УДК 532.517.013.4

ВОЗНИКНОВЕНИЕ МИКРОКОНВЕКЦИИ В ПЛОСКОМ СЛОЕ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В. К. Андреев, Е. А. Рябицкий

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск

Изучена устойчивость по линейному приближению равновесия плоского слоя со свободной границей в модели микроконвекции. Рассмотрен физически наиболее важный случай, когда параметр Буссинеска и число Рэлея линейно зависят от числа Марангони. Показано, что длинноволновые возмущения всегда затухают. Численно построены нейтральные кривые для широкого диапазона безразмерных параметров; при этом найдены новые, по сравнению с моделью Обербека — Буссинеска, нарастающие возмущения, обусловленные сжимаемостью жидкости. На основании численных результатов установлены границы применимости моделей: микроконвекции, Обербека — Буссинеска и вязкой теплопроводной жидкости.

Ключевые слова: микроконвекция, равновесное состояние, свободная граница, устойчивость, нейтральная кривая.

1. Основные уравнения. Система уравнений, названная в [1] моделью микроконвекции, имеет вид

$$\boldsymbol{w}_t + \boldsymbol{w}\nabla\boldsymbol{w} + \beta\chi \operatorname{rot}\boldsymbol{w}\times\nabla\theta + \beta^2\chi^2 \operatorname{div}(\nabla\theta\otimes\nabla\theta - |\nabla\theta|^2 I) = (1+\beta\theta)(-\nabla q + \nu\Delta\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{g}; \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{w} = 0; \tag{1.2}$$

$$\theta_t + \boldsymbol{w}\cdot\nabla\theta + \beta\chi|\nabla\theta|^2 = (1+\beta\theta)\chi\Delta\theta, \tag{1.3}$$

где β — коэффициент объемного расширения; χ — температуропроводность; $\otimes$ — тензорное произведение; I — единичный тензор; $\nu = \mu/\rho_0$ — кинематическая вязкость; $\boldsymbol{g}$ — плотность внешних сил. Уравнение состояния такой жидкости $\rho = \rho_0(1+\beta\theta)^{-1}$, $\rho_0 > 0$ — постоянная. Истинные вектор скорости $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ и давление $p(\boldsymbol{x},t)$ связаны с функциями $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)$, $q(\boldsymbol{x},t)$ соотношениями

$$\begin{gathered}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} + \beta\chi\nabla\theta,\\ p = \rho_0 q + \beta\chi[\lambda + \rho_0(\nu-\chi)]\Delta\theta\end{gathered} \tag{1.4}$$

(λ — вторая вязкость).

В работе [1] показано, что при $\eta = l_*^3|\boldsymbol{g}|/(\nu\chi) < 1$ приближение Обербека — Буссинеска несправедливо и надо пользоваться моделью (1.1)–(1.3) (l_* — характерный размер задачи).

Система (1.1)–(1.3) дополняется начальными данными при $t = 0$

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1(\boldsymbol{x}), \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{w}_1 = 0, \qquad \theta = \theta_1(\boldsymbol{x}) \tag{1.5}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-10087) и в рамках Интеграционного проекта № 131 СО РАН.

и условиями на твердой стенке Σ

$$\boldsymbol{w} + \beta\chi\nabla\theta = 0, \qquad \theta = \theta_\Sigma(\boldsymbol{x}, t). \tag{1.6}$$

Предположим, что $f(\boldsymbol{x}, t) = 0$ — неявное уравнение свободной границы S. Тогда на ней, с учетом замены (1.4), выполнены следующие соотношения [2]:

$$f_t + (\boldsymbol{w} + \beta\chi\nabla\theta) \cdot \nabla f = 0; \tag{1.7}$$

$$[p_{gas} - \rho_0 q - \beta\chi\rho_0(\nu - \chi)\Delta\theta]\boldsymbol{n} + 2\rho_0\nu[D(\boldsymbol{w}) + \beta\chi D(\nabla\theta)]\boldsymbol{n} = 2\sigma(\theta)H\boldsymbol{n} + \nabla_{11}\sigma; \tag{1.8}$$

$$k\,\frac{\partial\theta}{\partial n} + b(\theta - \theta_{gas}) = Q. \tag{1.9}$$

Уравнение (1.7) — кинематическое условие, (1.8) — динамическое условие, а (1.9) задает теплообмен жидкости с газовой средой, которая предполагается пассивной (k — коэффициент теплопроводности; $b \geqslant 0$ — коэффициент теплообмена; Q — поток тепла). В (1.8), (1.9) p_{gas}, θ_{gas} — заданные давление и температура в газе (ниже p_{gas}, θ_{gas} — постоянные); $\boldsymbol{n} = \nabla f/|\nabla f|$ — внешняя нормаль к S; $\sigma(\theta)$ аппроксимируется линейной зависимостью

$$\sigma(\theta) = \sigma_1 - æ(\theta - \theta_1), \tag{1.10}$$

где σ_1, θ_1 — значения поверхностного натяжения и температуры в некоторой точке S; H — средняя кривизна; $\nabla_{11} = \nabla - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} \cdot \nabla)$ — поверхностный градиент.

В дальнейшем свободная граница не имеет общих точек с твердой стенкой, поэтому условия на линии контакта не рассматриваются (см. [3, 4]).

Замечание. В конкретных задачах вектор $\boldsymbol{g}$ либо зависит только от времени, либо вообще $\boldsymbol{g} = \mathrm{const}$. В этих случаях замена (аналог замены давления модифицированным давлением в модели Обербека — Буссинеска)

$$q = \bar{q} + \boldsymbol{g}(t) \cdot \boldsymbol{x} \tag{1.11}$$

позволяет преобразовать правую часть уравнения импульса (1.1) к виду

$$(1 + \beta\theta)(-\nabla\bar{q} + \nu\Delta\boldsymbol{w}) - \beta\theta\boldsymbol{g}.$$

В граничном условии (1.8) выражение $-\rho_0 q$ заменяется на $-\rho_0\bar{q} - \rho_0\boldsymbol{g}(t) \cdot \boldsymbol{x}$.

Всюду ниже $\boldsymbol{g} = (0, 0, -g)$, $g = \mathrm{const} > 0$. При этом нетрудно проверить, что жидкость может находиться в равновесии [2] в слое $0 < z < l$, $|x|, |y| < \infty$, причем верхняя граница слоя является свободной, а нижняя $z = 0$ — твердой стенкой. Равновесное состояние таково (индекс 0 означает положение равновесия):

$$\begin{gathered}\boldsymbol{w}_0 = (0, 0, -\beta\chi\theta_{01}), \quad \theta_0(z) = \theta_{00} + \theta_{01}z, \quad q_0 = -g\ln[1 + \beta\theta_0(z)]/(\beta\theta_{01}) + c_1, \\ \theta_{01} = [Q + b(\theta_{gas} - \theta_{00})]/(k + bl), \qquad c_1 = p_{gas}/\rho_0 + g\ln[1 + \beta\theta_0(l)]/(\beta\theta_{01}),\end{gathered} \tag{1.12}$$

где $\theta_{00} = \mathrm{const}$ — температура твердой стенки; без ограничения общности полагаем $\theta_{00} = 0$. Таким образом, формулы (1.12) дают точное решение задачи (1.1)–(1.3), (1.6)–(1.10) с плоской свободной границей $z = l$. В отличие от классического случая здесь функция $q_0(z)$ — аналог давления — распределена по логарифмическому, а не по линейному закону.

Из (1.12) при $\beta \to 0$ и фиксированных других параметрах получим

$$\boldsymbol{w}_0 = 0, \qquad \theta_0 = \theta_{01}z, \qquad q_0 = p_{gas}/\rho_0 + gl - gz. \tag{1.13}$$

Так как давление $p_0 = \rho_0 q_0$, то (1.13) есть равновесное состояние слоя вязкой теплопроводной жидкости. Это и неудивительно, поскольку согласно замене (1.4) система (1.1)–(1.3) в этом случае аппроксимирует уравнения Навье — Стокса такой жидкости.

Если теперь в выражении (1.12) для $q_0(z)$ удержать члены второго порядка малости по β и обозначить через $\bar{p}_0(z) = \rho_0\bar{q}_0(z)$ ($\bar{q}_0(z) = q_0(z) + gz$ согласно замене (1.11)) отклонение давления от гидростатического, то получим равновесное состояние плоского слоя в модели Обербека — Буссинеска [5]

$$\boldsymbol{w}_0 = 0, \quad \theta_0(z) = \theta_{01}z, \quad \bar{p}_0 = p_{gas} + \rho_0 g\beta[\theta_0^2(z) - \theta_0^2(l)]/(2\theta_{01}). \tag{1.14}$$

Равенство для $\bar{p}_0(z)$ обычно записывают так:

$$\frac{d\bar{p}_0}{dz} = \rho_0 g\beta\theta_0(z).$$

В этом случае модель (1.1)–(1.3) с учетом сделанного выше замечания аппроксимирует модель Обербека — Буссинеска. Достаточно всюду за исключением выражения $-\beta\theta\boldsymbol{g}$ положить $\beta = 0$.

Ниже равновесное состояние (1.12) исследуется на устойчивость по линейному приближению.

2. Малые возмущения. Уравнения малых возмущений для произвольных решений задачи со свободной границей (1.1)–(1.3), (1.5)–(1.9) получены в работе [2]. Здесь специализируем их для равновесного состояния (1.12). Пусть $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t) = (U,V,W)$, $T(\boldsymbol{x},t)$, $Q(\boldsymbol{x},t)$ — возмущения основного равновесного состояния $\boldsymbol{w}_0$, θ_0, q_0 (1.12). Введем безразмерные переменные

$$\boldsymbol{x}' = \frac{\boldsymbol{x}}{l}, \quad t' = \frac{\nu t}{l^2}, \quad \boldsymbol{U}' = \frac{l\boldsymbol{U}}{\nu}, \quad T' = \frac{T}{\mu\theta_{01}l\,\mathrm{Pr}}, \quad Q' = \frac{l^2Q}{\nu^2}, \tag{2.1}$$

где $\mu = 1$ для $\theta_{01} > 0$ и $\mu = -1$ при $\theta_{01} < 0$.

После подстановки (2.1) в (1.1)–(1.3), (1.5)–(1.9) получим следующую задачу о малых возмущениях в безразмерных переменных (штрихи опущены):
при $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 < z < 1$

$$U_t - \mu\varepsilon W_x/\mathrm{Pr} - \mu\varepsilon^2 T_{xz}/\mathrm{Pr} = (1+\mu\varepsilon z)(-Q_x + \Delta U); \tag{2.2}$$

$$V_t - \mu\varepsilon W_y/\mathrm{Pr} - \mu\varepsilon^2 T_{yz}/\mathrm{Pr} = (1+\mu\varepsilon z)(-Q_y + \Delta V); \tag{2.3}$$

$$W_t - \mu\varepsilon W_z/\mathrm{Pr} + \mu\varepsilon^2(T_{xx}+T_{yy})/\mathrm{Pr} = (1+\mu\varepsilon z)(-Q_z + \Delta W) + \mathrm{Ra}/(1+\mu\varepsilon z); \tag{2.4}$$

$$T_t + \mu\varepsilon T_z/\mathrm{Pr} + \mu W/\mathrm{Pr} = (1+\mu\varepsilon z)\Delta T/\mathrm{Pr}; \tag{2.5}$$

$$U_x + V_y + W_z = 0; \tag{2.6}$$

на свободной границе $z = 1$

$$\gamma R/(1+\mu\varepsilon) - Q + \varepsilon(1/\mathrm{Pr} - 1)\Delta T + 2W_z + 2\varepsilon T_{zz} = \mathrm{We}(R_{xx} + R_{yy}); \tag{2.7}$$

$$U_z + 2\varepsilon T_{xz} + W_x = -\mathrm{M}(T + \mu R/\mathrm{Pr})_x; \tag{2.8}$$

$$V_z + 2\varepsilon T_{yz} + W_y = -\mathrm{M}(T + \mu R/\mathrm{Pr})_y; \tag{2.9}$$

$$T_z + \mathrm{B}(T + \mu R/\mathrm{Pr}) = 0; \tag{2.10}$$

$$R_t = W + \varepsilon T_z; \tag{2.11}$$

на твердой стенке $z = 0$

$$U + \varepsilon T_x = 0, \quad V + \varepsilon T_y = 0, \quad W + \varepsilon T_z = 0, \quad T = 0; \tag{2.12}$$

при $t = 0$

$$\begin{gathered} U = U_1(x, y, z), \quad V = V_1(x, y, z), \quad W = W_1(x, y, z), \\ T = T_1(x, y, z), \qquad R = R_0(x, y), \qquad U_{1x} + V_{1y} + W_{1z} = 0. \end{gathered} \tag{2.13}$$

В задаче (2.2)–(2.13) введены следующие обозначения: $\varepsilon = \mu\theta_{01}l\beta > 0$ — параметр Буссинеска; $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля; $\mathrm{Ra} = \mu\theta_{01}l^4\beta g/(\nu\chi) \equiv \varepsilon\eta$ — число Рэлея ($\eta = gl^3/(\nu\chi)$ — параметр микроконвекции [1]); $\gamma = gl^3/\nu^2 = \eta/\mathrm{Pr}$ — число Галилея; $\mathrm{We} = \sigma(\theta_0(l))l/(\rho_0\nu^2)$ — модифицированное число Вебера; $\mathrm{M} = \mu æ\theta_{01}l^2/(\rho_0\nu\chi)$ — число Марангони; $\mathrm{B} = bl/k$ — число Био.

Функция $R(x, y, t)$ описывает возмущение свободной границы $z = 1$, т. е. отклонение по нормали от этой плоскости в каждой ее точке.

Будем искать решение задачи (2.2)–(2.12) в виде нормальных волн

$$(\boldsymbol{U}, Q, T, R) = (\boldsymbol{U}(z), Q(z), T(z), R)\exp{[i(\alpha_1 x + \alpha_2 y - Ct)]}, \tag{2.14}$$

где α_1 и α_2 — безразмерные волновые числа вдоль осей x и y соответственно; C — комплексный декремент, определяющий временной ход возмущения. При этом начальные данные (2.13) можно не рассматривать. Подстановка (2.14) в (2.2)–(2.12) приводит к однородной задаче относительно U, V, W, Q, T, R, к которой применимо преобразование Сквайра [6]. Именно, если положить $Z = \alpha_1 U + \alpha_2 V$, $k^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$, то получим следующую краевую задачу для Z, W, Q, T, R и параметра C:
при $0 < z < 1$

$$-iCZ - i\mu\varepsilon k^2 W/\mathrm{Pr} - i\mu\varepsilon^2 k^2 T'/\mathrm{Pr} = (1 + \varepsilon\mu z)(Z'' - k^2 Z - ik^2 Q); \tag{2.15}$$

$$-iCW - \mu\varepsilon W'/\mathrm{Pr} - \mu\varepsilon^2 k^2 T/\mathrm{Pr} = (1 + \varepsilon\mu z)(W'' - k^2 W - Q') + \mathrm{Ra}\,T/(1 + \varepsilon\mu z); \tag{2.16}$$

$$-iCT + \mu\varepsilon T'/\mathrm{Pr} + \mu W/\mathrm{Pr} = (1 + \varepsilon\mu z)(T'' - k^2 T)/\mathrm{Pr}; \tag{2.17}$$

$$iZ + W' = 0; \tag{2.18}$$

при $z = 1$

$$-Q + \gamma R/(1 + \mu\varepsilon) + 2W' + \varepsilon(1 + 1/\mathrm{Pr})T'' + \varepsilon k^2(1 - 1/\mathrm{Pr})T = -\,\mathrm{We}\,k^2 R; \tag{2.19}$$

$$Z' + 2i\varepsilon k^2 T' + ik^2 W = -i\,\mathrm{M}\,k^2(\mu R/\mathrm{Pr} + T); \tag{2.20}$$

$$T' + \mathrm{B}(T + \mu R/\mathrm{Pr}) = 0; \tag{2.21}$$

$$-iCR = W + \varepsilon T'; \tag{2.22}$$

при $z = 0$

$$Z = T = 0, \qquad W + \varepsilon T' = 0. \tag{2.23}$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по z.

3. Длинные волны. Найдем асимптотическое поведение спектральной задачи (2.15)–(2.23) при $k \to 0$. Положим

$$\begin{gathered} Z = Z_0 + k^2 Z_1 + \ldots, \quad W = W_0 + k^2 W_1 + \ldots, \quad Q = Q_0 + k^2 Q_1 + \ldots, \\ T = T_0 + k^2 T_1 + \ldots, \quad C = C_0 + k^2 C_1 + \ldots, \quad R = R_0 + k^2 R_1 + \ldots. \end{gathered}$$

В нулевом приближении получим задачу

$$\begin{gathered} -iC_0 Z_0 = (1 + \varepsilon\mu z)Z_0'', \\ -iC_0 W_0 - \mu\varepsilon W_0'/\mathrm{Pr} = (1 + \varepsilon\mu z)(W_0'' - Q') + \mathrm{Ra}\,T_0/(1 + \varepsilon\mu z), \\ -iC_0 T_0 + \mu\varepsilon T_0'/\mathrm{Pr} + \mu W_0/\mathrm{Pr} = (1 + \varepsilon\mu z)T_0''/\mathrm{Pr}, \end{gathered} \tag{3.1}$$

$$iZ_0 + W_0' = 0 \qquad (0 < z < 1);$$
$$-Q_0 + \gamma R_0/(1+\mu\varepsilon) + \varepsilon(1 + 1/\Pr)T_0'' = 0,$$
$$Z_0' = 0, \qquad \mu \Pr T_0' + \mathrm{B}(\mu \Pr T_0 + R_0) = 0, \tag{3.2}$$
$$-iC_0 R_0 = W_0 + \varepsilon T_0' \qquad (z = 1);$$
$$Z_0 = W_0 = T_0 = 0, \qquad W_0 + \varepsilon T_0' = 0 \qquad (z = 0). \tag{3.3}$$

Ясно, что спектральный параметр C_0 определяется из краевой задачи для Z_0. Так как

$$iC_0 \int\limits_0^1 \frac{|Z_0|^2}{1 + \varepsilon\mu z}\,dz = \int\limits_0^1 |Z_0'|^2\,dz,$$

то C_0 — чисто мнимое и $iC_0 > 0$. Легко уточнить значение C_0. Для этого введем новую переменную $s = 1 + \varepsilon\mu z$, тогда $sZ_{0ss} + d^2 Z_0 = 0$, $Z_0(1) = Z_0'(s_1) = 0$, $s_1 = 1 + \varepsilon\mu$, $d^2 = iC/\varepsilon^2 > 0$. Уравнение для $Z_0(s)$ имеет общее решение

$$Z_0 = \sqrt{s}\,[h_1 J_1(2d\sqrt{s}) + h_2 J_1(2d\sqrt{s}\,)], \qquad h_1, h_2 = \mathrm{const},$$

где J_1, Y_1 — функции Бесселя первого и второго рода. Граничные условия для Z_0 показывают, что $\tau = 2d$ есть корень трансцендентного уравнения

$$J_1(\tau)Y_0(\tau\sqrt{s_1}) - Y_1(\tau)J_0(\tau\sqrt{s_1}) = 0, \tag{3.4}$$

которое имеет счетное число [7] вещественных корней τ_n. Поэтому

$$iC_{0n} = \varepsilon^2\tau_n^2/4, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.5}$$

Итак, длинноволновые возмущения затухают монотонно независимо от знака θ_{01}.

4. Слой вязкой теплопроводной жидкости. В этом случае $\varepsilon = 0$ ($\beta = 0$) и задача (2.15)–(2.23) упрощается до следующей:

$$\begin{gathered} -iCZ = Z'' - k^2 Z - ik^2 Q, \qquad -iCW = W'' - k^2 W - Q', \\ -iC \Pr T + \mu W = T'' - k^2 T, \qquad iZ + W' = 0 \qquad (0 < z < 1); \end{gathered} \tag{4.1}$$

$$\begin{gathered} -Q + \gamma R + 2W' = -\mathrm{We}\, k^2 R, \qquad Z' + ik^2 W = -ik^2\,\mathrm{M}(\mu R/\Pr + T), \\ T' + \mathrm{B}(\mu R/\Pr + T) = 0, \qquad -iCR = W \qquad (z = 1); \end{gathered} \tag{4.2}$$

$$Z = W = T = 0 \qquad (z = 0). \tag{4.3}$$

Система (4.1) имеет общее решение

$$Z = id(b_1 \cos dz - b_2 \sin dz) + ik^2(a_1 \operatorname{sh} kz + a_2 \operatorname{ch} kz)/(k^2 + d^2),$$
$$W = b_1 \sin dz + b_2 \cos dz + k(a_1 \operatorname{ch} kz + a_2 \operatorname{sh} kz)/(k^2 + d^2),$$
$$Q = a_1 \operatorname{sh} kz + a_2 \operatorname{ch} kz, \tag{4.4}$$
$$T = h_1 \sin qz + h_2 \cos qz + \frac{\mu b_1 \sin dz}{q^2 - d^2} + \frac{\mu b_2 \cos dz}{q^2 - d^2} + \frac{k\mu}{(k^2 + d^2)(k^2 + q^2)}(a_1 \operatorname{ch} kz + a_2 \operatorname{sh} kz),$$

где a_1, a_2, b_1, b_2, h_1, h_2 — постоянные; $q^2 = iC\Pr - k^2$; $d^2 = iC - k^2$ ($\Pr \neq 1$).

Пусть $iC = \tau$, тогда $q^2 + k^2 = \tau \Pr$, $k^2 + d^2 = \tau$, $q^2 - d^2 = (\Pr - 1)\tau$, и из граничных условий (4.3) получим

$$b_1 = -\frac{k^2 a_2}{d\tau}, \qquad b_2 = -\frac{k a_1}{\tau}, \qquad h_2 = \frac{k\mu a_1}{\tau^2 \Pr(\Pr - 1)}. \tag{4.5}$$

Поскольку $R = -W/\tau$, условия (4.2) на свободной границе $z = 1$ сводятся к следующим ($\mu^2 = 1$):

$$\begin{gathered} 2W' - Q - (\gamma + k^2 \,\mathrm{We})W/\tau = 0, \\ Z' + ik^2 W + i\mu k^2 \,\mathrm{M}(\mu T - W/(\tau \Pr)) = 0, \qquad \mu \Pr T' + \mathrm{B}(\mu \Pr T - W/\tau) = 0. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Система (4.6) вместе с (4.5) позволяет определить комплексный декремент C при $\Pr \neq 1$. Однако соответствующий характеристический определитель является чрезвычайно сложным, и задача (4.1)–(4.3) при $\gamma = 0$ была решена в [8] численным методом — ортогонализации. Здесь приведем зависимость числа Марангони при $\gamma \neq 0$ для монотонных возмущений, когда $C = 0$. Вычисления показывают, что

$$\mathrm{M} = -\frac{8\mu k(k - \operatorname{sh} k \operatorname{ch} k)(k \operatorname{ch} k + \mathrm{B} \operatorname{sh} k)}{k^3 \operatorname{ch} k - \operatorname{sh}^3 k - 8k^5 \operatorname{ch} k \Pr^{-1}(\gamma + k^2 \,\mathrm{We})^{-1}}. \tag{4.7}$$

При $\gamma = 0$ оно совпадает с выражением, полученным в [8]. Из (4.7) при малых k следует

$$\mathrm{M} \sim -2\mu\gamma \Pr(\mathrm{B} + 1)/3. \tag{4.8}$$

Если провести аналогичные выкладки для модели Обербека — Буссинеска, то вместо (4.8) получим

$$\mathrm{M} \sim -(2/3)\mu\gamma \Pr(\mathrm{B} + 1) - (11/60)\,\mathrm{B}\,\mathrm{Ra}, \tag{4.9}$$

где Ra — число Рэлея. Заметим, что для нагрева снизу ($\mu = -1$) $\mathrm{Ra} \leqslant 40\gamma(\mathrm{B} + 1)/(11\,\mathrm{B}) = \mathrm{Ra}_*$ и при $\mathrm{Ra} > \mathrm{Ra}_*$ нейтральной кривой нет. При $\mathrm{B} \to \infty$ предельное значение Ra_* совпадает с вычисленным в [9] для $\mathrm{M} = 0$. Случай $\mathrm{B} = \infty$ означает, что на свободной поверхности задана температура, а не теплообмен с окружающей средой.

5. Анализ численных результатов. Прежде всего заметим, что параметр Буссинеска, число Рэлея и число Марангони пропорциональны, так как зависят от управляемого параметра — градиента температуры θ_{01}. Поэтому удобно ввести новые параметры $\alpha = \rho_0\nu\beta\chi/(æ l)$, $\Gamma = \rho_0\beta g l^2/\chi$ (тогда $\varepsilon = \alpha\,\mathrm{M}$, $\mathrm{Ra} = \Gamma\,\mathrm{M} = \Pr \alpha\gamma\,\mathrm{M}$) и определять число Марангони. Для модели Обербека — Буссинеска устойчивость слоя при линейной зависимости Ra и M изучалась в работах [10–12].

Численное решение задачи (2.15) – (2.23) для произвольных возмущений проводилось методом ортогонализации. Выражение (4.7) использовалось в качестве теста при численном построении нейтральных кривых. Результаты расчетов при $\alpha = 0$, $\Gamma \neq 0$ совпадают с приведенными в [10] численными данными, полученными в рамках модели Обербека — Буссинеска.

На рис. 1 приведены нейтральные кривые, построенные при $\gamma = 10^3$, $\Pr = 5{,}41 \cdot 10^{-3}$, $\mathrm{We} = 10^4$, $\alpha = 10^{-4}$. Кривая *1* соответствует монотонным возмущениям, кривая *2* — колебательным. При численном построении нейтральной кривой *2* использовались асимптотики (3.5), (4.9). На рисунке область устойчивости относительно монотонных возмущений лежит выше кривой *1*, относительно колебательных — внутри кривой *2*.

Проведенные расчеты показали, что при малых значениях параметров α и Γ качественное поведение нейтральных кривых совпадает с поведением соответствующих кривых для вязкой теплопроводной жидкости ($\alpha = 0$, $\gamma = 0$) [8]. Как установлено в [8], кривая *1* соответствует термокапиллярным возмущениям, связанным с неоднородностью нагрева

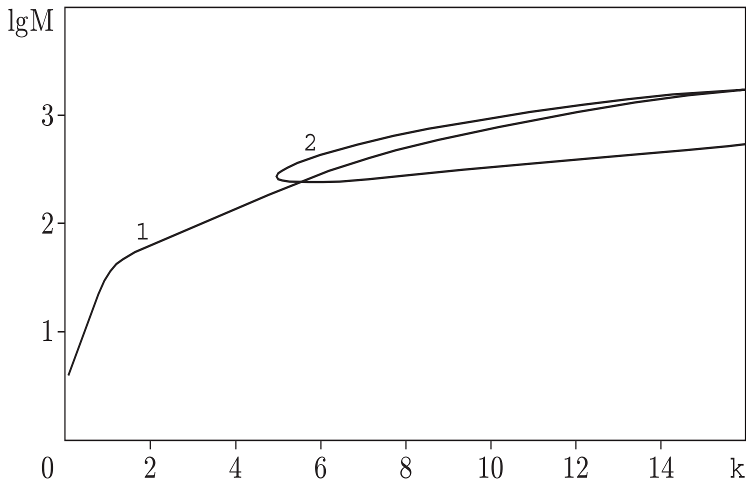

Рис. 1

Таблица 1

α	γ	M_*	k_*
0	0	224,93	5,35
0	10^3	226,51	5,35
10^{-4}	0	230,88	5,50
10^{-4}	10^3	232,47	5,50

Таблица 2

γ	M_{*1}	M_{*2}	M_{*3}	M_{*4}	M_{*5}
10^6	74,3	739,3	362,7	8032	9825,6
10^7	49,1	2357	767,3	3214,5	6122

жидкости, кривая *2* обозначает границу устойчивости относительно капиллярных возмущений, индуцированных деформациями свободной границы.

В табл. 1 для некоторых значений α и γ приведены минимальные значения M_* капиллярной нейтральной кривой (кривая *2*) и значения волнового числа k_*, при которых эти минимумы достигаются. Таким образом, учет сжимаемости жидкости ($\alpha \neq 0$) приводит к стабилизации капиллярных возмущений, при этом даже при малых величинах параметра α значения критических чисел Марангони могут заметно различаться.

Еще одной особенностью рассматриваемой модели является появление — с усилением влияния гравитационных сил — новых нейтральных кривых, обусловленное учетом сжимаемости жидкости. На рис. 2, построенном при $\gamma = 10^6$, $\mathrm{Pr} = 5{,}41 \cdot 10^{-3}$, $\mathrm{We} = 10^4$, $\alpha = 10^{-4}$, эти новые нейтральные кривые обозначены цифрами *3*–*5*, кривые *1, 2* — те же, что и на рис. 1. Возмущения, соответствующие новому механизму неустойчивости, нарастают монотонно, при этом область неустойчивости расположена выше соответствующей нейтральной кривой. Как показано на рис. 3, построенном при $\gamma = 10^7$, с увеличением силы тяжести происходит дальнейшая стабилизация капиллярных возмущений, а порог устойчивости для термокапиллярных возмущений и новых возмущений, обусловленных сжимаемостью жидкости, понижается. В табл. 2 приведены минимальные значения M_{*j}, соответствующие j-м нейтральным кривым на рис. 2, 3.

На рис. 4, построенном при $\gamma = 10^7$, $\mathrm{M} = 3400$, $\mathrm{Pr} = 5{,}41 \cdot 10^{-3}$, $\mathrm{We} = 10^4$, $\alpha = 10^{-4}$, показано поведение комплексного декремента задачи в зависимости от волнового числа. Здесь кривая *1* соответствует термокапиллярной монотонной моде, кривая *2* — капиллярной колебательной. Кривыми *3, 4* обозначены новые возмущения, обусловленные сжимаемостью жидкости. Значения собственных чисел задачи, соответствующие нейтральной кривой *5* (на рис. 2, 3), лежат в отрицательной полуплоскости и на рис. 4 не приведены.

Влияние увеличения числа Прандтля на устойчивость равновесия иллюстрирует рис. 5, построенный при $\gamma = 10^6$, $\mathrm{Pr} = 1$, $\mathrm{We} = 10^4$, $\alpha = 10^{-4}$ (нумерация нейтральных кри-

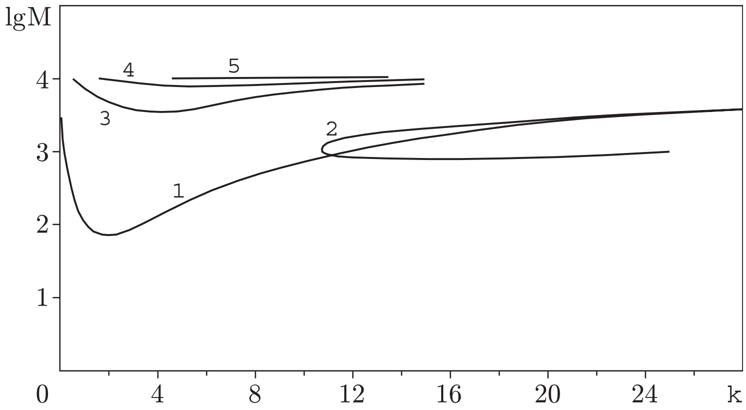

Рис. 2

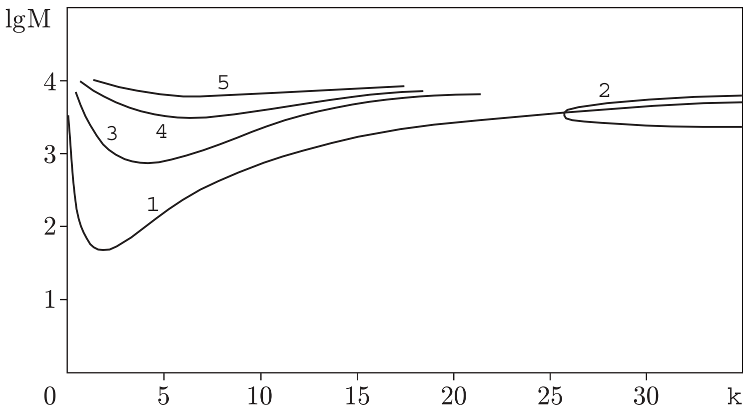

Рис. 3

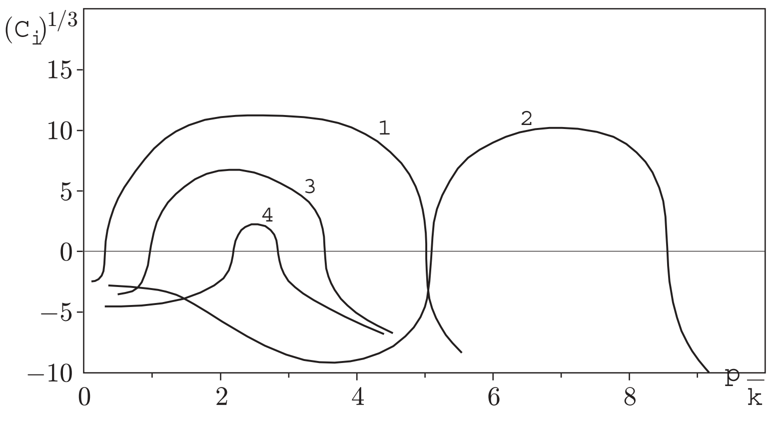

Рис. 4

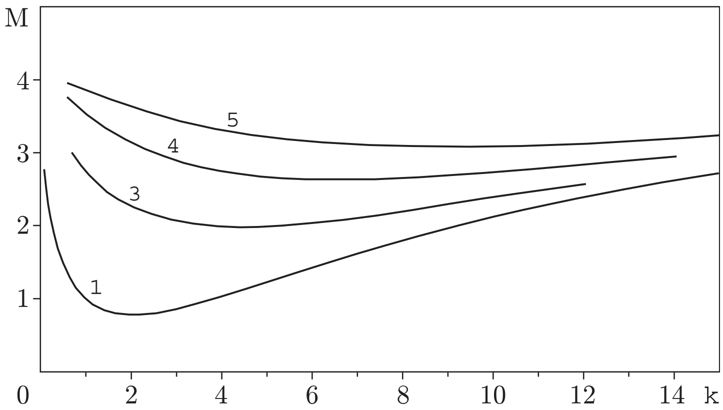

Рис. 5

Таблица 3

We	M_{*1}	M_{*2}	M_{*3}	M_{*4}	M_{*5}
10^2	74,3	209,8	361,3	8032	9825,6
10^6	74,6	—	373,4	8165,6	9831,7

вых здесь та же, что и на предыдущих рисунках). На рисунке не приведена нейтральная кривая для капиллярных возмущений. С ростом числа Прандтля область неустойчивости сдвигается в сторону очень коротких волн, а минимальное значение числа Марангони сильно увеличивается. Увеличение Pr приводит к существенной дестабилизации монотонных возмущений. Порог устойчивости для всех возмущений понижается. Так, относительно термокапиллярных возмущений потеря устойчивости происходит уже при $\mathrm{M} = 6{,}2$.

Влияние деформируемости свободной границы на устойчивость равновесия иллюстрирует табл. 3, построенная при $\gamma = 10^6$, $\mathrm{Pr} = 5{,}41 \cdot 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-4}$. С уменьшением числа Вебера значительно понижается порог устойчивости для капиллярных возмущений, и, соответственно, с увеличением We происходит стабилизация равновесия относительно этих возмущений. При этом для $\mathrm{We} = 10^6$ капиллярная неустойчивость вообще отсутствует. Для монотонных возмущений изменения числа Вебера практически не влияют на изменения порога устойчивости.

На основании приведенных выше результатов можно сделать вывод, что в широком диапазоне параметров задачи наиболее опасны термокапиллярные возмущения, однако в области очень коротких волн при небольших значениях Pr и We доминируют колебательные капиллярные возмущения.

Оценены границы применимости различных моделей (микроконвекции, Обербека — Буссинеска и вязкой теплопроводной жидкости) в рассматриваемой задаче об устойчивости равновесия (1.12). Исследование влияния сил плавучести проводилось при фиксированных значениях $\alpha = 10^{-4}$, $\mathrm{Pr} = 5{,}41 \cdot 10^{-3}$, $\mathrm{We} = 10^4$. В качестве критерия использовалось соотношение $\min\limits_k (|\,\mathrm{M}(k) - \mathrm{M}_t(k)|/\,\mathrm{M}(k)) \leqslant 0{,}05$, где $\mathrm{M}_t(k)$ — нейтральная кривая, построенная в рамках модели вязкой теплопроводной жидкости ($\alpha = 0$). Проведенные расчеты показали, что учет сил плавучести приводит к заметным различиям чисел Марангони (больше 5 %) при $\gamma = 8 \cdot 10^5$. Относительная погрешность при нахождении критического числа Марангони уменьшается с уменьшением γ.

При исследовании сжимаемости жидкости критерием служило соотношение $\min\limits_k (|\,\mathrm{M}(k) - \mathrm{M}_b(k)|/\,\mathrm{M}(k)) \leqslant 0{,}05$, где $\mathrm{M}_b(k)$ — нейтральная кривая, построенная по модели Обербека — Буссинеска ($\alpha = 0$, $\Gamma \neq 0$). Расчеты проводились при $\gamma = 10^4$, $\mathrm{Pr} = 5{,}41 \cdot 10^{-3}$, $\mathrm{We} = 10^4$. Показано, что учет сжимаемости начинает играть заметную роль при $\alpha > 2 \cdot 10^{-4}$. Здесь также относительная погрешность уменьшается с уменьшением α.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пухначев В. В.** Модель конвективного движения при пониженной гравитации // Моделирование в механике. 1992. Т. 6, № 4. С. 47–56.
2. **Андреев В. К., Бекежанова В. Б.** Возникновение микроконвекции в плоском слое. Красноярск, 2001. (Препр. / СО РАН. Ин-т вычисл. моделирования; № 1-01).
3. **Пухначев В. В., Солонников В. А.** К вопросу о динамическом краевом угле // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, вып. 6. С. 961–971.
4. **Пухначев В. В.** Движение вязкой жидкости со свободными границами: Учеб. пособие. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1989.
5. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
6. **Монин А. С., Яглом А. М.** Статистическая гидродинамика. М.: Наука, 1965. Ч. 1.
7. **Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.** Специальные функции. М.: Наука, 1977.
8. **Рябицкий Е. А.** Термокапиллярная неустойчивость равновесия плоского слоя при наличии вертикального градиента температуры // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1992. № 3. С. 19–23.
9. **Изаксон В. Х., Юдович В. И.** О возникновении конвекции в слое жидкости со свободной границей // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1968. № 4. С. 23–28.
10. **Hashim I., Wilson S. K.** The onset of Benard — Marangoni convection in a horizontal layer of fluid // Intern. J. Engng Sci. 1999. V. 37. P. 643–662.
11. **Bengyria R. D., Derassier M. C.** On the linear stability of Benard — Marangoni convection // Phys. Fluids A. 1989. V. 1, N 7. P. 1123–1127.
12. **Peter-Garcia C., Carneiro G.** Linear stability analysis of Benard — Marangoni convection in fluids with a deformable free surface // Phys. Fluids A. 1991. V. 3, N 2. P. 292–298.

Поступила в редакцию 30/XII 2002 г.,
в окончательном варианте — 5/VIII 2003 г.