ПМТФ, № 6, 1968

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ФОРМИРОВАНИИ ИНТЕНСИВНОГО ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ОКРЕСТНОСТИ КРИВОЛИНЕЙНОГО ЭМИТТЕРА

В. А. Сыровой

(Москва)

Для регулярных пучков (отсутствие нормальной компоненты магнитного поля на эмиттере) в осесимметричном случае проведено локальное исследование области течения и области, свободной от зарядов. Рассмотрение ведется в рамках гидродинамической теории. Выписано уравнение границы пучка и определены потенциал и его нормальная производная на ней. Получено решение уравнения Лапласа в окрестности эмиттирующей поверхности и приведено уравнение формирующего электрода с нулевым потенциалом. Исследованы случаи эмиссии, ограниченной пространственным зарядом (ρ-режим), температурой (T-режим) и ненулевой начальной скорости.

Предполагается, что эмиттирующая поверхность и условия Коши на ней определены аналитическими функциями.

Аналогичная задача при эмиссии в ρ-режиме и при нулевом магнитном поле решена в [1]. Ниже будут использованы результаты работ [2-4]. Заметим, что построению решения уравнений пучка в окрестности криволинейного эмиттера посвящена также работа [5].

1. Пусть $x^1 = x^1(z, R)$, $x^2 = x^2(z, R)$ — ортогональная система координат в меридиональной плоскости z, R с метрическим тензором g_{ik}, а $x^1 = x_0{}^1$ задает эмиттирующую поверхность. Будем считать, что все физические и геометрические параметры, определяющие характер течения, не зависят от азимутальной координаты $x^3 = \psi$. Результатом этого предположения являются два следствия. Во-первых, уравнения Максвелла дают для азимутальной компоненты магнитного поля

$$H_{x^3} = n = H_0 R^{-1} = H_0 \sqrt{g^{33}}, \qquad H_0 = \mathrm{const} \tag{1.1}$$

и приводят к следующим соотношениям при $x^1 = x_0{}^1$:

$$n_S' = \varkappa_2 n, \quad n_P' = k_2 n, \quad n_S'' = (2\varkappa_2{}^2 + k_1 k_2)\, n, \quad m_S' = \varkappa_1 m, \quad m = H_{x^2} \tag{1.2}$$

Здесь и далее $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, k_1 и k_2 — главные кривизны поверхностей $x^1 = \mathrm{const}$, $x^2 = \mathrm{const}$, вычисленные при $x^1 = x_0{}^1$; $T = \varkappa_1 + \varkappa_2$ — полная кривизна эмиттирующей поверхности; S, P — длины дуг криволинейных осей x^1, x^2; штрих означает дифференцирование, а нижний индекс указывает на переменную, по которой оно производится. В (1.2) использованы условия эвклидовости пространства, приведенные в [1].

Во-вторых, уравнения движения допускают интеграл

$$v_3 = \int_{x_0{}^1}^{x^1} \sqrt{g}\, H^2\, dx^1 = \int_{x_0{}^1}^{x^1} \sqrt{g_{11}}\, m\, dx^1$$

Траектории частиц будут пространственными кривыми, однако граница пучка является поверхностью вращения, определяемой из уравнения

$$\frac{g_{22}}{g_{11}} \frac{dx^2}{dx^1} = \frac{v_2}{v_1} \tag{1.3}$$

Пусть область течения и лапласовская область разделяются поверхностью, образующая которой пересекает эмиттер в точке $O\,(x_0^1,\ x_0^2)$. Будем называть ее точкой старта; z_0, R_0 — ее координаты в системе z, R. Введем в плоскости z, R локальные декартовы координаты X, Y, связанные с эмиттирующей поверхностью, причем X направлена по нормали, а Y — по касательной к ней в точке старта (ϑ — угол между нормалью к эмиттеру в точке O и осью вращения z)

$$X = (z - z_0)\cos\vartheta + (R - R_0)\sin\vartheta,\quad Y = -(z - z_0)\sin\vartheta + (R - R_0)\cos\vartheta$$

Для дальнейшего необходимо располагать разложениями функций $x^1 - x_0^1$, $x^2 - x_0^2$ по X, Y. Можно показать, что

$$\begin{aligned}
s_0 = {} & [a_0(x_0^2)]^{1/2}(x^1 - x_0^1) = X + k_1XY - \frac{1}{4}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}X^2 - \frac{1}{2}\varkappa_1Y^2 + \\
& + \left[\frac{1}{6}\left(\frac{a_1^2}{a_0^3} - \frac{a_2}{a_0^2}\right) - \frac{1}{3}k_1^2\right]X^3 + \frac{1}{2}\left(k_{1S}' + \varkappa_1k_1 - \frac{a_1}{a_0^{3/2}}k_1\right)X^2Y + \\
& + \left(-\frac{1}{2}\varkappa_{1S}' + k_1^2 + \frac{1}{4}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}\varkappa_1\right)XY^2 - \left(\frac{1}{6}\varkappa_{1P}' + \frac{1}{2}\varkappa_1k_1\right)Y^3 + \\
& + \left(-\frac{1}{8}\frac{a_3}{a_0^{5/2}} + \frac{13}{48}\frac{a_1a_2}{a_0^{7/2}} - \frac{7}{48}\frac{a_1^3}{a_0^{9/2}} - \frac{7}{24}k_1k_{1S}' - \frac{1}{8}\varkappa_1k_1^2 + \frac{1}{6}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}k_1^2\right)X^4 + \\
& + \left[\frac{1}{6}k_{1S}'' + \frac{1}{2}k_1\varkappa_{1S}' + \frac{1}{6}\varkappa_1k_{1S}' - k_1^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{a_0^2} - \frac{a_1^2}{a_0^3}\right)k_1 - \right. \\
& \left. - \frac{1}{4}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}(k_{1S}' + \varkappa_1k_1)\right]X^3Y + \ldots
\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}
p_0 = {} & [b_0(x_0^2)]^{1/2}(x^2 - x_0^2) = Y + \varkappa_1XY - \frac{1}{4}\frac{b_{02}'}{b_0^{3/2}}Y^2 - \frac{1}{2}k_1X^2 + \\
& + \left(-\frac{1}{2}k_{1P}' + \varkappa_1^2 + \frac{1}{4}\frac{b_{02}'}{b_0^{3/2}}k_1\right)X^2Y - \left(\frac{1}{6}k_{1S}' + \frac{1}{2}\varkappa_1k_1\right)X^3 + \\
& + \left(-\frac{1}{24}k_{1S}'' - \frac{1}{6}\varkappa_1k_{1S}' + \frac{1}{4}k_1k_{1P}' - \frac{1}{8}k_1^3 - \frac{1}{2}\varkappa_1^2k_1 - \frac{1}{16}\frac{b_{02}'}{b_0^{3/2}}k_1^2\right)X^4 + \ldots
\end{aligned}$$

Здесь $a_k(x^2)$, $b_k\,(x^2)$ — коэффициенты разложения элементов метрического тензора по $x^1 - x_0^1$. Все величины в (1.4) вычисляются в точке старта.

Уравнение границы пучка в параметрической форме

$$X = X_e\,(u),\quad Y = Y_e\,(u)$$

позволяет построить функцию, осуществляющую отображение действительной оси в плоскости $w = u + iv$ на границу пучка в плоскости $Z = X + iY$

$$Z = X_e\,(w) + iY_e\,(w) \tag{1.5}$$

Запишем также параметрические уравнения границы в координатах z, R и введем некоторые дополнительные символы

$$\begin{aligned}
z &= z_e\,(u) = z_0 + X_e\,(u)\cos\vartheta - Y_e\,(u)\sin\vartheta,\quad \beta\,(u) = dz_e/du \\
R &= R_e\,(u) = R_0 + X_e\,(u)\sin\vartheta + Y_e\,(u)\cos\vartheta,\quad \alpha\,(u) = dR_e/du
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Решение уравнения Лапласа в осесимметричном случае будет [6]

$$\begin{aligned}
2\varphi\,(u,\,v) = {} & \mathrm{Re}\left\{\left[\frac{R_e\,(w)}{R}\right]^{1/2} V\,(w) + \frac{2}{\pi}\int_0^v \Big[2R_e\boldsymbol{K}(\sigma)\,F - \right. \\
& - 2R_e\,[\boldsymbol{K}\,(\sigma) - \boldsymbol{E}\,(\sigma)]\,V\,\frac{\alpha\,(z_e - z) - \beta\,(R_e - R)}{(R_e - R)^2 + (z_e - z)^2} + \beta\boldsymbol{E}\,(\sigma)\,V\Big] \times \\
& \left. \times \frac{d\xi}{[(R_e + R)^2 + (z_e - z)^2]^{1/2}}\right\}, \qquad \sigma = \left[\frac{(R_e - R)^2 + (z_e - z)^2}{(R_e + R)^2 + (z_e - z)^2}\right]^{1/2}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Здесь $\mathbf{K}(\sigma)$, $\mathbf{E}(\sigma)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода; R_e, z_e, V, F, α и β — функции от $\zeta = u + i\xi$; V, F определяют потенциал и его нормальную производную на поверхности, ограничивающей область течения

$$z = z_0 + [\operatorname{Re} X_e(w) - \operatorname{Im} Y_e(w)] \cos\vartheta - [\operatorname{Im} X_e(w) + \operatorname{Re} Y_e(w)] \sin\vartheta$$

$$R = R_0 + [\operatorname{Im} X_e(w) + \operatorname{Re} Y_e(w)] \cos\vartheta + [\operatorname{Re} X_e(w) - \operatorname{Im} Y_e(w)] \sin\vartheta$$

Целью последующего будет выявление вида выражений (1.5), (1.6) при различных условиях эмиссии и использование формулы (1.7) для того случая, когда точка, в которой вычисляется потенциал, близка к границе пучка и к точке старта.

При получении функций V и F используются условия эвклидовости пространства, причем F вычисляется при помощи соотношения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{\partial\varphi}{\partial s_0}\left(\frac{\partial s_0}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial s_0}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial v}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial p_0}\left(\frac{\partial p_0}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial p_0}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial v}\right)$$

Ход рассуждений остается тем же, что и в [1], поэтому ограничимся краткой сводкой результатов.

2. При эмиссии в ρ-режиме решение уравнения (1.3) имеет вид

$$p_0 = \tau_1 s_0^{4/3} + \tau_2 s_0^2 + \tau_3 s_0^{7/3} + \tau_4 s_0^{8/3} + \tau_5 s_0^3, \qquad \tau_k = \mathrm{const}$$

Пользуясь соотношениями (1.4), получаем

$$Y = aX^{4/3} + bX^2 + cX^{7/3} + dX^{8/3} + eX^3$$

$$a = -\frac{3}{4}\left(\frac{2}{9J}\right)^{1/3} n, \quad b = \frac{1}{10}\frac{J_P'}{J} - \frac{1}{20}\frac{nh^2}{J}, \quad c = \frac{1}{10}\left(\frac{2}{9J}\right)^{1/3}\left(\frac{31}{14}\varkappa_1 - \varkappa_2\right) n$$

$$d = \left(\frac{2}{9J}\right)^{2/3}\left[\frac{153}{1120} k_2 n^2 - \frac{81}{160} m m_P' + \left(\frac{249}{5600} n^2 + \frac{81}{1400} m^2\right)\frac{J_P'}{J} - \frac{27}{1120}\frac{nh^4}{J}\right]$$

$$e = \frac{1}{30} T_P' + \frac{1}{150}(4\varkappa_1 - \varkappa_2)\frac{J_P'}{J} + \left(\frac{461}{8400}\varkappa_1 - \frac{17}{700}\varkappa_2\right)\frac{n^3}{J} +$$

$$+ \left(-\frac{91}{2100}\varkappa_1 + \frac{2}{175}\varkappa_2\right)\frac{nm^2}{J}, \qquad h^2 = m^2 + n^2 \tag{2.1}$$

Здесь $J = J(x^2)$ — плотность тока эмиссии.

Потенциал на границе пучка, определяемой параметрическими уравнениями

$$X_e = u, \qquad Y_e = au^{4/3} + bu^2 + cu^{7/3} + du^{8/3} + eu^3$$

задается выражением

$$2\varphi = V(u) = Au^{4/3} + Bu^2 + Cu^{7/3} + Du^{8/3} + Eu^3 + Gu^{10/3}$$

$$A = \left(\frac{9J}{2}\right)^{2/3}, \qquad B = \frac{1}{10} h^2, \qquad C = \frac{8}{15}\left(\frac{9J}{2}\right)^{2/3} T$$

$$D = \left(\frac{9J}{2}\right)^{1/3}\left(\frac{9}{1400}\frac{h^4}{J} - \frac{33}{70} n \frac{J_P'}{J}\right), \quad E = \left(-\frac{421}{1400}\varkappa_1 + \frac{13}{175}\varkappa_2\right) n^2 + \frac{13}{175} T m^2$$

$$G = \left(\frac{9J}{2}\right)^{2/3}\left[\frac{83}{225}(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2) + \frac{157}{450}\varkappa_1\varkappa_2 + \frac{4}{45} k_2 \frac{J_P'}{J} - \frac{4}{45}\frac{J_P''}{J} + \right.$$

$$\left. + \frac{43}{450}\frac{J_P'^2}{J^2} - \frac{29}{1260}(k_2 n^2 + m m_P')\frac{n}{J} - \frac{11}{315} nh^2 \frac{J_P'}{J} + \frac{1}{1750}\frac{h^6}{J^2}\right] \tag{2.2}$$

Отображение $w \to Z$ и приближенное обратное отображение $Z \to w$ определяются формулами

$$Z = X + iY = w + i(aw^{4/3} + bw^2 + cw^{7/3} + dw^{8/3} + ew^3) \qquad (2.3)$$

$$w = u + iv = Z - iaZ^{4/3} - {}^4/_3\, a^2 Z^{5/3} + i(2a^3 - b)Z^2 + ({}^{260}/_{81}\, a^4 - {}^{10}/_3\, ab - ic)\, Z^{7/3} +$$
$$+ [{}^{11}/_3\, ac + i\,(-\, {}^{1309}/_{243}\, a^5 + {}^{77}/_9\, a^2 b - d)]\, Z^{8/3} + [\,-\, {}^{28}/_3\, a^6 + 20a^2 b - 4ad -$$
$$- 2b^2 + i({}^2/_9\, a^2 c - e)]\, Z^3$$

Нормальная производная потенциала на границе

$$2\partial\varphi / \partial v \,|_{v=0} = F(u) = Hu^{2/3} + Ku^{4/3} + Lu^{5/3} + Mu^2 + Nu^{7/3}$$

$$H = \frac{4}{3}\left(\frac{9J}{2}\right)^{1/3} n, \quad K = \left(\frac{9J}{2}\right)^{2/3}\left(\frac{2}{5}\frac{J_P'}{J} + \frac{8}{45}\frac{nh^2}{J}\right), \quad L = \frac{14}{9}\left(\frac{9J}{2}\right)^{1/3} Tn \qquad (2.4)$$

$$M = -\frac{2}{7} k_2 n^2 + 2mm_P' - \left(\frac{138}{175} n^2 + \frac{43}{175} m^2\right)\frac{J_P'}{J} + \frac{43}{350}\frac{nh^4}{J}$$

$$N = \left(\frac{9J}{2}\right)^{2/3}\left[\frac{2}{5} T_P' + \frac{2}{15}(4\varkappa_1 + \varkappa_2)\frac{J_P'}{J} + \left(\frac{1}{270}\varkappa_1 + \frac{38}{135}\varkappa_2\right)\frac{n^3}{J} +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{401}{945}\varkappa_1 + \frac{131}{945}\varkappa_2\right)\frac{nm^2}{J}\right]$$

Информация, содержащаяся в формулах (2.1) — (2.4), достаточна для вычисления коэффициентов в уравнении нулевой эквипотенциали вплоть до X^3. Для этого, однако, необходимо располагать производными от $\exp\,(i\, {}^4/_3 \operatorname{arc\,tg} v/u)$ и $(u^2 + v^2)^{2/3}$, рассматриваемых как функции от $\xi = u^{1/3}$, вплоть до шестого порядка включительно. Ограничимся поэтому квадратичными членами. С этой точностью решение уравнения Лапласа задается выражением

$$2\varphi(u, v) = A(u^2 + v^2)^{2/3} \cos\frac{4}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u} + \frac{3}{5} H(u^2 + v^2)^{5/6} \sin\frac{5}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u} +$$
$$+ B(u^2 - v^2) + C(u^2 + v^2)^{7/6} \cos\frac{7}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u} - \frac{1}{2}\frac{Av}{R_0}(u^2 + v^2)^{2/3} \times \qquad (2.5)$$
$$\times \cos\left(\vartheta - \frac{4}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}\right) + \frac{3}{7}\left(K + \frac{1}{2}\frac{A\cos\vartheta}{R_0}\right)(u^2 + v^2)^{7/6} \sin\frac{7}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}$$

Явное уравнение нулевой эквипотенциали в плоскости w имеет вид

$$v = \alpha u + \beta u^{4/3} + \gamma u^{5/3} + \delta u^2 \qquad (2.6)$$

Пользуясь формулами (2.3), переписываем (2.6) в локальных декартовых координатах

$$Y = \alpha X + \mu X^{4/3} + \nu X^{5/3} + \lambda X^2$$

$$\alpha = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}, \quad \mu = -\frac{3}{20}\left(\frac{2}{9J}\right)^{1/3}\alpha(1 + \alpha^2)^{2/3} n$$

$$\nu = \left(\frac{2}{9J}\right)^{2/3}(1 + \alpha^2)^{1/3}\left[\left(\frac{3}{40} + \frac{3}{4}\alpha + \frac{9}{8}\alpha^2 - \frac{57}{100}\alpha^3\right)n^2 + \frac{3}{40}(1 - \alpha^2)\, m^2\right] \qquad (2.7)$$

$$\lambda = \left(\frac{73}{420} + \frac{43}{120}\alpha - \frac{351}{2800}\alpha^2 - \frac{4397}{18000}\alpha^3 + \frac{469}{1200}\alpha^4 - \frac{593}{1200}\alpha^5\right)\frac{n^3}{J} +$$
$$+ \left(\frac{23}{1680} + \frac{43}{2100}\alpha^2 + \frac{19}{400}\alpha^4\right)\frac{nm^2}{J} - \alpha(1 + \alpha^2)\left(\frac{2}{15} T + \frac{3}{8}\frac{\sin\vartheta}{R_0}\right) +$$
$$+ (1 + \alpha^2)\left(\frac{8}{35}\frac{J_P'}{J} + \frac{9}{56}\frac{\cos\vartheta}{R_0}\right)$$

3. При эмиссии в T-режиме для границы пучка в s_0, p_0-представлении имеем

$$p_0 = \tau_1 s_0^{3/2} + \tau_2 s_0^2 + \tau_3 s_0^{5/2} + \tau_4 s_0^3 \qquad (3.1)$$

В координатах X, Y это уравнение перепишется так:

$$Y = aX^{3/2} + bX^2 + cX^{5/2} + dX^3$$

$$a = -\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{n}{\varepsilon^{1/2}}, \qquad b = \frac{1}{6}\left(\frac{\varepsilon_P'}{\varepsilon} + \frac{nJ}{\varepsilon^2}\right)$$

$$c = \frac{\sqrt{2}}{5}\varepsilon^{-1/2}\left[\frac{1}{3}\frac{J_P'}{\varepsilon} - \frac{5}{9}\frac{J\varepsilon_P'}{\varepsilon^2} + \left(\frac{5}{12}\varkappa_1 - \frac{1}{4}\varkappa_2 - \frac{5}{12}\frac{J^2}{\varepsilon^3} - \frac{1}{4}\frac{h^2}{\varepsilon}\right)n\right]$$

$$d = \frac{1}{30}T_P' + \frac{1}{90}(4\varkappa_1 - \varkappa_2)\frac{\varepsilon_P'}{\varepsilon} - \frac{4}{45}\frac{JJ_P'}{\varepsilon^4} + \frac{4}{27}\frac{J^2\varepsilon_P'}{\varepsilon^4} + \left(-\frac{1}{45}\varkappa_1 + \frac{1}{30}\varkappa_2 + \right.$$
$$\left. + \frac{8}{81}\frac{J^2}{\varepsilon^3} + \frac{4}{45}\frac{h^2}{\varepsilon}\right)\frac{nJ}{\varepsilon^2} + \frac{2}{45}k_2\frac{n^2}{\varepsilon} - \frac{1}{15}\frac{mm_P'}{\varepsilon} + \frac{2}{45}\frac{h^2\varepsilon_P'}{\varepsilon^2}$$

Здесь $\varepsilon = \varepsilon(x^2)$ — электрическое поле на эмиттере. Заметим, что без магнитного поля и при однородных условиях эмиссии траектория вблизи эмиттера будет кубической параболой с тем же коэффициентом ($^1/_{30}\ T_P'$), что и при эмиссии в ρ-режиме. Кривизна траектории $\varkappa_t$ в электростатическом случае определяется только полем при $x^1 = x_0^1$

$$\varkappa_t = {}^1/_3\ (\ln\ \varepsilon)_P'$$

Функции, осуществляющие отображения $w \to Z$ и $Z \to w$, имеют вид

$$Z = w + i(aw^{3/2} + bw^2 + cw^{5/2} + dw^3) \qquad (3.2)$$

$$w = Z - iaZ^{3/2} - ({}^3/_2\ a^2 + ib)Z^2 + [-{}^7/_2\ ab + i\,({}^{21}/_8\ a^3 - c)]\ Z^{5/2} + [{}^{81}/_{16}\ a^4 -$$
$$- 4\ ac - 2\ b^2 + i(9\ a^2b - d)]\ Z^3$$

Для функций $V(u)$ и $F(u)$ получаем

$$V(u) = Au + Bu^{3/2} + Cu^2 + Du^{5/2} + Eu^3$$

$$A = 2\varepsilon, \qquad B = \frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{J}{\varepsilon^{1/2}}, \qquad C = \varepsilon T - \frac{1}{3}\frac{J^2}{\varepsilon^2}$$

$$D = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{J}{\varepsilon^{1/2}}\left(\frac{11}{10}T + \frac{1}{6}\frac{J^2}{\varepsilon^3} - \frac{n\varepsilon_P'}{J} + \frac{1}{10}\frac{h^2}{\varepsilon}\right)$$

$$E = \varepsilon\left[\frac{1}{3}(2\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + 2\varkappa_1\varkappa_2) - \frac{1}{5}T\frac{J^2}{\varepsilon^3} + \frac{1}{3}\left(k_2\frac{\varepsilon_P'}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon_P''}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon_P'^2}{\varepsilon^2}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{8}{81}\frac{J^4}{\varepsilon^6} - \frac{2}{9}\varkappa_1\frac{n^2}{\varepsilon} - \frac{7}{9}\frac{nJ_P'}{\varepsilon^2} + \frac{2}{3}\frac{nJ\varepsilon_P'}{\varepsilon^3} - \frac{4}{45}\frac{h^2J^2}{\varepsilon^4}\right] \qquad (3.3)$$

$$F(u) = Gu^{1/2} + Ku + Lu^{3/2} + Mu^2$$

$$G = \sqrt{2\varepsilon}\ n, \quad K = \frac{4}{3}\left(\varepsilon_P' + \frac{nJ}{\varepsilon}\right)$$

$$L = \sqrt{2\varepsilon}\left[\frac{J_P'}{\varepsilon} - \frac{7}{9}\frac{J\varepsilon_P'}{\varepsilon^2} + \left(\frac{5}{4}T - \frac{7}{12}\frac{J^2}{\varepsilon^3} + \frac{1}{4}\frac{h^2}{\varepsilon}\right)n\right]$$

$$M = \frac{4}{5}\varepsilon T_P' + \left(\frac{26}{15}\varkappa_1 + \frac{3}{4}\varkappa_2\right)\varepsilon_P' - \frac{4}{5}\frac{JJ_P'}{\varepsilon^2} + \frac{10}{9}\frac{J^2\varepsilon_P'}{\varepsilon^3} + \frac{22}{15}T\frac{nJ}{\varepsilon} -$$
$$- \frac{4}{15}k_2n^2 + \frac{2}{5}mm_P' - \left(\frac{14}{15}n^2 + \frac{4}{15}m^2\right)\frac{\varepsilon_P'}{\varepsilon} + \left(\frac{20}{27}\frac{J^2}{\varepsilon^2} + \frac{2}{15}h^2\right)\frac{nJ}{\varepsilon^2}$$

С сохранением квадратичных членов формула (1.7) дает

$$2\varphi(u, v) = Au + (u^2 + v^2)^{3/4}\left(B\cos\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u} + \frac{2}{3}G\sin\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}\right) +$$

$$+ C(u^2 - v^2) + Kuv - \frac{1}{2}\frac{A\sin\vartheta}{R_0}v^2 \qquad (3.4)$$

Выражение (3.4) позволяет определить лишь два первых коэффициента в явном уравнении нулевой эквипотенциали

$$u = \alpha v^{3/2} + \beta v^2 + \gamma v^{5/2} + \delta v^3 \qquad (3.5)$$

Последующие коэффициенты можно вычислить, учитывая порядок малости отношения u / v, вытекающий из (3.5), непосредственно при оценке интегранда в (1.7). В результате, используя (3.2), имеем

$$X = \mu Y^{3/2} + \nu Y^2 + \lambda Y^{5/2} + \tau Y^3$$

$$\mu = \frac{2}{3}\frac{J}{\varepsilon^{3/2}}, \qquad \nu = \frac{1}{2}T - \frac{7}{6}\frac{J^2}{\varepsilon^3} - \frac{1}{3}\frac{n^2}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\frac{\sin\vartheta}{R_0}$$

$$\lambda = \varepsilon^{-1/2}\left[-\frac{2}{15}T\frac{J}{\varepsilon} + \frac{4}{15}\frac{J_P'}{\varepsilon} - \frac{23}{30}\frac{J\varepsilon_P'}{\varepsilon^2} + \frac{7}{9}\frac{J^3}{\varepsilon^4} - \frac{2}{15}\varkappa_2 n + \frac{16}{45}\frac{nJ^2}{\varepsilon^3} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{23}{90}n^2 + \frac{1}{30}m^2\right)\frac{J}{\varepsilon^2} - \frac{5}{36}\frac{n^3}{\varepsilon} - \left(\frac{1}{6}\frac{J}{\varepsilon} + \frac{2}{15}n\right)\frac{\sin\vartheta}{R_0} - \frac{1}{5}\frac{J}{\varepsilon}\frac{\cos\vartheta}{R_0}\right]$$

$$\tau = -\frac{1}{6}T_P' - \frac{79}{360}\varkappa_2\frac{\varepsilon_P'}{\varepsilon} + \frac{2}{9}T\frac{J^2}{\varepsilon^3} - \frac{3}{5}\frac{JJ_P'}{\varepsilon^3} + \frac{11}{9}\frac{J^2\varepsilon_P'}{\varepsilon^4} +$$

$$+ \frac{35}{81}\frac{J^4}{\varepsilon^6} + \left(-\frac{1}{18}\varkappa_1 + \frac{1}{90}\varkappa_2\right)\frac{n^2}{\varepsilon} +$$

$$+ \left(\frac{1}{9}\varkappa_1 + \frac{23}{90}\varkappa_2\right)\frac{nJ}{\varepsilon^2} - \frac{1}{30}\frac{nJ_P'}{\varepsilon^2} - \left(\frac{1}{36}\frac{nJ}{\varepsilon} + \frac{1}{54}n^2\right)\frac{\varepsilon_P'}{\varepsilon^2} -$$

$$- \frac{10}{9}\frac{nJ^3}{\varepsilon^5} + \left(\frac{1}{36}n^2 + \frac{1}{18}m^2\right)\frac{J^2}{\varepsilon^4} + \frac{1}{180}\frac{nm^2J}{\varepsilon^3} + \left(-\frac{89}{3240}n^2 + \frac{1}{40}m^2\right)\frac{n^2}{\varepsilon^2} +$$

$$+ \frac{113}{3240}\frac{n^3J}{\varepsilon^3} + \left(-\frac{1}{6}T + \frac{1}{6}\frac{J^2}{\varepsilon^3} - \frac{1}{3}\frac{nJ}{\varepsilon^2} + \frac{7}{18}\frac{n^2}{\varepsilon}\right)\frac{\cos\vartheta}{R_0} +$$

$$+ \left(-\frac{5}{18}\frac{\varepsilon_P'}{\varepsilon} + \frac{1}{6}\frac{J^2}{\varepsilon^3} + \frac{1}{4}\frac{nJ}{\varepsilon^2} + \frac{11}{72}\frac{n^2}{\varepsilon}\right)\frac{\sin\vartheta}{R_0} - \frac{1}{6}\frac{\sin 2\vartheta}{R_0^2} \qquad (3.6)$$

4. При ненулевой скорости старта $v_{x'} = u \neq 0$ граница пучка определяется уравнением

$$p_0 = \tau_1 s_0^2 + \tau_2 s_0^3 + \tau_3 s_0^4$$

или в X, Y-представлении

$$Y = aX^2 + bX^3 + cX^4$$

$$a = -\frac{1}{2}\frac{n}{u}, \qquad b = \frac{1}{6}\frac{\varepsilon_P'}{u^2} - \frac{1}{6}\varkappa_2\frac{n}{u} + \frac{1}{3}\frac{n\varepsilon}{u^3} \qquad (4.1)$$

$$c = \frac{1}{24}\frac{\varepsilon}{u^2}T_P' + \left(\frac{1}{8}\varkappa_1 + \frac{1}{24}\varkappa_2\right)\frac{\varepsilon_P'}{u^2} + \frac{1}{24}\frac{J_P'}{u^3} - \frac{5}{24}\frac{\varepsilon\varepsilon_P'}{u^4} - \frac{1}{12}\varkappa_2^2\frac{n}{u} +$$

$$+ \left(\frac{1}{6}\varkappa_1 + \frac{1}{4}\varkappa_2\right)\frac{n\varepsilon}{u^3} + \frac{1}{24}\varkappa_2\frac{n^2}{u^2} - \frac{1}{12}\frac{mm_P'}{u^2} + \left(\frac{1}{8}\frac{J}{u} - \frac{3}{8}\frac{\varepsilon^2}{u^2} - \frac{1}{8}\varkappa_2^2\right)\frac{n}{u^3}$$

Отображения $w \to Z$ и $Z \to w$ определяются формулами

$$Z = w + i(aw^2 + bw^3 + cw^4)$$

$$w = Z - ia Z^2 - (2a^2 + ib) Z^3 + [-5ab + i(5a^3 - c)] Z^4 \qquad (4.2)$$

Для потенциала и его нормальной производной на границе пучка получаем

$$V(u) = Au + Bu^2 + Cu^3 + Du^4, \qquad A = 2\varepsilon, \; B = \varepsilon T + J / u$$

$$C = \frac{2}{3}\varepsilon(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_1\varkappa_2) + \left(\frac{2}{3}T - \frac{1}{3}\frac{\varepsilon}{u^2}\right)\frac{J}{u} + \frac{1}{3}k_2\varepsilon_P' - \frac{1}{3}\varepsilon_P'' - \frac{n\varepsilon_P'}{u} \tag{4.3}$$

$$D = -\frac{1}{12}\varepsilon T_P'' + \frac{1}{12}\varepsilon k_2 T_P' + \left(-\frac{1}{3}\varkappa_{1P}' + \frac{1}{2}\varkappa_1 k_2 + \frac{1}{6}\varkappa_2 k_2\right)\varepsilon_P' +$$
$$+ \frac{1}{2}\varepsilon(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2)T + \frac{1}{2}(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_1\varkappa_2)\frac{J}{u} - \left(\frac{1}{2}\varkappa_1 + \frac{1}{6}\varkappa_2\right)\varepsilon_P'' +$$
$$+ \frac{1}{12}k_2\frac{J_P'}{u} - \frac{1}{3}T\frac{J\varepsilon}{u^3} - \frac{1}{12}\frac{J_P''}{u} + \frac{1}{3}\frac{\varepsilon_P'^2}{u^2} - \frac{1}{12}\frac{J^2}{u^4} + \frac{1}{4}\frac{J\varepsilon^2}{u^5} -$$
$$-\left(\frac{3}{2}\varkappa_1 + \frac{5}{6}\varkappa_2\right)\frac{n\varepsilon_P'}{u} - \frac{5}{12}\frac{nJ_P'}{u^2} - \frac{1}{4}\varkappa_1\frac{n^2\varepsilon}{u^2} + \frac{2}{3}\frac{n\varepsilon\varepsilon_P'}{u^3} + \frac{1}{12}\frac{h^2 J}{u^3} - \frac{1}{2}T_P'\frac{n\varepsilon}{u}$$

$$F(u) = Eu + Ku^2 + Lu^3, \qquad E = 2(\varepsilon P' + n\varepsilon / u)$$

$$K = \varepsilon T_{P'} + (3\varkappa_1 + \varkappa_2)\varepsilon_P' + \frac{J_P'}{u} - \frac{\varepsilon\varepsilon_P'}{u^2} + \left(3\varepsilon T + 2\frac{J}{u} - 2\frac{\varepsilon^2}{u^2}\right)\frac{n}{u}$$

$$L = \varepsilon\left(\frac{7}{3}\varkappa_1 + \frac{2}{3}\varkappa_2\right)\varkappa_{1P}' + \varepsilon\left(\frac{5}{3}\varkappa_1 + \frac{4}{3}\varkappa_2\right)\varkappa_{2P}' + \left(\frac{2}{3}\frac{J}{u} - \frac{1}{3}\frac{\varepsilon^2}{u^2}\right)T_P' +$$
$$+ \left(\frac{1}{3}k_{2P}' + \frac{11}{3}\varkappa_1^2 + \frac{2}{3}\varkappa_2^2 + \frac{5}{3}\varkappa_1\varkappa_2\right)\varepsilon_P' + \frac{1}{3}k_2\varepsilon_P'' + \left(\frac{5}{3}\varkappa_1 + \frac{2}{3}\varkappa_2\right)\frac{J_P'}{u} -$$
$$-\left(\frac{7}{3}\varkappa_1 + \frac{4}{3}\varkappa_2\right)\frac{\varepsilon\varepsilon_P'}{u^2} - \frac{1}{3}\varepsilon_P''' - \frac{2}{3}\frac{\varepsilon J_P'}{u^3} - \frac{4}{3}\frac{J\varepsilon_P'}{u^3} + \frac{5}{3}\frac{\varepsilon^2\varepsilon_P'}{u^4} +$$
$$+ \left(4\varkappa_1^2 + \frac{11}{3}\varkappa_2^2 + \frac{13}{3}\varkappa_1\varkappa_2\right)\frac{n\varepsilon}{u} + \frac{n}{u}\left(3\frac{J}{u} - 4\frac{\varepsilon^2}{u^2}\right)T + \frac{n}{u}\left(\varepsilon_P' - \frac{1}{3}\frac{n\varepsilon}{u}\right)k_2 +$$
$$+ \frac{2}{3}\varepsilon\frac{mm_P'}{u^2} - 2\frac{n\varepsilon_P''}{u} - \frac{n^2\varepsilon_P'}{u^2} + \left(-4\frac{J}{u} + 3\frac{\varepsilon^2}{u^2} + h^2\right)\frac{n\varepsilon}{u^3}$$

Для потенциала в лапласовской области имеем

$$2\varphi(u, v) = Au + Bu^2 + Cu^3 + Du^4 + (Eu + Ku^2 + Lu^3)v -$$
$$-\left(B + \frac{1}{2}\frac{A\sin\vartheta}{R_0}\right)v^2 + \left(-3C - \frac{aA\cos\vartheta}{R_0} - \frac{B\sin\vartheta}{R_0} - \frac{1}{2}\frac{E\cos\vartheta}{R_0} + \frac{1}{2}\frac{A\sin^2\vartheta}{R_0^2}\right)uv^2 +$$
$$+ \left(-\frac{1}{3}K + \frac{1}{3}\frac{aA\sin\vartheta}{R_0} + \frac{1}{3}\frac{B\cos\vartheta}{R_0} - \frac{1}{6}\frac{E\sin\vartheta}{R_0} + \frac{1}{6}\frac{A\sin 2\vartheta}{R_0^2}\right)v^3 +$$
$$+ \left(-6D - \frac{3}{2}\frac{bA\cos\vartheta}{R_0} - 2\frac{aB\cos\vartheta}{R_0} - \frac{3}{2}\frac{C\sin\vartheta}{R_0} + \frac{aE\sin\vartheta}{R_0} - \frac{1}{2}\frac{K\cos\vartheta}{R_0} +\right.$$
$$\left. + \frac{3}{4}\frac{aA\sin 2\vartheta}{R_0^2} + \frac{B\sin^2\vartheta}{R_0^2} + \frac{1}{4}\frac{E\sin 2\vartheta}{R_0^2} - \frac{1}{2}\frac{A\sin^3\vartheta}{R_0^3}\right)u^2v^2 +$$
$$+ \left(D + \frac{1}{2}\frac{bA\cos\vartheta}{R_0} + \frac{1}{2}\frac{C\sin\vartheta}{R_0} + \frac{1}{6}\frac{K\cos\vartheta}{R_0} - \frac{1}{3}\frac{aA\sin 2\vartheta}{R_0^2} - \frac{1}{12}\frac{B\sin^2\vartheta}{R_0^2} -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}\frac{B\cos^2\vartheta}{R_0^2} + \frac{1}{24}\frac{E\sin 2\vartheta}{R_0^2} + \frac{1}{24}\frac{A\sin^3\vartheta}{R_0^3} - \frac{1}{8}\frac{A\cos\vartheta\sin 2\vartheta}{R_0^3}\right)v^4 +$$
$$+ \left(-L + \frac{bA\sin\vartheta}{R_0} + \frac{C\cos\vartheta}{R_0} - \frac{1}{3}\frac{K\sin\vartheta}{R_0} - \frac{aA\sin^2\vartheta}{R_0^2} + \frac{2}{3}\frac{aA\cos^2\vartheta}{R_0^2} +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{6}\frac{B\sin 2\vartheta}{R_0^2} + \frac{1}{6}\frac{E\sin^2\vartheta}{R_0^2} + \frac{1}{3}\frac{E\cos^2\vartheta}{R_0^2} - \frac{1}{3}\frac{A\sin\vartheta\sin 2\vartheta}{R_0^3}\right)uv^3 \tag{4.4}$$

4.1. Случай ненулевого электрического поля $\varepsilon \neq 0$. В плоскости w, ограничиваясь двумя первыми членами разложения, для нулевой эквипотенциали имеем

$$u = \alpha v^2 + \beta v^3 \tag{4.5}$$

Используя (4.2), осуществляем переход к переменным X, Y

$$X = \mu Y^2 + \nu Y^3, \qquad \mu = \frac{1}{2}\left(T + \frac{J}{\varepsilon u} + \frac{\sin\vartheta}{R_0}\right) \tag{4.6}$$

$$\nu = \frac{1}{6} T_p' - \frac{1}{3}\varkappa_2 \frac{\varepsilon_p'}{\varepsilon} + \frac{1}{6}\frac{J_p'}{\varepsilon u} - \frac{1}{2}\frac{J}{u}\frac{\varepsilon_p'}{\varepsilon^2} - \frac{1}{6}\left(\varkappa_2 + \frac{J}{\varepsilon u}\right)\frac{n}{u} -$$

$$- \frac{1}{6}\left(T + \frac{J}{\varepsilon u}\right)\frac{\cos\vartheta}{R_0} - \frac{1}{6}\left(2\frac{\varepsilon_p'}{\varepsilon} + \frac{n}{u}\right)\frac{\sin\vartheta}{R_0} - \frac{1}{6}\frac{\sin 2\vartheta}{R_0^2}$$

Кривизна нулевого формирующего электрода k_φ в начале координат равна 2μ, а ее производная $k_\varphi' = 6\nu$.

4.2. Случай нулевого электрического поля $\varepsilon = 0$. При этом $A = E = 0$, а поверхность $\varphi = 0$ задается уравнением

$$v = \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 \tag{4.7}$$

В X, Y-представлении (4.7) перепишется следующим образом:

$$Y = \alpha X + \nu X^2 + \lambda X^3$$

$$\alpha = 1, \quad \nu = -\frac{2}{3}T + \frac{1}{3}\frac{J_p'}{J} - \frac{1}{3}\frac{n}{u} - \frac{1}{2}\frac{\sin\vartheta}{R_0} + \frac{1}{6}\frac{\cos\vartheta}{R_0} \tag{4.8}$$

$$\lambda = \frac{1}{9}(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + 11\varkappa_1\varkappa_2) - \left(\frac{4}{9}T + \frac{1}{6}k_2\right)\frac{J_p'}{J} + \frac{1}{6}\frac{J_p''}{J} - \frac{1}{18}\frac{J_p'^2}{J^2} +$$

$$+ \frac{1}{6}\frac{J}{u^3} + \left(\frac{4}{9}T - \frac{1}{18}\frac{J_p'}{J}\right)\frac{n}{u} + \frac{5}{18}\frac{n^2}{u^2} - \frac{1}{6}\frac{m^2}{n^2} + \left(T - \frac{1}{3}\frac{J_p'}{J} + \frac{1}{3}\frac{n}{u}\right)\frac{\sin\vartheta}{R_0} +$$

$$+ \left(-\frac{2}{9}T - \frac{1}{18}\frac{J_p'}{J} + \frac{1}{18}\frac{n}{u}\right)\frac{\cos\vartheta}{R_0} + \frac{5}{6}\frac{\sin^2\vartheta}{R_0^2} - \frac{1}{18}\frac{\cos^2\vartheta}{R_0^2} - \frac{1}{12}\frac{\sin 2\vartheta}{R_0^2}$$

Для кривизны k_φ и ее производной k_φ' в точке старта имеем

$$k_\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\left(\frac{2}{3}T + \frac{1}{2}\frac{\sin\vartheta}{R_0}\right) + \frac{1}{3}\frac{J_p'}{J} - \frac{1}{3}\frac{n}{u} + \frac{1}{6}\frac{\cos\vartheta}{R_0}\right] \tag{4.9}$$

$$k_\varphi' = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-2(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 - \varkappa_1\varkappa_2) - \left(k_2 - \frac{n}{u}\right)\frac{J_p'}{J} + \frac{J_p''}{J} - \frac{J_p'^2}{J^2} + \frac{J}{u^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{n^2}{u^2} - \frac{m^2}{u^2} + 2T\frac{\sin\vartheta}{R_0} + \left(-\frac{J_p'}{J} + \frac{n}{u}\right)\frac{\cos\vartheta}{R_0} + 3\frac{\sin^2\vartheta}{R_0^2} - \frac{1}{2}\frac{\cos 2\vartheta}{R_0^2}\right]$$

Этим исчерпываются все возможные режимы эмиссии. Заметим, что приведенные выше формулы при $R_0 \to \infty$ и $\varkappa_2 = k_2 = 0$ соответствуют плоским течениям. Углы в 67.°5 (ρ-режим), 90° ($\varepsilon \neq 0$) и 45° ($\varepsilon = 0$, $u \neq 0$), составляемые нулевой эквипотенциалью с границей пучка, являются характерными и не зависят от геометрии эмиттирующей поверхности, магнитных полей, распределения плотности тока и поля на эмиттере. Эти параметры сказываются в последующих членах уравнения нулевой эквипотенциали (в кривизне и ее производной в тех случаях, когда эти характеристики имеют смысл).

Поступила 28 XI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Сыровой В. А. О кривизне нулевого формирующего электрода. ПМТФ, 1967, № 5.
2. Кузнецов Ю. Е., Сыровой В. А. О решении уравнений регулярного электростатического пучка при эмиссии с произвольной поверхности. ПМТФ, 1966, № 2.
3. Сыровой В. А. О решении уравнений регулярного пучка при произвольных условиях эмиссии на криволинейной поверхности. ПМТФ, 1966, № 3.
4. Сыровой В. А. О решении уравнений регулярного пучка при эмиссии с криволинейной поверхности в нестационарном случае. ПМТФ, 1966, № 6.
5. Radley D. E., Birtles A. B. Approximate Solution to the Electron-flow Equations. Internat. J. Electr., 1966, vol. 21, No. 5.
6. Harker K. J. Solution of the Cauchy Problem for Laplace's Equation in Axially Symmetric Systems. J. Math. Phys., 1963, vol. 4, No. 7.