

ЛИТЕРАТУРА

1. Reiner M. The centripetal-pump effect in air.— «Proc. Roy. Soc.», 1957, vol. A 240, p. 173.
2. Reiner M. Cross stresses in the laminar flow of liquids.— «Phys. Fluids», 1960, vol. 3, N 3, p. 427.
3. Denny D. F. Some measurements of fluid pressure between plane parallel thrust surfaces with special reference to the balancing of radial-face seal.— «Wear», 1961, vol. 4, N 1, p. 64.
4. Фидлей Дж. А. Обратная накачка в механических торцовых уплотнениях.— «Проблемы трения и смазки», 1969, т. 91, № 3, с. 55.
5. Nau B. S. Hydrodynamic lubrication in face seal.— In: Proc. 3rd Intern. Conf. Fluid Sealing, 1967.
6. Batch B. A., Iny E. H. Pressure generation in radial face seals.— In: Proc. 2nd Intern. Conf. Fluid Seals, 1964.
7. Трусделл К. Точный верхний предел корректности теории Навье-Стокса с учетом кинетической теории.— Сб. пер. Механика, 1970, т. 4, с. 137.

УДК 532.54

ЗАДАЧА О РЕГУЛИРОВАНИИ УРОВНЯ ГРУНТОВЫХ ВОД ПРИ ОРОШЕНИИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СЛУЧАЯ

Н. Н. Кочина

(Москва)

В работе [1] рассмотрена задача о регулировании уровня грунтовых вод при орошении. Она решается в предположении, что поверхность грунтового потока слабо изогнута, водоупорный слой слабопроницаем, горизонтален и имеет постоянную мощность M_0 и грунтовыми водами занята область между двумя параллельными каналами или дренами.

Представляет интерес решение аналогичной задачи в двумерной области между четырьмя каналами, образующими прямоугольник $0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq L$. Это решение получено в данной работе в явном виде. При этом можно представить себе следующий способ регулирования уровня грунтовых вод: полив, производимый с интенсивностью $m\theta$, прекращается, когда уровень грунтовых вод, измеряемый в фиксированной точке $0 \leq x^0 \leq l$, $0 \leq y^0 \leq L$ области между каналами, достигнет величины h_* , и начинается вновь, когда $h(x^0, t)$ станет равным $h_{**} < h_*$ ($0 < \theta < 1$). Эта задача сводится к решению уравнения

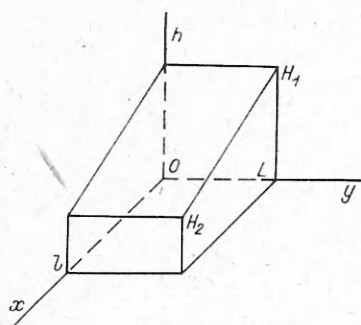
$$(1.1) \quad \frac{\partial h}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) - b(h - H) + F[h(x^0, y^0, t)],$$

где

$$(1.2) \quad F[h(x^0, y^0, t)] = \begin{cases} c & \text{при } h(x^0, y^0, t) < h_* \\ -d & \text{при } h(x^0, y^0, t) > h_{**} \end{cases}$$

(обозначения такие же, как и в работе [1], θ — отношение интенсивностей инфильтрации и полива), с некоторым начальным условием и граничными условиями (фиг. 1)

$$(1.3) \quad \begin{aligned} h(x, 0, t) = h(x, L, t) &= H_1 + (H_2 - H_1) \cdot x/l, \\ h(0, y, t) = H_1, \quad h(l, y, t) &= H_2. \end{aligned}$$



Ф и г. 1

Положим

$$(1.4) \quad h(x, y, t) = H_1 + (H_2 - H_1) \cdot x/l + \tilde{u}(x, y, t).$$

Для $\tilde{u}(x, y, t)$ получим уравнение

$$(1.5) \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right) - b \left[H_1 - H + (H_2 - H_1) \frac{x}{l} \right] - b \tilde{u} + F(\tilde{u}),$$

где $\tilde{F}(u)$ дано формулами (1.2), (1.4)

с условиями

$$(1.6) \quad \tilde{u}(x, 0, t) = \tilde{u}(x, L, t) = \tilde{u}(0, y, t) = \tilde{u}(l, y, t) = 0.$$

Можно видеть, что уравнение (1.5) с условиями (1.6) имеет устойчивые стационарные решения

$$(1.7) \quad v(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^{(1)}}{\text{sh } \lambda_k L} [\text{sh } \lambda_k (y - L) - \text{sh } \lambda_k y + \text{sh } \lambda_k L] \sin \frac{\pi k x}{l},$$

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^{(2)}}{\text{sh } \lambda_k L} [\text{sh } \lambda_k (y - L) + \text{sh } \lambda_k y + \text{sh } \lambda_k L] \sin \frac{\pi k x}{l},$$

$$\lambda_k^2 = \frac{\pi^2 k^2}{l^2} + \frac{b}{a^2}, \quad \mu_k^{(i)} = \frac{2 \{ [-(-1)^k + 1] [c_1 - b(H_1 - H)] + b [H_2 - H_1] (-1)^k \}}{\pi a^2 \lambda_k^2 k^2},$$

$$c_1 = c, \quad c_2 = -d.$$

Периодическое решение уравнения (1.5) с условиями (1.6) имеет вид

$$(1.8) \quad \tilde{u}_1(x, y, t) = v(x, y) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{k,m} \exp(-\lambda_{k,m}^2 t) \sin \frac{\pi k x}{l} \cdot \sin \frac{\pi m y}{L} \quad (0 \leq t \leq T_1),$$

$$\tilde{u}_2(x, y, t) = w(x, y) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} D_{k,m} \exp[-\lambda_{k,m}^2 (t - T_1)] \times \\ \times \sin \frac{\pi k x}{l} \cdot \sin \frac{\pi m y}{L} \quad (T_1 \leq t \leq T),$$

где введены обозначения

$$(1.9) \quad C_{k,m} = \frac{-\theta_{k,m} (1 - \gamma_{k,m})}{1 - \delta_{k,m}}; \quad D_{k,m} = \frac{\theta_{k,m} (1 - \beta_{k,m})}{1 - \delta_{k,m}};$$

$$\lambda_{k,m}^2 = \pi^2 a^2 \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{m^2}{L^2} \right) + b;$$

$$\beta_{k,m} = \exp(-\lambda_{k,m}^2 T_1); \quad \gamma_{k,m} = \exp[-\lambda_{k,m}^2 (T - T_1)]; \quad \delta_{k,m} = \beta_{k,m} \gamma_{k,m}.$$

$$\theta_{k,m} = -\frac{4(c+d)}{\pi a^2 L} \frac{[(-1)^k - 1][(-1)^m - 1]}{k \lambda_k^2} \left\{ \frac{\pi m}{L \left(\lambda_k^2 + \frac{\pi^2 m^2}{L^2} \right)} - \frac{L}{\pi m} \right\}.$$

Здесь T — период автоколебания; T_1 — продолжительность стадии полива. Константы T_1 и $T_2 = T - T_1$ определяются как наименьшие корни

из системы двух уравнений

$$(1.10) \quad \tilde{u}_1(x^0, y^0, T_1) = u_*, \quad \tilde{u}_2(x^0, y^0, T) = u_{**}.$$

В силу (1.8) уравнения (1.10) приводятся к виду

$$(1.11) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m} \beta_{k,m} \sin \frac{\pi k x^0}{l} \cdot \sin \frac{\pi m y^0}{L} = U_*,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{k,m} \gamma_{k,m} \sin \frac{\pi k x^0}{l} \cdot \sin \frac{\pi m y^0}{L} = U_{**}.$$

Здесь для краткости введены обозначения

$$(1.12) \quad U_* = u_* - v(x^0, y^0), \quad U_{**} = u_{**} - w(x^0, y^0).$$

Используя (1.12), (1.9), перепишем формулы (1.11) следующим образом:

$$\tilde{\varphi}(T_1, T_2) = U_*, \quad \tilde{\psi}(T_1, T_2) = U_{**}.$$

Здесь обозначено

$$(1.13) \quad \tilde{\varphi}(T_1, T_2) = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_{k,m} \beta_{k,m} (1 - \gamma_{k,m})}{1 - \delta_{k,m}} \times$$

$$\times \sin \frac{\pi k x^0}{l} \sin \frac{\pi m y^0}{L},$$

$$\tilde{\psi}(T_1, T_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_{k,m} \gamma_{k,m} (1 - \beta_{k,m})}{1 - \delta_{k,m}} \times \sin \frac{\pi k x^0}{l} \cdot \sin \frac{\pi m y^0}{L}.$$

Расположив двойной ряд $S = \sum_{[m,k=1]}^{\infty} a_m^{(k)}$ в виде бесконечной прямоугольной матрицы, представим затем его члены в виде простой последовательности по квадратам

$$S = \sum_{p=1}^{\infty} a_p, \quad \text{при этом } a_m^{(k)} = a_p.$$

Здесь $P = (k-1)^2 + m$ при $m \leq k$ и $p = m^2 + 1 - k$ при $m > k$. Представим двойные ряды в формулах (1.13) в виде обыкновенных рядов

$$\tilde{\varphi}(T_1, T_2) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p(T_1, T_2), \quad \tilde{\psi}(T_1, T_2) = \sum_{p=1}^{\infty} b_p(T_1, T_2),$$

где

$$a_p = \frac{-\theta_{k,m} \beta_{k,m} (1 - \gamma_{k,m})}{1 - \delta_{k,m}} \sin \frac{\pi k x^0}{l} \cdot \sin \frac{\pi m y^0}{L};$$

$$b_p = \frac{\theta_{k,m} \gamma_{k,m} (1 - \beta_{k,m})}{1 - \delta_{k,m}} \sin \frac{\pi k x^0}{l} \cdot \sin \frac{\pi m y^0}{L}.$$

Положим в формулах (1.13) $T = \nu T_1 (\nu \geq 1)$, получим $\tilde{\varphi}(0, 0) = -[(\nu-1)/\nu] \theta(x^0, y^0)$, $\tilde{\psi}(0, 0) = (1/\nu) \theta(x^0, y^0)$, $(\theta(x^0, y^0) = v(x, y) - w(x, y))$.

Графики зависимостей

$$Y = \tilde{\varphi}^2 / (c + d) l^2 < 0, \quad Z = \tilde{\psi}^2 / (c + d) l^2 > 0$$

от $T_1' = a^2 T_1 / l^2$ представлены на фиг. 2, где кривые 1—3 отвечают значениям $\nu = 4/3$, $\nu = 2$ и $\nu = 4$ соответственно. Сплошные кривые соответствуют значению $b' = 0$, штриховые — $b' = 1/60$ ($b' = bl^2/a^2$). Из вида этих кривых ясно, что паре значений $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ таких, что $-\theta(x^0, y^0) < \tilde{\varphi} < 0$,

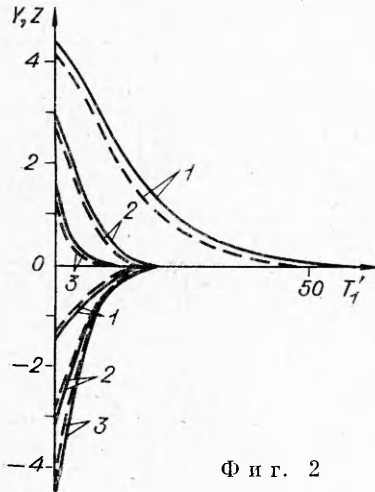
$0 < \tilde{\psi} < \theta(x^0, y^0)$, $\tilde{\psi} - \tilde{\varphi} < \theta(x^0, y^0)$, соответствует однозначным образом пара значений $T_1 > 0$ и ν (или значений $T_1 > 0$ и $T_2 > 0$). Следовательно, каждой паре значений u_* и u_{**} таких, что $w(x^0, y^0) < u_{**} < u_* < v(x^0, y^0)$, соответствует единственная пара значений $T_1 > 0$, $T_2 > 0$.

2. Рассмотрим решение начально-краевой задачи (1.1), (1.2) с условиями (1.3) и начальным условием

$$(2.1) \quad h(x, y, 0) = \varphi(x, y),$$

или (что то же самое) задачи (1.5), (1.2) с условиями (1.6) и

$$(2.2) \quad \tilde{u}(x, y, 0) = \psi(x, y) \quad (\psi(x, y) = \varphi(x, y) - H_1 - (H_2 - H_1) \cdot x/l).$$



Ф и г. 2

Если решение этой задачи существует, то оно имеет вид, аналогичный (1.8),

$$(2.3) \quad \tilde{u}_1^{(i+1)}(x, y, t) = v(x, y) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{k,m}^{(i+1)} \times \\ \times \exp[-\lambda_{k,m}^2 (t - T^{(i)})] \sin \frac{\pi k x}{l} \cdot \sin \frac{\pi m y}{L} \\ \left(T^{(i)} \leq t \leq T_1^{(i+1)}, T^{(i)} = \sum_{j=0}^i T^{(j)}, T_1^{(i+1)} = T^{(i)} + T_1^{(i+1)}, \right. \\ \left. i = 0, 1, 2, 3, \dots, T^{(0)} = 0 \right), \\ \tilde{u}_2^{(i+1)}(x, y, t) = w(x, y) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} D_{k,m}^{(i+1)} \times \\ \times \exp[-\lambda_{k,m}^2 (t - T_1^{(i+1)})] \sin \frac{\pi k x}{l} \cdot \sin \frac{\pi m y}{L} \\ (T_1^{(i+1)} \leq t \leq T^{(i+1)}).$$

Здесь $C_{k,m}^{(1)}$ — коэффициенты Фурье функции $\psi(x, y) - v(x, y)$

$$(2.4) \quad C_{k,m}^{(1)} = \frac{4}{lL} \int_0^l \int_0^L [\psi(x, y) - v(x, y)] \times \\ \times \sin \frac{\pi k x}{l} \cdot \sin \frac{\pi m y}{L} dx dy;$$

$C_{k,m}^{(i+1)}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) и $D_{k,m}^{(i+1)}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) — коэффициенты Фурье функций $\tilde{u}_1^{(i+1)}(x, y, T^{(i)}) - v(x, y)$ и $\tilde{u}_2^{(i+1)}(x, y, T_1^{(i+1)}) - w(x, y)$

соответственно; $T_1^{(i+1)}$ и $T^{(i+1)}$ — наименьшие корни уравнений

$$(2.5) \quad \tilde{u}_1^{(i+1)}(x^0, y^0, T_1^{(i+1)}) = u_*, \quad \tilde{u}_2^{(i+1)}(x^0, y^0, T^{(i+1)}) = u_{**}.$$

Формулы (2.3) — (2.5) имеют место для случая $\psi(x^0, y^0) < u_*$.

В работе [2] показано, что задача, аналогичная (1.1) — (1.3), (2.1), для случая, когда грунтовыми водами занята область между двумя параллельными каналами или дренами, характеризуется четырьмя случаями. Можно показать, что задача (1.1) — (1.3), (2.1) также характеризуется четырьмя случаями:

$$\begin{aligned} u_{**} &< w(x^0, y^0) < v(x^0, y^0) < u_*; \\ w(x^0, y^0) &< u_{**} < v(x^0, y^0) < u_*; \\ u_{**} &< w(x^0, y^0) < u_* < v(x^0, y^0); \\ w(x^0, y^0) &< u_{**} < u_* < v(x^0, y^0). \end{aligned}$$

При этом в соответствии с результатами, полученными в [2], в первых трех случаях существует такое s , что либо $T_1^{(i+1)} \rightarrow \infty$, либо $T^{(i+1)} \rightarrow \infty$. Соответствующие формулы (2.5) (первая или вторая) для $i \rightarrow s$ $i + 1 = s$ при этом уже неверны. Для четвертого же случая формулы (2.3) — (2.5) верны при любых i и дают колеблющееся решение. Аналогичные формулы имеют место и для случая $\psi(x^0, y^0) > u_*$. Таким образом, в четвертом случае получается оптимальный режим орошения: благодаря колебаниям уровня грунтовых вод между величинами, меньшими, чем $v_c(x, y)$, и большими, чем $w_c(x, y)$, где в соответствии с (1.4), (1.7) и (1.8) обозначено

$$w_c(x, y) = H_1 + (H_2 - H_1) \cdot x/l + w(x, y); \quad v_c(x, y) = H_1 + (H_2 - H_1) \cdot x/l + v(x, y),$$

удается избежать и чрезмерного подъема уровня грунтовых вод, а следовательно, засоления и чрезмерного понижения этого уровня, т. е. истощения водоносного пласта. Для этого достаточно выбрать h_* и h_{**} так, чтобы имел место четвертый случай

$$w_c(x^0, y^0) < h_{**} < h_* < v_c(x^0, y^0).$$

Остановимся подробнее на четвертом случае и покажем, что при безграничном возрастании времени решение (2.3) задачи стремится к периодическому решению (1.8), (1.9).

Ясно, что должны выполняться равенства

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \tilde{u}_1^{(i+1)}(x, y, T_1^{(i+1)}) &= \tilde{u}_2^{(i+1)}(x, y, T_1^{(i+1)}), \\ \tilde{u}_2^{(i+1)}(x, y, T^{(i+1)}) &= \tilde{u}_1^{(i+2)}(x, y, T^{(i+1)}). \end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$\beta_{k,m}^{(i+1)} = \exp(-\lambda_{k,m}^2 T_1^{(i+1)}), \quad \gamma_{k,m}^{(i+1)} = \exp[-\lambda_{k,m}^2 (T^{(i+1)} - T_1^{(i+1)})],$$

перепишем условия (2.6) для нахождения констант $C_{k,m}^{(i+2)}$ и $D_{k,m}^{(i+1)}$ следующим образом:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} D_{k,m}^{(i+1)} &= \beta_{k,m}^{(i+1)} C_{k,m}^{(i+1)} + \theta_{k,m}, \\ C_{k,m}^{(i+2)} &= \gamma_{k,m}^{(i+1)} D_{k,m}^{(i+1)} - \theta_{k,m} \quad (\theta_{k,m} = v_{k,m} - w_{k,m}). \end{aligned}$$

Уравнения (2.7) имеют такой же вид, как аналогичные уравнения, полученные в [1], поэтому для коэффициентов $C_{k,m}^{(i+1)}$ и $D_{k,m}^{(i+1)}$ имеют место аналогичные рекуррентные формулы, с учетом которых

уравнения (2.5) примут вид

$$\begin{aligned}
 (2.8) \quad \beta_1^{(i+1)} &= \beta_1^{(0)} + \sum_{p=3}^{\infty} A_p \{ (\beta_1^{(i+1)})^{\mu_p} [1 - (\gamma_1^{(i)})^{\mu_p} + (\gamma_1^{(i)} \beta_1^{(i)})^{\mu_p} + \dots - \\
 &- (\gamma_1^{(i)} \beta_1^{(i)} \gamma_1^{(i-1)} \beta_1^{(i-1)} \dots \gamma_1^{(1)})^{\mu_p}] + \beta_1^{(i+1)} (\gamma_1^{(i)})^{\mu_p} [1 - (\beta_1^{(i)})^{\mu_p} + (\beta_1^{(i)} \gamma_1^{(i-1)})^{\mu_p} + \\
 &+ \dots + (\beta_1^{(i)} \gamma_1^{(i-1)} \dots \gamma_1^{(1)})^{\mu_p}] \} + \sum_{p=2}^{\infty} [\beta_1^{(i+1)} - (\beta_1^{(i+1)})^{\mu_p}] \times \\
 &\quad \times (\gamma_1^{(i)} \beta_1^{(i)} \gamma_1^{(i-1)} \dots \gamma_1^{(1)} \beta_1^{(1)})^{\mu_p} \tilde{C}_p^{(1)}, \\
 \gamma_1^{(i+1)} &= \gamma_1^{(0)} + \sum_{p=3}^{\infty} B_p \{ (\gamma_1^{(i+1)})^{\mu_p} [1 - (\beta_1^{(i+1)})^{\mu_p} + (\beta_1^{(i+1)} \gamma_1^{(i)})^{\mu_p} + \\
 &+ \dots + (\beta_1^{(i+1)} \gamma_1^{(i)} \dots \gamma_1^{(1)})^{\mu_p}] + \gamma_1^{(i+1)} (\beta_1^{(i+1)})^{\mu_p} [1 - (\gamma_1^{(i)})^{\mu_p} + \\
 &+ (\gamma_1^{(i)} \beta_1^{(i)})^{\mu_p} + \dots - (\gamma_1^{(i)} \beta_1^{(i)} \gamma_1^{(i-1)} \dots \gamma_1^{(1)})^{\mu_p}] \} + \sum_{p=2}^{\infty} [\gamma_1^{(i+1)} - \\
 &\quad - (\gamma_1^{(i+1)})^{\mu_p}] (\beta_1^{(i+1)} \gamma_1^{(i)} \dots \beta_1^{(1)})^{\mu_p} \tilde{C}_p^{(1)}.
 \end{aligned}$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned}
 A &= u_{**} - w(x^0, y^0) - \theta_{1,1} \sin \frac{\pi x^0}{l} \sin \frac{\pi y^0}{L}, \\
 B &= u_* - v(x^0, y^0) + \theta_{1,1} \sin \frac{\pi x^0}{l} \sin \frac{\pi y^0}{L}, \\
 \beta_1^{(0)} &= [u_* - v(x^0, y^0)]/A, \quad \gamma_1^{(0)} = [u_{**} - w(x^0, y^0)]/B, \\
 A_{k,m} &= \theta_{k,m} \sin \frac{\pi k x^0}{l} \sin \frac{\pi m y^0}{L} / A, \\
 B_{k,m} &= -\theta_{k,m} \sin \frac{\pi k x^0}{l} \sin \frac{\pi m y^0}{L} / B, \\
 E_{k,m}^{(1)} &= C_{k,m}^{(1)} \sin \frac{\pi k x^0}{l} \sin \frac{\pi m y^0}{L}, \\
 \tilde{C}_{k,m}^{(1)} &= E_{k,m}^{(1)} / A, \quad \tilde{C}_{k,m}^{(1)} = E_{k,m}^{(1)} / B, \\
 \beta_p^{(i+1)} &= \beta_{k,m}^{(i+1)}, \quad \gamma_p^{(i+1)} = \gamma_{k,m}^{(i+1)}, \quad A_p = A_{k,m}, \\
 \tilde{C}_p^{(1)} &= \tilde{C}_{k,m}^{(1)}, \quad B_p = B_{k,m}, \quad \tilde{C}_p^{(1)} = \tilde{C}_{k,m}^{(1)} \quad (p = 1, 2, \dots), \\
 \beta_{k,m}^{(i+1)} &= [\beta_{1,1}^{(i+1)}]^{\mu_{k,m}}, \quad \gamma_{k,m}^{(i+1)} = [\gamma_{1,1}^{(i+1)}]^{\mu_{k,m}}, \\
 \mu_{k,m} &= \left(\frac{\lambda_{k,m}}{\lambda_{1,1}} \right)^2 \quad (k, m = 1, 2, \dots), \quad \mu_p = \mu_{k,m} \quad (p = 1, 2, \dots).
 \end{aligned}$$

При этом предполагается, что $A \neq 0$, $B \neq 0$.

Уравнения (2.8) совпадают с уравнениями (3.1), (3.2) работы [1] для плоского случая. В связи с этим сохраняются все дальнейшие рассуждения, приведенные в [1], об оценках величин β_{\min} , γ_{\min} , γ_{\max} , β_{\max} , которые можно найти методом последовательных приближений, и об оценках средних значений производных функций, входящих в правую часть уравнений (2.8). При этом в первой из формул (3.4) работы [1] $q = (\beta_{\max} \gamma_{\max})^{\mu_3}$ нужно положить $\mu_3 = \min(\mu_{1,3}, \mu_{3,1})$.

Аналогичным образом получается и результат о стремлении при $i \rightarrow \infty$ величин $\hat{\rho}_1^{(i+1)}$ и $\gamma_1^{(i+1)}$ к пределам $\hat{\rho}_1$ и γ_1 , где $\hat{\rho}_1$ и γ_1 — рассмотренные выше величины $\hat{\rho}_1 = \exp(-\lambda_{1,1}^2 T_1)$ и $\gamma_1 = \exp[-\lambda_{1,1}^2 (T - T_1)]$ для периодического решения (1.8), (1.9).

Случаи, когда выполняется одно из двух равенств $A = 0$, $B = 0$ или оба сразу, рассматриваются аналогично.

Поступила 26 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочина Н. Н. О регулировании уровня грунтовых вод при орошении. — ПМТФ, 1973, № 5, с. 125.
2. Кочина Н. Н. О некоторых нелинейных задачах уравнения теплопроводности. — ПМТФ, 1972, № 3, с. 123.

УДК 534.222.2 622.235.5

ОБ ОДНОЙ ИМПУЛЬСНО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЗРЫВА НА ВЫБРОС

Н. Б. Ильинский

(Казань)

Известно, что при взрыве в ряде случаев можно пренебречь сжимаемостью среды, ее прочностными и пластическими свойствами и силами трения по сравнению с инерционными силами. Тогда получается модель идеальной несжимаемой жидкости, уравнения движения которой в импульсной постановке задач гидродинамики имеют вид

$$(1) \quad \mathbf{v} = - (1/\rho) \nabla p;$$

$$(2) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где \mathbf{v} — вектор скорости; ρ — плотность среды; p — импульсное давление. Из соотношения (1) следует, что $|\nabla p|$ и величина скорости $v = |\mathbf{v}|$ связаны линейной зависимостью. Эта модель применяется при решении задач об определении размеров выемки выброса грунта или зоны разрушения в горных породах (см., например, [1—7]). При этом существует несколько разновидностей этой модели [5]. Согласно жидкостной модели [1] (назовем ее моделью 1), среда рассматривается как идеальная несжимаемая жидкость во всей занимаемой ею области, причем во всей этой области имеет место линейная зависимость между v и ∇p . Из последнего следует, что при сколь угодно малых значениях $|\nabla p| > 0$ вся среда приобретает мгновенное поле скоростей. Но так как область действия взрыва ограничена, то вводится понятие критической скорости v_* , при достижении которой обеспечивается разрушение данной среды [6]. Размеры выемки выброса определяются из условия, что критическое значение скорости достигается на краю этой выемки.

В твердо-жидкостной модели [2,4] (назовем ее моделью 2) среда описывается уравнениями (1), (2) только в области, где $v > v_*$. Вне этой области среда считается абсолютно твердым телом. Согласно этой модели, форма