УДК 532.582

О ДВИЖЕНИИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА В КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

И. Е. Карева, В. Л. Сенницкий

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

С использованием численных методов определено движение кругового цилиндра в идеальной жидкости, ограниченной извне поверхностью колеблющейся стенки, в присутствии силы тяжести.

В [1] рассмотрена задача о движении абсолютно твердого кругового цилиндра в идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной извне плоской поверхностью абсолютно твердой колеблющейся стенки, в присутствии силы тяжести. В этой работе установлено, что твердое тело в жидкости вследствие колебательных воздействий на жидкость может вести себя парадоксально: цилиндр, плотность которого отлична от плотности жидкости, может, в частности, в среднем покоиться. Теоретическое исследование эффектов парадоксального поведения твердого тела в колеблющейся жидкости в присутствии силы тяжести, начатое в [1], нашло свое развитие в [2, 3] (см. также [4]). В [1, 3] получены аналитические решения задач о движении твердого тела — кругового цилиндра, шара — в жидкости в предположении, что расстояние между телом и стенкой велико по сравнению с радиусом тела. В данной работе представлены результаты изучения рассмотренной в [1] задачи с использованием численных методов в том случае, когда расстояние между осью цилиндра и поверхностью стенки невелико по сравнению с радиусом цилиндра.

1. Будем рассматривать задачу в постановке, изложенной в [1]. Пусть x, y — инерциальная прямоугольная система координат в плоскости течения (рис. 1); a — радиус цилиндра; $O(L,0)$ — точка пересечения плоскости течения с осью цилиндра; h ($h > a$) — расстояние между точкой O и линией пересечения плоскости течения с поверхностью стенки; $H = L - h$; $\rho_{\text{ц}}$ — плотность цилиндра; $\rho_{\text{ж}}$ — плотность жидкости; $\boldsymbol{g} = (-g, 0)$ — ускорение свободного падения.

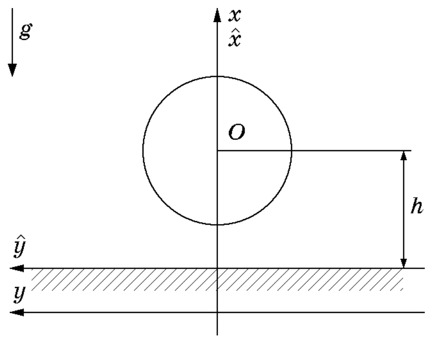

Рис. 1

Уравнение движения цилиндра и начальные условия в системе координат $\hat{x} = x - H$, $\hat{y} = y$, связанной со стенкой, имеют следующий вид:

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{F}{\pi a^2 \rho_{\text{ц}}} - g - \frac{d^2H}{dt^2}; \tag{1}$$

$$h = h_0, \qquad \frac{dh}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{2}$$

Здесь t — время; h_0 — постоянная; $F = \pi a^2 \rho_{\text{ж}}(g + d^2H/dt^2 + f_1\, d^2h/dt^2 + f_2 a^{-1}(dh/dt)^2\,)$ — найденная в [1] сила, действующая вдоль оси $\hat{x}$ на единицу длины цилиндра со стороны жидкости $\Big(f_1 = -4\,\mathrm{sh}^2\eta_0 \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m;\ f_2 = 2\,\mathrm{sh}\,\eta_0 \sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m + 4\,\mathrm{sh}\,\eta_0(\mathrm{ch}^2\eta_0 + 1) \sum\limits_{m=1}^{\infty} c_m - \dfrac{\mathrm{ch}\,\eta_0}{\mathrm{sh}^2\eta_0};$ $a_m = m\,\mathrm{e}^{-2m\eta_0}\mathrm{cth}\,m\eta_0;\ b_m = m\,\mathrm{e}^{-2m\eta_0}\mathrm{cth}\,m\eta_0[m\,\mathrm{cth}\,m\eta_0 + (m+1)\,\mathrm{e}^{-\eta_0}\mathrm{ch}\,\eta_0\,\mathrm{cth}\,(m+1)\eta_0];$ $c_m = m\,\mathrm{e}^{-2m\eta_0}(m - \mathrm{cth}\,\eta_0)\,\mathrm{cth}\,m\eta_0;\ \eta_0 = \ln\dfrac{h + \sqrt{h^2 - a^2}}{a}\Big).$

2. Пусть

$$H = A_0\Big(1 - \cos\frac{2\pi t}{T}\Big), \tag{3}$$

где A_0 ($A_0 > 0$), T ($T > 0$) — постоянные.

Согласно (1)–(3) имеем

$$A\,\frac{d^2 s}{d\tau^2} + B\Big(\frac{ds}{d\tau}\Big)^2 + C = 0; \tag{4}$$

$$s = 1, \qquad \frac{ds}{d\tau} = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0, \tag{5}$$

где $\tau = t/T$; $s = h/h_0$; $A = f_1 - \rho$; $B = f_2/\varepsilon$; $C = \varepsilon(1-\rho)(\beta + 4\pi^2\alpha\cos 2\pi\tau)$ ($\alpha = A_0/a$; $\beta = gT^2/a$; $\varepsilon = a/h_0$; $\rho = \rho_{\text{ц}}/\rho_{\text{ж}}$).

Задача (4), (5) сводится к задаче

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{d\tau} = \boldsymbol{F}; \tag{6}$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_0 \quad \text{при} \quad \tau = 0, \tag{7}$$

где $\quad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} s \\ q \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{Q}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} q \\ f \end{pmatrix} \quad \Big(q = \dfrac{ds}{d\tau}, \quad f = -\dfrac{1}{A}\,(Bq^2 + C)\Big).$

3. Для численного решения задачи (6), (7) был применен явный трехстадийный метод Рунге — Кутты с четвертым порядком аппроксимации на шаге [5]. Значения f вычислялись по K первым членам рядов, входящих в выражения для f_1 и f_2, были использованы оценки остатков этих рядов, полученные в [1]. При расчете движения цилиндра параметры имели следующие значения: $\alpha = 1$; $\beta = 1{,}09$; $1{,}16$; $1{,}25$; $1{,}34$; $1{,}45$; $1{,}57$; $\rho = 0{,}5$; $K = 60$; $d = 0{,}001$.

Для различных значений β были найдены интервалы, в которых находятся значения ε, при которых цилиндр в среднем покоится, колеблется относительно положения $\langle s\rangle = \int\limits_0^1 s\,d\tau$, пребывает в состоянии парадоксального равновесия (см. таблицу).

β	ε_-	ε_+	$\langle s\rangle$
1,09	0,920 286 94	0,920 286 95	1,2389
1,16	0,933 977 24	0,933 977 25	1,2398
1,25	0,949 494 07	0,949 494 08	1,2405
1,34	0,962 856 45	0,962 856 46	1,2408
1,45	0,976 504 49	0,976 504 50	1,2405
1,57	0,988 258 21	0,988 258 22	1,2397

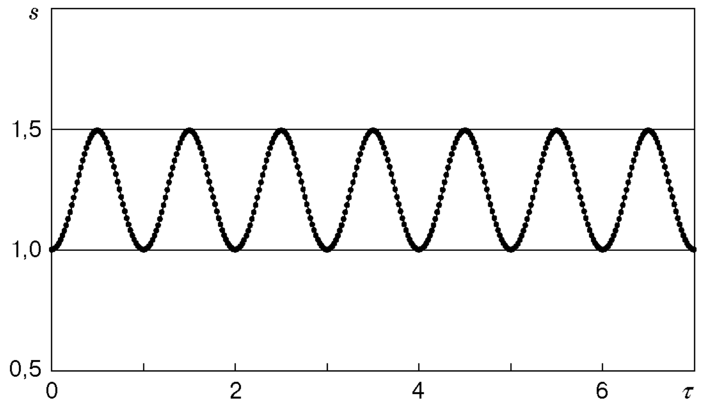

Рис. 2

На рис. 2 изображен график зависимости s от τ при $\beta = 1{,}57$, $\varepsilon = 0{,}988\,258\,21$.

4. Проведенные расчеты позволяют, в частности, сделать вывод о том, что эффект парадоксального поведения кругового цилиндра в колеблющейся жидкости, установленный в [1] при малых по сравнению с единицей значениях отношения радиуса цилиндра к расстоянию между его осью и поверхностью стенки, имеет место и при немалых по сравнению с единицей значениях этого отношения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сенницкий В. Л.** О движении кругового цилиндра в вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1985. № 5. С. 19–23.
2. **Луговцов Б. А., Сенницкий В. Л.** О движении тела в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 314–317.
3. **Сенницкий В. Л.** Движение шара в жидкости в присутствии стенки при колебательных воздействиях // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 125–132.
4. **Сенницкий В. Л.** Движение включений в колеблющейся жидкости // Сиб. физ. журн. 1995. № 4. С. 18–26.
5. **Березин И. С., Жидков Н. П.** Методы вычислений. М.: Физматгиз, 1962. Т. 2.

Поступила в редакцию 29/V 2000 г.,
в окончательном варианте — 5/X 2000 г.