалась свободная конвекция в потоке вязкоупругой жидкости в пористой среде с использованием модели с одним временем релаксации. В [27] применялась усложненная модель неньютоновской жидкости, однако задача о смешанной конвекции в этой работе не рассматривалась.

В настоящей работе используется более общая модель магнитогидродинамической смешанной конвекции в потоке проводящей вязкоупругой жидкости. В этой модели время релаксации содержится и в уравнении теплопроводности, и в уравнении распространения концентрации, кроме того, учитывается электрическая проницаемость электромагнитного поля. Учет времени релаксации и электрической проницаемости приводит к тому, что

уравнения теплопроводности, концентрации и электромагнитного поля, являющиеся уравнениями параболического типа, становятся уравнениями гиперболического типа, вследствие чего устраняется парадокс, связанный с бесконечной скоростью распространения волн.

В настоящей работе в пространстве состояний изучается свободная конвекция тепла и массы в потоке вязкоупругой жидкости за бесконечной вертикальной пластиной при наличии поперечного магнитного поля и химической реакции. Преимущество использования пространства состояний проявляется в тех задачах, в которых исследуется развитие процесса во времени [28]. Подход, в котором используется пространство состояний, является более общим по сравнению с классической техникой преобразования Лапласа и Фурье. Этот подход может быть применен как при решении задач, в которых используются интегральные преобразования по времени, так и при решении задач, в которых такие преобразования невозможны.

В предлагаемом подходе система уравнений относительно вектора состояний записывается в матричной форме. Компонентами вектора состояний являются образы преобразования Лапласа скорости, индуцированного магнитного поля, температуры, концентрации и их градиенты. Интегрирование этой системы с нулевыми начальными данными выполняется с помощью представления матричной экспоненты. Получены решения задач о внезапно приложенных температуре и концентрации, а также задача о течении между двумя параллельными пластинами. В области образов преобразования Лапласа получены явные выражения для функций влияния. Численным методом [29] находится обратное преобразование Лапласа.

1. Постановка задачи. Рассматривается одномерная задача о неустановившейся естественной конвекции тепломассопереноса в потоке вязкой проводящей несжимаемой жидкости за бесконечной вертикальной пластиной, погруженной в пористую среду. Ось x направлена вертикально вдоль пластины, ось y — по нормали к ней. Пусть u — компонента вектора скорости в направлении координаты x . Постоянное магнитное поле с напряженностью $\mathbf{H}_0 = (0, H_0, 0)$ действует в направлении координаты y и индуцирует магнитное поле $\mathbf{h} = (h, 0, 0)$, электрическое поле $\mathbf{E} = (0, 0, E)$, а также электрический ток с плотностью $\mathbf{J} = (0, 0, J)$. Все рассматриваемые величины являются функциями только координаты y и времени t . Величины, характеризующие электромагнитное поле, удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{h} &= \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \mathbf{h} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \\ \mathbf{B} &= \mu_0(\mathbf{H}_0 + \mathbf{h}), & \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (1)$$

где ε_0 — электрическая проницаемость; μ_0 — магнитная проницаемость; \mathbf{B} , \mathbf{D} — векторы магнитной и электрической индукции соответственно. Эти уравнения дополняются законом Ома

$$\mathbf{J} = \sigma_0(\mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{V} \times \mathbf{H}_0), \quad (2)$$

где σ_0 — электрическая проводимость; \mathbf{V} — скорость.

Уравнение (2) приводится к виду

$$J = \sigma_0(E + \mu_0 H_0 u). \quad (3)$$

Векторные уравнения (1) сводятся к следующим скалярным уравнениям:

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -\left(J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right); \quad (4)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (5)$$

Исключая J из уравнений (3), (4), получаем

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -\left(\sigma_0 E + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right) - \sigma_0 \mu_0 H_0 u. \quad (6)$$

Исключая E из уравнений (5), (6), находим

$$v_m \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - H_0 \frac{\partial u}{\partial y},$$

где $v_m = 1/(\mu_0 \sigma_0)$ — коэффициент магнитной диффузии.

Сила Лоренца имеет отличную от нуля составляющую в направлении x :

$$F_x = (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_x = \mu_0 H_0 \left(\frac{\partial h}{\partial y} + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right).$$

В приближении Буссинеска результирующая система уравнений задачи имеет вид [26]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta_T(T - T_\infty) + g\beta_c(c - c_\infty) - \frac{\nu}{K} u - k_0 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial y^2} + \frac{\alpha^2}{H_0} \left(\frac{\partial h}{\partial y} + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right), \\ v_m \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - H_0 \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= -\left(\sigma_0 E + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right) - \sigma_0 \mu_0 H_0 u, \\ \left(1 + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\varkappa}{\rho C_P} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - K_T T, \\ \left(1 + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial c}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - K_c c, \end{aligned} \quad (7)$$

где β_T, β_c — коэффициенты температурного и концентрационного расширения соответственно; T, c — температура и концентрация жидкости соответственно; g — ускорение свободного падения; K — проницаемость среды; k_0 — коэффициент вязкоупругости; $\alpha = \sqrt{\mu_0 H_0^2 / \rho}$ — альфвеновская скорость; τ_0 — время релаксации; ρ — плотность жидкости; C_P — теплопроводность; K_T — скорость генерации или поглощения удельного внутреннего тепла; K_c — коэффициент скорости реакции; D — коэффициент диффузии массы; \varkappa — теплопроводность.

Введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{\alpha}{\nu} y, & t^* &= \frac{\alpha^2}{\nu} t, & k^* &= \frac{\alpha^2}{\nu} k, & E^* &= \frac{1}{\mu H_0 \alpha} E, & u^* &= \frac{u}{\alpha}, & k_0^* &= \frac{\alpha^2}{\nu^2} k_0, \\ h^* &= \frac{h}{H_0}, & x^* &= \frac{\alpha}{\nu} x, & \varepsilon_0^* &= \mu \alpha^2 \varepsilon_0, & \sigma_0^* &= \mu_0 \nu \sigma_0, & P^* &= \frac{P}{\alpha^2 \rho}, & \tau_0^* &= \frac{\alpha^2}{\nu} \tau_0, \\ T^* &= \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, & Sc &= \frac{\nu}{D}, & K^* &= \frac{K \alpha^2}{\nu^2}, & K_c^* &= \frac{\nu}{\alpha^2} K_c, & K_T^* &= \frac{\nu}{\alpha^2} K_T, & c^* &= \frac{c - c_\infty}{c_w - c_\infty}, \\ J^* &= \frac{\nu}{H_0 \alpha} J, & Pr &= \frac{\nu \rho C_P}{k}, & Gr &= \frac{\nu \beta_T g (T_w - T_\infty)}{\alpha^3}, & Gc &= \frac{\nu \beta_c g (c_w - c_\infty)}{\alpha^3}. \end{aligned}$$

Здесь ν , μ — кинематическая и динамическая вязкость соответственно; Sc , Pr — числа Шмидта и Прандтля; Gr , Gc — число Грасгофа теплопереноса и модифицированное число Грасгофа; индекс w соответствует значениям величин на стенке, индекс “ ∞ ” — значениям величин вдали от стенки.

В безразмерных переменных уравнения (7) записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - k_0 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial y^2} - \frac{u}{K} + Gr T + Gc c + \frac{\partial h}{\partial y} + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= \varepsilon_1 \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + b \left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \left(1 + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - K_T T, \\ \left(1 + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{1}{Sc} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - K_c c, \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= - \left(\sigma_0 E + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) - \sigma_0 u. \end{aligned} \tag{8}$$

Для упрощения выкладок рассматривается задача с нулевыми начальными условиями.

Применим преобразование Лапласа к уравнениям (8). Полученную в результате преобразования систему запишем в матричной форме

$$\frac{d}{dy} \begin{bmatrix} \bar{T} \\ \bar{c} \\ \bar{u} \\ \bar{h} \\ \bar{T}' \\ \bar{c}' \\ \bar{u}' \\ \bar{h}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Gr/(1-sk_0) & -Gc/(1-sk_0) & m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n^2 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 & -b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}(y, s) \\ \bar{c}(y, s) \\ \bar{u}(y, s) \\ \bar{h}(y, s) \\ \bar{T}'(y, s) \\ \bar{c}'(y, s) \\ \bar{u}'(y, s) \\ \bar{h}'(y, s) \end{bmatrix} \tag{9}$$

(черта сверху обозначает образ преобразования Лапласа, штрих — производную по координате y).

Уравнение (9) можно записать в матричной форме

$$\bar{V}'(y, s) = A(s) \bar{V}(y, s), \tag{10}$$

где $\bar{V}(y, s)$ — вектор состояния в области образов, составляющими которого являются образы температуры, концентрации, скорости, индуцированного магнитного поля, а также их градиентов.

Формальное решение уравнения (10) можно записать в следующем виде:

$$\bar{V}(y, s) = \exp(A(s)y) \bar{V}(0, s). \tag{11}$$

Для того чтобы фактически получить решение, необходимо найти представление матричной экспоненты $\exp(A(s)y)$. Запишем характеристическое уравнение матрицы $A(s)$

$$k^8 - I_1 k^6 + I_2 k^4 - I_3 k^2 + I_4 = 0, \tag{12}$$

где k — корень этого уравнения. В силу теоремы Кэли — Гамильтона имеем

$$A^8 - I_1 A^6 + I_2 A^4 - I_3 A^2 + I_4 I = 0. \tag{13}$$

Из уравнения (13) следует, что матрица A^8 и все матрицы A с более высокими степенями выражаются через матрицы A^4 , A^3 , A^2 , A и единичную матрицу восьмого порядка I .

Матричная экспонента записывается в следующем виде:

$$\exp(A(s)y) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 + a_4 A^4 + a_5 A^5 + a_6 A^6 + a_7 A^7. \quad (14)$$

Скалярные коэффициенты уравнения (14) можно найти, заменяя в нем матрицу A корнями характеристического уравнения (12) $\pm k_1$, $\pm k_2$, $\pm k_3$, $\pm k_4$. В результате получаем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \exp(\pm k_1 y) &= a_0 \pm a_1 k_1 + a_2 k_1^2 \pm a_3 k_1^3 + a_4 k_1^4 \pm a_5 k_1^5 + a_6 k_1^6 \pm a_7 k_1^7, \\ \exp(\pm k_2 y) &= a_0 \pm a_1 k_2 + a_2 k_2^2 \pm a_3 k_2^3 + a_4 k_2^4 \pm a_5 k_2^5 + a_6 k_2^6 \pm a_7 k_2^7, \\ \exp(\pm k_3 y) &= a_0 \pm a_1 k_3 + a_2 k_3^2 \pm a_3 k_3^3 + a_4 k_3^4 \pm a_5 k_3^5 + a_6 k_3^6 \pm a_7 k_3^7, \\ \exp(\pm k_4 y) &= a_0 \pm a_1 k_4 + a_2 k_4^2 \pm a_3 k_4^3 + a_4 k_4^4 \pm a_5 k_4^5 + a_6 k_4^6 \pm a_7 k_4^7, \end{aligned} \quad (15)$$

решив которую можно определить коэффициенты a_0, \dots, a_7 . Подставляя эти коэффициенты в уравнение (14), находим матрицы A^2 , A^3 , A^4 , A^5 , A^6 , A^7 .

Поскольку в физических задачах $0 \leq y < \infty$, необходимо избавиться от неограниченной на бесконечности положительной экспоненты. Таким образом, необходимо заменить $\text{sh}(ky)$ на $\exp(-ky)/2$ и $\text{ch}(ky)$ на $\exp(-ky)/2$.

С использованием предложенного выше метода можно решить широкий класс задач в области образов преобразования Лапласа.

2. Задача о внезапно приложенных на вертикальной стенке температуре и концентрации (задача 1). Рассмотрим задачу о свободной конвекции в потоке несжимаемой вязкоупругой жидкости при наличии магнитного поля в полубесконечной области $y \geq 0$, ограниченной бесконечной вертикальной плоскостью $y = 0$. В начальный момент времени среда покоится.

Температура и концентрация на граничной плоскости задаются в виде

$$T(0, t) = T_w H(t), \quad c(0, t) = c_w H(t),$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда. Граничные условия для механических величин имеют следующий вид:

$$u(0, t) = 0, \quad h(0, t) = 0.$$

Используя описанное выше пространство состояний, запишем решение задачи в области образов преобразования

$$\begin{aligned} \bar{T}(y, s) &= \frac{T_w}{s} \exp(-k_1 y), \quad \bar{c}(y, s) = \frac{c_w}{s} \exp(-k_2 y), \\ \bar{u}(y, s) &= A_1(k_1^2 - m_4) \exp(-k_1 y) + A_2(k_2^2 - m_4) \exp(-k_2 y) + \\ &\quad + A_3(k_3^2 - m_4) \exp(-k_3 y) + A_4(k_4^2 - m_4) \exp(-k_4 y), \\ \bar{h}(y, s) &= b[A_1 k_1 \exp(-k_1 y) + A_2 k_2 \exp(-k_2 y) + A_3 k_3 \exp(-k_3 y) + A_4 k_4 \exp(-k_4 y)]. \end{aligned}$$

Для индуцированного электрического поля и плотности тока имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= sb[A_1 \exp(-k_1 y) + A_2 \exp(-k_2 y) + A_3 \exp(-k_3 y) + A_4 \exp(-k_4 y)], \\ \bar{J} &= b[A_1(k_1^2 - \varepsilon_0 s^2) \exp(-k_1 y) + A_2(k_2^2 - \varepsilon_0 s^2) \exp(-k_2 y) + \\ &\quad + A_3(k_3^2 - \varepsilon_0 s^2) \exp(-k_3 y) + A_4(k_4^2 - \varepsilon_0 s^2) \exp(-k_4 y)]. \end{aligned}$$

Выражения для касательных напряжений на стенке имеют вид

$$\bar{\tau}(s) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \Big|_{y=0} = -[A_1 k_1 (k_1^2 - m_4) + A_2 k_2 (k_2^2 - m_4) + A_3 k_3 (k_3^2 - m_4) + A_4 k_4 (k_4^2 - m_4)].$$

Локальные числа Нуссельта и Шервуда определяются по формулам

$$\text{Nu}(s) = -\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{T_w k_1}{s}, \quad \text{Sh}(s) = -\frac{\partial c}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{c_w k_2}{s}.$$

3. Течение между двумя параллельными пластинами (задача 2). Рассмотрим задачу о свободной конвекции в потоке несжимаемой вязкоупругой жидкости при наличии магнитного поля в области $0 \leq y \leq Y$, ограниченной двумя неподвижными вертикальными немагнитными пластинами.

Для механических величин ставятся следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} u(0, t) = 0 \quad \text{или} \quad \bar{u}(0, s) = 0, & \quad u(Y, t) = 0 \quad \text{или} \quad \bar{u}(Y, s) = 0, \\ h(0, t) = 0 \quad \text{или} \quad \bar{h}(0, s) = 0, & \quad h(Y, t) = 0 \quad \text{или} \quad \bar{h}(Y, s) = 0. \end{aligned}$$

Граничные условия для температуры и концентрации имеют вид

$$\begin{aligned} T(0, t) = T_w H(t) \quad \text{или} \quad \bar{T}(0, s) = \frac{T_w}{s}, & \quad T'(Y, t) = 0 \quad \text{или} \quad \bar{T}'(Y, s) = 0, \\ c(0, t) = c_w H(t) \quad \text{или} \quad \bar{c}(0, s) = \frac{c_w}{s}, & \quad c'(Y, t) = 0 \quad \text{или} \quad \bar{c}'(Y, s) = 0. \end{aligned}$$

С использованием приведенных граничных условий из выражения (11) получаем

$$\begin{aligned} \bar{T}(y, s) &= \frac{T_w \text{ch } k_1 (Y - y)}{s \text{ch } k_1 Y}, & \bar{c}(y, s) &= \frac{c_w \text{ch } k_2 (Y - y)}{s \text{ch } k_2 Y}, \\ \bar{u}(y, s) &= A_1 (k_1^2 - m_4) \text{ch } k_1 (Y - y) + A_2 (k_2^2 - m_4) \text{ch } k_2 (Y - y) + A_3 (k_3^2 - m_4) \text{sh } k_3 y + \\ &\quad + A_4 (k_3^2 - m_4) \text{ch } k_3 y + A_5 (k_4^2 - m_4) \text{sh } k_4 y + A_6 (k_4^2 - m_4) \text{ch } k_4 y, \\ \bar{h}(y, s) &= b[A_1 k_1 \text{sh } k_1 (Y - y) + A_2 k_2 \text{sh } k_2 (Y - y) - A_3 k_3 \text{ch } k_3 y - \\ &\quad - A_4 k_3 \text{sh } k_3 y - A_5 k_4 \text{ch } k_4 y - A_6 k_4 \text{sh } k_4 y]. \end{aligned}$$

Для индуцированного электрического поля и плотности тока имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \bar{E}(y, s) &= sb[A_1 \text{ch } k_1 (Y - y) + A_2 \text{ch } k_2 (Y - y) + A_3 \text{sh } k_3 y + \\ &\quad + A_4 \text{ch } k_3 y + A_5 \text{sh } k_4 y + A_6 \text{ch } k_4 y], \\ \bar{J}(y, s) &= b\{A_1 (k_1^2 - \varepsilon_0 s^2) \text{ch } k_1 (Y - y) + A_2 (k_2^2 - \varepsilon_0 s^2) \text{ch } k_2 (Y - y) + \\ &\quad + (k_3^2 - \varepsilon_0 s^2)[A_3 \text{sh } k_3 y + A_4 \text{ch } k_3 y] + (k_4^2 - \varepsilon_0 s^2)[A_5 \text{sh } k_4 y + A_6 \text{ch } k_4 y]\}. \end{aligned}$$

Для поверхностного трения (касательного напряжения на неподвижной пластине) $\bar{\tau}$ получаем выражение

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(s) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \Big|_{y=0} &= -A_1 k_1 (k_1^2 - m_4) \text{sh } k_1 Y - A_2 k_2 (k_2^2 - m_4) \text{sh } k_2 Y + A_3 k_3 (k_3^2 - m_4) \text{ch } k_3 Y + \\ &\quad + A_4 k_3 (k_3^2 - m_4) \text{sh } k_3 Y + A_5 k_4 (k_4^2 - m_4) \text{ch } k_4 Y + A_6 k_4 (k_4^2 - m_4) \text{sh } k_4 Y. \end{aligned}$$

Выше представлены полные решения задачи в области образов преобразования Лапласа.

4. Обратное преобразование Лапласа. Для нахождения обратного преобразования Лапласа используется численный метод, основанный на разложении Фурье. В этом методе для прообраза $g(t)$ образа $\bar{g}(s)$ принимается следующая аппроксимация:

$$g(t) = \frac{e^{Ct}}{t_1} \left[\frac{1}{2} \bar{g}(C) + \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{ik\pi t/t_1} \bar{g} \left(C + \frac{ik\pi}{t_1} \right) \right) \right], \quad 0 \leq t \leq 2t_1,$$

где N — достаточно большое целое число (число членов в усеченном ряде Фурье). Число N должно быть выбрано таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$e^{Ct} \operatorname{Re} \left[e^{iN\pi t/t_1} \bar{g} \left(C + \frac{iN\pi}{t_1} \right) \right] \leq \varepsilon_1,$$

где ε_1 — малое положительное число, зависящее от требуемой точности. Параметр C должен быть больше вещественной части любого сингулярного числа функции $\bar{g}(s)$. Оптимальное значение параметра C выбирается в соответствии с критерием, предложенным в [29].

5. Результаты численных расчетов и их обсуждение. Ниже приводятся результаты решения двух сформулированных выше задач. Вычислены поля скорости, температуры, концентрации, а также индуцированные магнитное и электрическое поля.

Исследована зависимость решения от параметров Gr , Gc , Pr , Sc , K_c , K_T , k_0 , K , τ_0 , Nu , Sh . Для первой задачи результаты исследований представлены на рис. 1–9. Вычисления выполнены с помощью программы, написанной на языке FORTRAN.

На рис. 1 приведены зависимости скорости от параметров Gr , Gc , Pr , Sc , K_T , K_c , K . Результаты сравнения кривых 1, 2, 3, 8 на рис. 1 показывают, что с увеличением параметров Gr , Gc , K скорость увеличивается. Зависимость скорости от параметров Pr , K_T , K_c представлена кривыми 1, 4, 6, 7. С увеличением параметров Pr , K_T , K_c , k_0 скорость потока уменьшается. Кривая 5 представляет собой зависимость скорости от параметра Sc . Видно, что увеличение числа Шмидта приводит к уменьшению скорости потока. Указанные выше зависимости совпадают с зависимостями, полученными в работе [17].

Важным свойством полученного решения является то, что любая из искомым функций тождественно обращается в нуль вне конечной области ($y \geq y^*(t)$). Величина $y^*(t)$ зависит только от времени t и определяет положение фронта волны. В этом заключается существенное отличие решения, полученного с использованием обобщенной модели теплопроводности, от решения, получаемого с помощью классического закона теплопроводности Фурье. В соответствии с классическими моделями волны распространяются с бесконечной скоростью, поэтому функции отличны от нуля во всей области в любой момент времени, несмотря на то что при больших значениях y их значения малы.

На рис. 2 приведены графики скорости $u(y, t)$ при различных значениях τ_0 и t . Видно, что с увеличением τ_0 скорость уменьшается. При небольших значениях времени решение локализуется в ограниченной области, которая с увеличением времени расширяется. Граница этой области определяет фронт волны и зависит от времени t и времени релаксации τ_0 . Полученная зависимость решения от времени релаксации τ_0 такая же, как и в работе [28].

При изменении числа Прандтля Pr температура изменяется в меньшей степени, чем скорость. На рис. 3 приведены зависимости температуры $T(y, t)$ при различных значениях Pr . Видно, что чем больше число Прандтля, тем быстрее уменьшается температура по мере удаления от стенки.

На рис. 4 приведены зависимости концентрации $c(y, t)$ для двух значений числа Шмидта и различных значений коэффициента скорости реакции K_c . Видно, что с увеличением Sc и K_c концентрация уменьшается. Данные зависимости хорошо согласуются с зависимостями, полученными в работе [30].

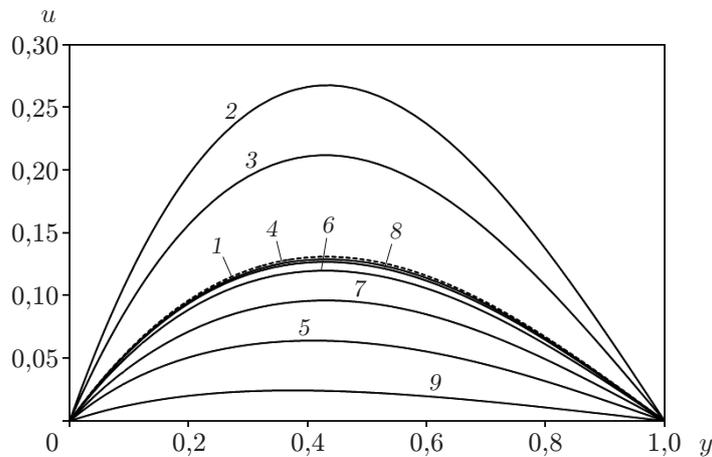


Рис. 1. Безразмерная скорость $u(y, t)$ при $\tau_0 = 0,2$:

Номер кривой	Gr	Gc	Pr	Sc	K_T	K_c	K	k_0
1	1	2	0,73	0,62	0,3	0,2	1,0	0,2
2	3	2	0,73	0,62	0,3	0,2	1,0	0,2
3	1	5	0,73	0,62	0,3	0,2	1,0	0,2
4	1	2	7,00	0,62	0,3	0,2	1,0	0,2
5	1	2	0,73	3,00	0,3	0,2	1,0	0,2
6	1	2	0,73	0,62	4,0	0,2	1,0	0,2
7	1	2	0,73	0,62	0,3	8,0	1,0	0,2
8	1	2	0,73	0,62	0,3	0,2	6,0	0,2
9	1	2	0,73	0,62	0,3	0,2	1,0	6,0

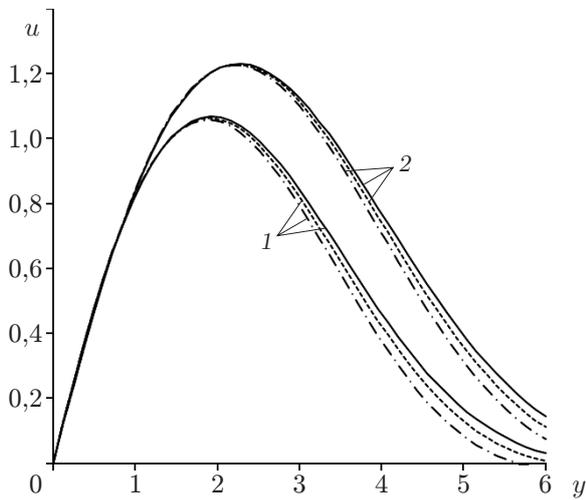


Рис. 2

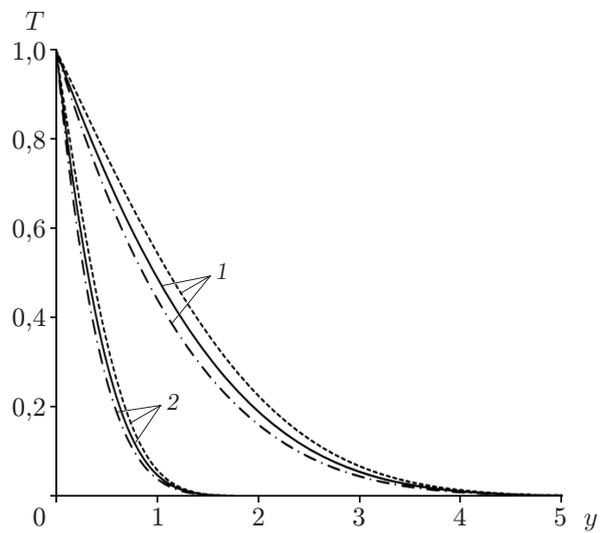


Рис. 3

Рис. 2. Безразмерная скорость $u(y, t)$ при $Gr = 1,0, Gc = 2,0, K_T = 0,3, K_c = 0,2, Sc = 0,62, Pr = 0,73, K = 1,0, k_0 = 0$:

1 — $t = 2,0, 2 — t = 2,5$; сплошные линии — $\tau_0 = 0,01$, штриховые — $\tau_0 = 0,1$, штрихпунктирные — $\tau_0 = 0,2$

Рис. 3. Безразмерная температура $T(y, t)$ при $Gr = 1,0, Gc = 2,0, K_c = 0,2, Sc = 0,2, K = 1,0, k_0 = 0,2, \tau_0 = 0,2$:

1 — $Pr = 0,73, 2 — Pr = 7,0$; штриховые линии — $K_T = 0$, сплошные — $K_T = 0,3$, штрихпунктирные — $K_T = 0,6$

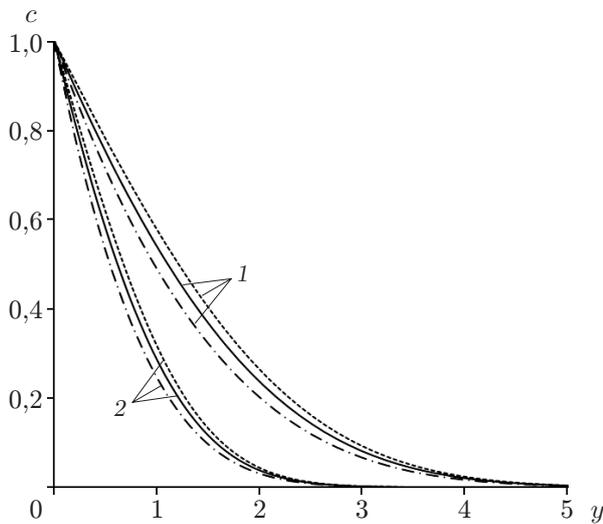


Рис. 4

Рис. 4. Безразмерная концентрация $c(y, t)$ при $Gr = 1,0$, $Gc = 2,0$, $K_T = 0,2$, $Pr = 0,73$, $K = 1,0$, $k_0 = 0,2$, $\tau_0 = 0,2$:

1 — $Sc = 0,62$, 2 — $Sc = 2,0$; штриховые линии — $K_c = 0$, сплошные — $K_c = 0,2$, штрихпунктирные — $K_c = 0,5$

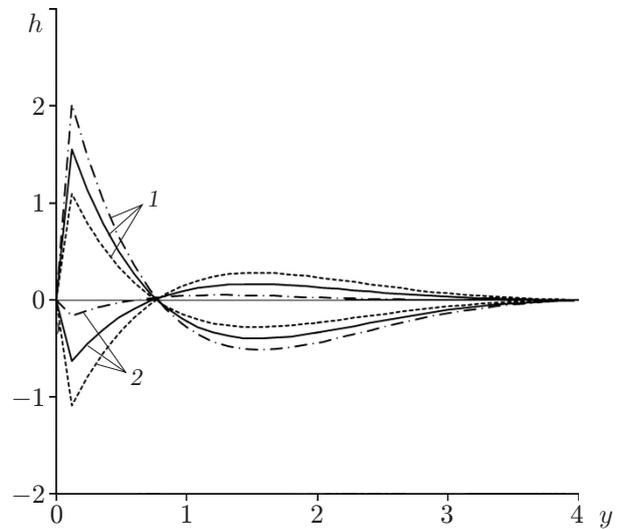


Рис. 5

Рис. 5. Безразмерное индуцированное магнитное поле $h(y, t)$ при $K_c = 0,2$, $K_T = 0,3$, $Sc = 0,2$, $Pr = 0,73$, $K = 1,0$, $k_0 = 0,2$, $\tau_0 = 0,2$:

1 — $Gr = -5,0$, 2 — $Gr = 5,0$; штриховые линии — $G_c = 0$, сплошные — $G_c = 0,2$, штрихпунктирные — $G_c = 0,4$

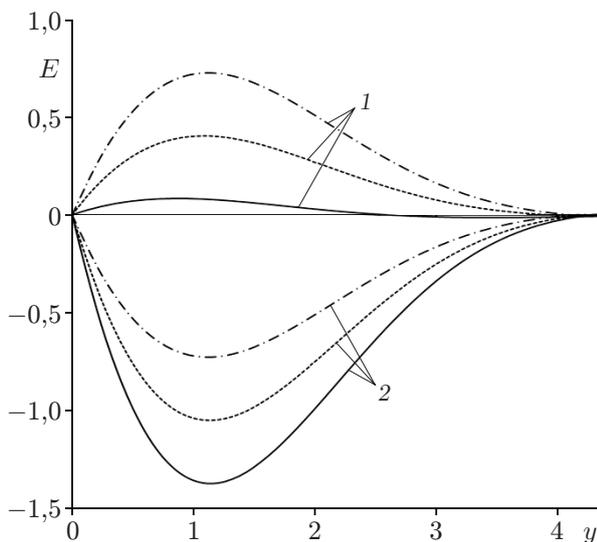


Рис. 6

Рис. 6. Безразмерное индуцированное электрическое поле $E(y, t)$ при $K_c = 0,2$, $K_T = 0,3$, $Sc = 0,62$, $Pr = 0,73$, $K = 1,0$, $k_0 = 0,2$, $\tau_0 = 0,2$ (обозначения те же, что на рис. 5)

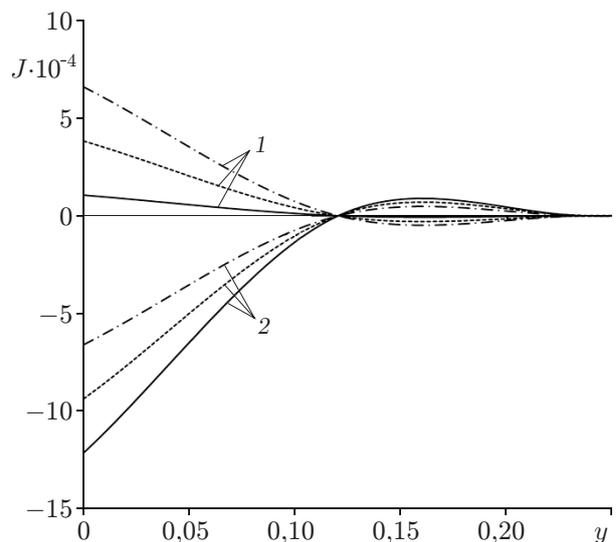


Рис. 7

Рис. 7. Безразмерная плотность тока $J(y, t)$ при $K_c = 0,2$, $K_T = 0,3$, $Sc = 0,62$, $Pr = 0,73$, $K = 1,0$, $k_0 = 0,2$, $\tau_0 = 0,2$ (обозначения те же, что на рис. 5)

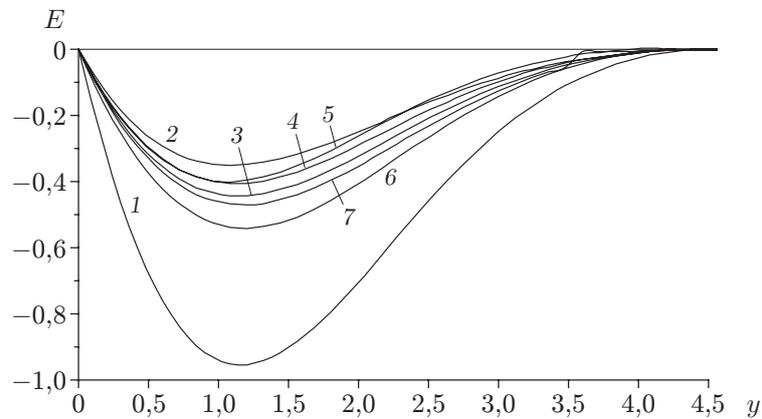


Рис. 8. Безразмерное индуцированное электрическое поле $E(y, t)$ при $\tau_0 = 0,1$:

Номер кривой	Pr	Sc	K_T	K_c	K	k_0
1	0,73	0,62	0,3	0,2	1,0	0,20
2	7,00	0,62	0,3	0,2	1,0	0,20
3	0,73	3,00	0,3	0,2	1,0	0,20
4	0,73	0,62	1,0	0,2	1,0	0,20
5	0,73	0,62	0,3	1,0	1,0	0,20
6	0,73	0,62	0,3	0,2	2,0	0,20
7	0,73	0,62	0,3	0,2	1,0	0,27

Выбранные значения параметра Gr соответствуют его значениям в физических процессах. Свободная конвекция тепла обусловлена разностью температур $T_0 - T_\infty$, следовательно, $Gr > 0$, если $T_0 - T_\infty > 0$, что соответствует охлаждению в случае свободной конвекции. Случай $Gr < 0$ соответствует нагреванию поверхности вследствие наличия конвективного течения.

На рис. 5–7 приведены зависимости индуцированного магнитного поля h , индуцированного электрического поля E и плотности тока J от координаты y в случаях охлаждения ($Gr > 0$) и нагревания ($Gr < 0$) пластины при различных значениях числа Грасгофа Gc . При $Gr > 0$ с увеличением Gc индуцированное магнитное поле h уменьшается, а индуцированное электрическое поле E и плотность тока J увеличиваются. При $Gr < 0$ имеют место обратные зависимости.

На рис. 8, 9 приведены зависимости индуцированного электрического поля E и плотности тока J от координаты y при времени релаксации $\tau_0 = 0,1$ и различных значениях параметров K_T, K_c, Sc, Pr, k_0, K . Результаты анализа приведенных зависимостей показывают, что с увеличением любого из перечисленных параметров индуцированное электрическое поле и плотность тока увеличиваются.

В табл. 1 приведены значения коэффициента поверхностного трения τ при $Gr > 0$ и различных значениях параметров Gc, Pr, Sc, K, k_0 . Из табл. 1 следует, что коэффициент τ увеличивается с увеличением параметров Gr, Gc и уменьшается при увеличении параметров Pr, Sc, K, k_0 .

В табл. 2 приведены значения числа Нуссельта Nu , характеризующего скорость переноса тепла, при различных значениях числа Прандтля Pr и времени релаксации τ_0 . При увеличении числа Прандтля число Нуссельта увеличивается, в то время как при увеличении времени релаксации оно уменьшается.

В табл. 3 приведены значения числа Шервуда Sh , характеризующего скорость переноса массы, при различных значениях числа Шмидта Sc , времени релаксации τ_0 и про-

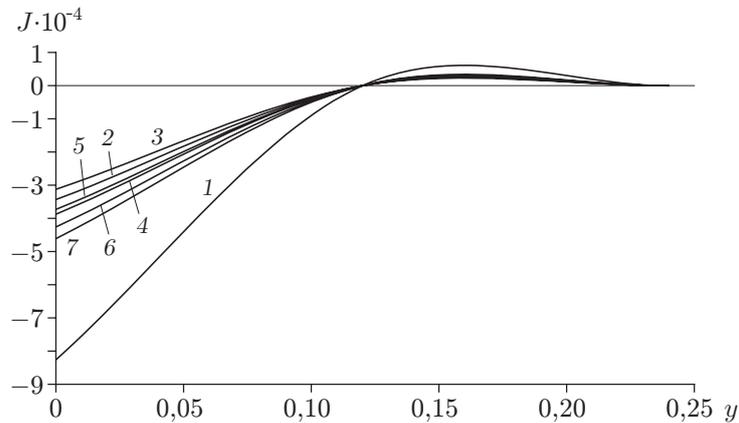


Рис. 9. Безразмерная плотность тока $J(y, t)$ при $\tau_0 = 0,1$ (обозначения те же, что на рис. 8)

Таблица 1

Поверхностное трение τ при различных значениях параметров Gr , Gc , Pr , Sc , K , k_0

Gr	Gc	Pr	Sc	K	k_0	τ
1	2	0,73	0,22	0,2	0,2	1,237 391 5
5	2	0,73	0,22	0,2	0,2	1,237 392 5
1	4	0,73	0,22	0,2	0,2	2,474 782 5
1	2	1,00	0,22	0,2	0,2	1,039 152 6
1	2	0,73	0,62	0,2	0,2	0,290 269 8
1	2	0,73	0,22	0,5	0,2	1,165 209 1
1	2	0,73	0,22	0,2	0,4	1,149 950 2

Таблица 2

Локальное число Нуссельта Nu при различных значениях числа Прандтля Pr и времени релаксации τ_0 в задаче 1

Pr	τ_0	Nu
0,50	0,01	0,398 125 505
0,50	0,10	0,388 711 909
0,73	0,01	0,481 056 879
0,73	0,10	0,469 682 387
7,00	0,01	1,489 649 241
7,00	0,10	1,454 426 787

Таблица 3

Значения локального числа Шервуда при различных значениях параметров Sc , τ_0 , K в задаче 1

Sc	τ_0	K	Sh
0,61	0,01	1,0	0,819 813 96
1,00	0,01	1,0	1,049 664 14
0,61	0,10	1,0	0,808 036 99
0,61	0,01	2,0	1,114 328 54

нищаемости среды K . С увеличением параметров Sc и K число Шервуда увеличивается, а при увеличении времени релаксации уменьшается.

Закключение. В работе исследовано влияние магнитного поля на скорость, температуру и концентрацию потока вязкой жидкости. Выявлены следующие закономерности. С увеличением коэффициента вязкоупругости k_0 , времени релаксации τ_0 , проницаемости среды K и чисел Грасгофа Gr , Gc скорость потока увеличивается. С увеличением числа Прандтля Pr температура во всех точках уменьшается. С увеличением числа Шмидта Sc концентрация потока во всех точках уменьшается. С увеличением коэффициентов K_T и K_c соответственно уменьшаются температура и концентрация потока. При $Gr > 0$ с увеличением числа Грасгофа Gc индуцированное магнитное поле h уменьшается, а индуцированное электрическое поле E и плотность тока J увеличиваются, при $Gr < 0$ имеют место обратные закономерности. С увеличением чисел Грасгофа Gr , Gc коэффициент поверхностного трения τ увеличивается, а с увеличением параметров Pr , Sc , K , k_0 уменьшается. С увеличением времени релаксации τ_0 значения чисел Нуссельта Nu и Шервуда Sh уменьшаются, в то время как с увеличением параметров Pr , Sc , K они увеличиваются.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Sakiadis B. C.** Boundary layer behavior on continuous solid surfaces: the boundary layer on a continuous flat surface // *AIChE J.* 1961. V. 7. P. 26–28.
2. **Rajagopal K. R., Na T. Y., Gupta A. S.** Flow of a viscoelastic fluid over a stretching sheet // *Rheol. Acta.* 1984. V. 23. P. 213–215.
3. **Rajagopal K. R., Na T. Y., Gupta A. S.** A non similar boundary layer on a stretching sheet in a non-Newtonian fluid with uniform free stream // *J. Math. Phys. Sci.* 1987. V. 21. P. 189–200.
4. **Andersson H. I.** MHD flow of a viscoelastic fluid past a stretching surface // *Acta Mech.* 1992. V. 95. P. 227–230.
5. **Rajagopal K. R.** Boundary layers in non-linear fluids // *Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics.* V. 77. Trends in applications of mathematics to mechanics. Harlow: Longman, 1995. P. 209–218.
6. **Walters K.** Second-order effects in elasticity, plasticity and fluid dynamics. N. Y.: Pergamon Press, 1964.
7. **Beard D., Walters K.** Elastico-viscous boundary layer flows. Pt 1. Two-dimensional flow near a stagnation point // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1964. V. 60. P. 667–671.
8. **Soundalgekar V., Patil V.** Unsteady mass transfer flow past a porous plate // *Indian J. Pure Appl. Math.* 1982. V. 13. P. 399–406.
9. **Raptis A., Tzivanidis G., Kafousios N.** Free convection and mass transfer flow through a porous medium bounded by an infinite vertical limiting surface constant suction // *Lett. Heat Mass Transfer.* 1981. V. 8. P. 417–424.
10. **Pavlov B.** Magnetohydrodynamic flow of an incompressible viscous fluid caused by deformation of a plane surface // *Magnit. Gidrodinamika.* 1974. V. 4. P. 146–147.

11. **Singh A., Singh J.** Magnetohydrodynamic flow of a viscoelastic fluid past an accelerated plate // Nat. Acad. Sci. Lett. 1983. V. 6. P. 233–241.
12. **Sherief H., Ezzat M.** A problem of a viscoelastic magnetohydrodynamic fluctuating boundary layer flow past an infinite porous plate // Canad. J. Phys. 1994. V. 71. P. 97–105.
13. **Ezzat M., Abd Elaal M., Shaker O., Barakat F.** State space formulation too viscoelastic fluid flow of magnetohydrodynamic free convection through a porous medium // Acta Mech. 1996. V. 119. P. 147–164.
14. **Ezzat M., Abd Elaal M.** State space approach to viscoelastic fluid flow of hydromagnetic fluctuating boundary-layer through a porous medium // Z. angew. Math. Mech. 1997. Bd 77. S. 197–207.
15. **Ezzat M. A.** State space approach to solids and fluids // Canad. J. Phys. Rev. 2008. V. 86. P. 1241–1250.
16. **Alam M. S., Rahman M. M., Samad M. A.** Numerical study of the combined free-forced convection and mass transfer flow past a vertical porous plate in a porous medium with heat generation and thermal diffusion // Non-Linear Anal. Model. Control. 2006. V. 11. P. 331–343.
17. **Sanjayanand E., Khan S. K.** On heat and mass transfer in a viscoelastic boundary layer flow over an exponentially stretching sheet // Intern. J. Therm. Sci. 2006. V. 45. P. 819–828.
18. **Cortell R.** Toward an understanding of the motion and mass transfer with chemically reactive species for two classes of viscoelastic fluid over a porous stretching sheet // Chem. Engng Proc. 2007. V. 46. P. 721–728.
19. **Seddeek M. A.** Heat and mass transfer on a stretching sheet with a magnetic field in a viscoelastic fluid flow through a porous medium with heat source or sink // Comput. Mater. Sci. 2007. V. 38. P. 781–787.
20. **Abel M. S., Siddheshwar P. G., Nandeppanavar M.** Heat transfer in a viscoelastic boundary layer flow over a stretching sheet with viscous dissipation and non-uniform heat source // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2007. V. 50. P. 960–966.
21. **Singh P., Queeny.** Free convection heat and mass transfer along a vertical surface in a porous medium // Acta Mech. 1997. V. 123. P. 69–73.
22. **Cheng C. Y.** Effect of a magnetic field on heat and mass transfer by natural convection from vertical surfaces in porous media — an integral approach // Intern. Comm. Heat Mass Transfer. 1999. V. 26. P. 935–943.
23. **Cattaneo C.** Sulla condizione del calore // Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. 1948. V. 3. P. 83–101.
24. **Truesdell A.** Fundamental of Maxwell's kinetic theory of a simple monatomic gas / A. Truesdell, R. G. Muncaster. N. Y.: Acad. Press, 1980.
25. **Joseph D., Preziosi L.** Heat waves // Rev. Modern Phys. 1989. V. 61. P. 41–73.
26. **Ezzat M., Abd Elaal M.** Free convection effects on a viscoelastic boundary layer flow with one relaxation time through a porous medium // J. Franklin Inst. 1997. V. 334. P. 685–706.
27. **Ezzat M. A.** Thermoelectric MHD non-Newtonian fluid with fractional derivative heat transfer // Physica B. 2010. V. 405. P. 4188–4194.
28. **Ezzat M. A.** Free convection effects on perfectly conducting fluid // Intern. J. Engng Sci. 2001. V. 39. P. 799–819.
29. **Honig G., Hirdes U.** A method for the numerical inversion of Laplace transforms // J. Comput. Appl. Math. 1984. V. 10. P. 113–132.
30. **Hsiao K. L., Hsu C. H.** Conjugate heat transfer of mixed convection for viscoelastic fluid past a horizontal flat-plate fin // Appl. Therm. Engng. 2009. V. 29. P. 28–36.

*Поступила в редакцию 9/XII 2011 г.,
в окончательном варианте — 17/X 2012 г.*