УДК 539.374

КВАЗИСТАТИЧЕСКОЕ СЖАТИЕ И РАСТЕКАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОНКОГО НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ

Д. В. Георгиевский, В. С. Юшутин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва
E-mails: georgiev@mech.math.msu.su, vladimir.yushutin@gmail.com

С использованием методов асимптотического интегрирования, интенсивно развиваемых в последние годы в механике деформируемого тонкого тела, строится решение задачи о квазистатическом сжатии и растекании (выдавливании) тонкого вязкопластического слоя между сближающимися абсолютно жесткими параллельно расположенными плитами. Симметричное относительно осей координат решение ищется в той же области слоя, что и в классической задаче Прандтля. Материал слоя характеризуется пределом текучести и функцией упрочнения, связывающей интенсивности тензоров напряжения и скоростей деформаций. На поверхностях плит принимаются условия непротекания и достижения касательными напряжениями определенных значений. Находятся коэффициенты при членах асимптотических разложений, соответствующих минус первой и нулевой степеням малого геометрического параметра. Приводится приближенное аналитическое решение в случае степенного упрочнения и больших чисел Сен-Венана. Обсуждается физический смысл коэффициента шероховатости, характеризующего сцепление плит и вязкопластического материала.

Ключевые слова: вязкопластическое течение, материал Бингама, задача Прандтля, асимптотические разложения, сжатие, растекание, выдавливание.

Введение. Первые аналитические исследования [1, 2] безынерционного сжатия несжимаемого вязкопластического слоя движущимися навстречу друг другу абсолютно жесткими плитами основаны на предположении о существовании в центре зазора между плитами жесткого ядра. В действительности, как отмечено в работе [3], интенсивность напряжений превышает предел текучести всюду внутри зазора, за исключением малой области в окрестности центра сжимающих плит. Об этом свидетельствует тот факт, что решение классической задачи Прандтля, моделирующее сжатие и растекание плоского идеально жесткопластического слоя (течение Сен-Венана), имеет место всюду в слое, за исключением торцевых зон, в которых проявляется краевой эффект, и зоны в окрестности центра плит. При этом жесткие ядра отсутствуют. Предельный переход от двухконстантной модели Бингама к идеально пластическому телу, имеющий место при стремлении числа Сен-Венана S к бесконечности, не затрагивает "пластические свойства" течения, такие как наличие либо отсутствие жестких зон, а влияет лишь на появление либо исчезновение пограничных слоев.

В работе [3] построен вязкопластический аналог решения Прандтля в случае малой вязкости ($S \gg 1$). Область течения, в которой преобладающее значение имеют вязкие

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 09-01-00582-а, 11-01-00181-а).

составляющие тензора напряжений, локализована в узких слоях вблизи поверхностей плит. Даны асимптотические описания движения во внешнем потоке и в тонком пограничном слое (с безразмерной толщиной порядка $1/\sqrt{\mathrm{S}}$) с последующей сшивкой асимптотик.

В работах [4–6] для описания безынерционного приближения в рассматриваемой задаче при любых числах S в качестве основы выбрана постановка в напряжениях в тонком слое, совпадающая с постановкой Рейнольдса в случае ньютоновской жидкости. Таким образом, в каждый момент времени сжатие и растекание интерпретируются как одномерный сдвиг и моделируются течением Пуазейля с собственными геометрическими параметрами и неизвестным заранее, но постоянным по длине перепадом давления. Поскольку профиль вязкопластического течения Пуазейля — парабола с плоской вставкой — всегда имеет жесткое ядро в середине зазора, использование данного подхода однозначно приводит к существованию в рассматриваемой задаче недеформируемого слоя. По известному закону сближения прессующих плит найдена сила, которую необходимо приложить для осуществления процесса, и наоборот, по заданной силе определен закон изменения толщины вязкопластического слоя.

Различные аналитические, численные и экспериментальные аспекты технологического процесса выдавливания тонкого слоя из материала Бингама параллельными плитами (плоская и осесимметричная задачи) хорошо изучены в последнее десятилетие [7–12] и отражены в современных обзорах (см., например, [13]). В этих и других работах исследования проводятся в двух направлениях. Одно из них посвящено всевозможным обобщениям существенно неодномерного решения Прандтля (при этом, как отмечено выше, жесткие ядра отсутствуют для любых чисел S вплоть до бесконечности). Другое направление изначально связано с разбиением слоя по толщине на жесткие участки и области сдвига, а также с поиском и сшивкой соответствующих решений. Отметим также работу [14], посвященную асимптотическому анализу поведения тела Бингама в тонких слоях.

В настоящей работе с использованием методики асимптотического интегрирования построено решение, соответствующее безынерционному вязкопластическому течению в той же области тонкого слоя, что и в классической задаче Прандтля. Слой сдавливается абсолютно жесткими параллельно расположенными плитами, движущимися навстречу друг другу с известными постоянными скоростями. Материал слоя помимо предела текучести характеризуется функцией упрочнения (реологической кривой), связывающей интенсивности тензоров напряжения и скоростей деформаций.

1. Постановка квазистатической задачи. Рассмотрим плоское безынерционное течение несжимаемого вязкопластического материала с пределом текучести σ_s в тонком прямоугольном слое:

$$\Omega_t = \{-l(t) < x_1 < l(t),\ -h(t) < x_2 < h(t)\}, \quad h \ll l; \tag{1.1}$$
$$h(t) = h_0 - Vt, \quad V = \mathrm{const}, \quad h(0) = h_0, \quad l(0) = l_0.$$

Поверхности $x_2 = \pm h$ слоя соприкасаются с движущимися навстречу друг другу со скоростями V абсолютно жесткими шероховатыми плитами. Таким образом, осуществляются сжатие и растекание слоя, являющиеся неотъемлемой составляющей многих технологических процессов при обработке материалов давлением.

Предположим, что в области течения материал удовлетворяет тензорно линейным определяющим соотношениям

$$\frac{s_{ij}}{\sigma_u} = \frac{v_{ij}}{v_u}, \quad \sigma_u = \sqrt{\tilde{s} : \tilde{s}}\,, \quad v_u = \sqrt{\tilde{v} : \tilde{v}}\,, \qquad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \tag{1.2}$$

означающим равенство единичных направляющих девиаторов напряжений $\tilde{s}$ и скоростей деформаций $\tilde{v}$ (σ_u, v_u — соответствующие интенсивности). В плоском случае равенства (1.2) сводятся к одному независимому условию соосности $s_{11}v_{12} = s_{12}v_{11}$. Также имеет место скалярное определяющее соотношение

$$\sigma_u = \sigma_s + F(v_u), \qquad \lim_{v_u \to 0} F(v_u) = 0. \tag{1.3}$$

В (1.3) монотонно возрастающая функция упрочнения F характеризует нелинейно-вязкопластические свойства материала. В случае линейного упрочнения $F(v_u) = 2\mu v_u$ получаем двухконстантный материал Бингама с динамической вязкостью μ.

В некоторый момент времени $t \in [0; h_0/V[$ для пяти функций — давления p и компонент s_{11}, s_{12}, v_1, v_2 ($\tilde{v} = \operatorname{def} \boldsymbol{v}$ — деформация поля вектора $\boldsymbol{v}$) — в области течения выполняются следующие уравнения:

$$-p_{,1} + s_{11,1} + s_{12,2} = 0, \qquad -p_{,2} - s_{11,2} + s_{12,1} = 0; \tag{1.4}$$

$$s_{11}(v_{1,2} + v_{2,1}) = 2s_{12}v_{1,1}; \tag{1.5}$$

$$\sqrt{2(s_{11}^2 + s_{12}^2)} = \sigma_s + F(v_u); \tag{1.6}$$

$$v_{1,1} + v_{2,2} = 0, \tag{1.7}$$

где $v_u = \sqrt{[4v_{1,1}^2 + (v_{1,2} + v_{2,1})^2]/2}$.

Примем кинематические условия непротекания сквозь плоскости плит

$$v_2\big|_{x_2=-h} = V, \qquad v_2\big|_{x_2=h} = -V, \tag{1.8}$$

не ограничивая при этом требованием прилипания компоненту скорости $v_1\big|_{x_2=\pm h}$. Такое требование моделировало бы движение среды, отличное от ее растекания вдоль оси x_1. Поверхности $x_1 = \pm l$ слоя свободны от нагрузок, однако на них точные граничные условия не задаются. Области на расстоянии порядка h вблизи поверхностей $x_1 = \pm l$ трактуются как зоны, в которых проявляется краевой эффект.

2. Разложения по асимптотическому геометрическому параметру. Введем малый геометрический параметр $\alpha = h/l \ll 1$ и разложим в ряды по α пять неизвестных функций, входящих в систему (1.4)–(1.7) [15, 16]:

$$\begin{gathered} v_1(x_1, x_2) = V\bar{v}_1 = V(\alpha^{-1}\bar{v}_1^{\{-1\}} + \bar{v}_1^{\{0\}} + \alpha\bar{v}_1^{\{1\}} + \ldots), \\ v_2(x_1, x_2) = V\bar{v}_2 = V(\bar{v}_2^{\{0\}} + \alpha\bar{v}_2^{\{1\}} + \ldots), \\ s_{1i}(x_1, x_2) = \tau_s\bar{s}_{1i} = \tau_s(\bar{s}_{1i}^{\{0\}} + \alpha\bar{s}_{1i}^{\{1\}} + \ldots), \qquad i = 1, 2, \\ p(x_1, x_2) = \tau_s\bar{p} = \tau_s(\alpha^{-1}\bar{p}^{\{-1\}} + \bar{p}^{\{0\}} + \alpha\bar{p}^{\{1\}} + \ldots), \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\tau_s = \sigma_s/\sqrt{2}$ — предел текучести при сдвиге. Безразмерные коэффициенты в (2.1) зависят от безразмерных координат η_1 и η_2:

$$\eta_1 = \frac{x_1}{l} = \frac{\alpha x_1}{h}, \qquad \eta_2 = \frac{x_2}{h}.$$

Подставляя ряды (2.1) в уравнения (1.4)–(1.7) и граничные условия (1.8) и уравнивая коэффициенты при α^{-1} и α^0, получаем уравнения

$$\bar{p}_{,2}^{\{-1\}} = 0, \qquad -\bar{p}_{,1}^{\{-1\}} + \bar{s}_{12,2}^{\{0\}} = 0, \qquad \bar{p}_{,2}^{\{0\}} + \bar{s}_{11,2}^{\{0\}} = 0; \tag{2.2}$$

$$\bar{v}_{1,2}^{\{-1\}} = 0, \qquad s_{11}^{\{0\}}\bar{v}_{1,2}^{\{0\}} = 2s_{12}^{\{0\}}\bar{v}_{1,1}^{\{-1\}}; \tag{2.3}$$

$$\sqrt{\left(\bar{s}_{11}^{\{0\}}\right)^2 + \left(\bar{s}_{12}^{\{0\}}\right)^2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{S}}\, f\left(\sqrt{\left[4\left(\bar{v}_{1,1}^{\{-1\}}\right)^2 + \left(\bar{v}_{1,2}^{\{0\}}\right)^2\right]/2}\,\right); \tag{2.4}$$

$$\bar{v}_{1,1}^{\{-1\}} + \bar{v}_{2,2}^{\{0\}} = 0 \tag{2.5}$$

с условиями

$$\bar{v}_2^{\{0\}}\big|_{\eta_2=-1} = 1, \qquad \bar{v}_2^{\{0\}}\big|_{\eta_2=1} = -1. \tag{2.6}$$

В (2.4) безразмерный критерий подобия $\mathrm{S} = \tau_s h/(\mu V)$, построенный по характерной динамической вязкости μ модели, описывает отношение пластических и вязких свойств тела и по предложению А. А. Ильюшина [17] назван числом Сен-Венана. Функция упрочнения F в (1.6) и соответствующая ей безразмерная функция f в (2.4) связаны следующим образом:

$$F(v_u) = \tau_s f(\bar{v}_u)/\mathrm{S},$$

$$\bar{v}_u = \sqrt{[4(\bar{v}_{1,1})^2 + (\bar{v}_{1,2} + \bar{v}_{2,1})^2]/2} = \sqrt{\left[4\left(\bar{v}_{1,1}^{\{-1\}}\right)^2 + \left(\bar{v}_{1,2}^{\{0\}}\right)^2\right]/2} + \alpha \bar{v}_u^{\{1\}} + \ldots.$$

При моделировании пластических течений наиболее часто используются следующие виды упрочнений.

1. Степенное упрочнение: $F(v_u) = 2av_u^\gamma$. Положим $0 < \gamma \leqslant 1$, т. е. материал имеет "мягкую" характеристику. Тогда

$$f(\bar{v}_u) = 2\bar{v}_u^\gamma, \qquad \mu = a(h/V)^{1-\gamma}, \qquad \mathrm{S} = (\tau_s/a)(h/V)^\gamma. \tag{2.7}$$

2. Тригонометрическое упрочнение: $F(v_u) = \tau_0 \operatorname{arctg}(Tv_u)$, где τ_0, T — параметры модели ("второй предел текучести" и характерное время). В этом случае

$$f(\bar{v}_u) = \operatorname{arctg}(\bar{v}_u/\mathrm{Sh}), \qquad \mu = \tau_0 h/V,$$

где $\mathrm{Sh} = h/(VT)$ — число Струхаля.

3. Логарифмическое упрочнение: $F(v_u) = \tau_0 \ln(1 + Tv_u)$. Имеем

$$f(\bar{v}_u) = \ln(1 + \bar{v}_u/\mathrm{Sh}), \qquad \mu = \tau_0 h/V.$$

3. Асимптотическое интегрирование. Известно, что методика асимптотического интегрирования краевых задач механики деформируемого тонкого тела, развитая в [17–19] и других работах, позволяет "расщепить" исходную постановку на ряд более простых для аналитико-численного исследования постановок задач. Подобная процедура применительно к классической задаче Прандтля и ряду задач, обобщающих ее геометрию, изложена в [15, 16]. Проведем последовательное интегрирование уравнений (2.2)–(2.5), позволяющее определить коэффициенты при первых членах асимптотических разложений (2.1).

Из первого уравнения (2.3), уравнения (2.5) и граничных условий (2.6) находим коэффициенты при главных членах кинематических величин в (2.1):

$$\bar{v}_1^{\{-1\}} = \eta_1, \qquad \bar{v}_2^{\{0\}} = -\eta_2, \tag{3.1}$$

справедливые и в случае переносного движения вдоль оси x_1 как жесткого целого.

Из первых двух уравнений (2.2) и требования равенства значений модуля касательного напряжения s_{12} на обеих поверхностях плит (при одном и том же значении x_1) получаем

$$s_{12}^{\{0\}} = -m(\eta_1)\eta_2, \qquad \bar{p}^{\{-1\}} = \bar{p}_0^{\{-1\}} - \int\limits_0^{\eta_1} m(\xi)\, d\xi. \tag{3.2}$$

Здесь $\bar{p}_0^{\{-1\}}$ — гидростатическая постоянная; $m(\eta_1)$ — неизвестная функция интегрирования, модуль которой в теории идеально жесткопластического течения имеет механический смысл шероховатости прессующих плит [15]. Абсолютно шероховатым плитам (максимальному сцеплению) соответствует значение $|m| \equiv 1$.

Знание (с точностью до функции $m(\eta_1)$) четырех коэффициентов (3.1), (3.2) из семи в соотношениях (2.2)–(2.5) позволяет представить второе уравнение (2.3) и уравнение (2.4) в виде системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\bar{s}_{11}^{\{0\}} \bar{v}_{1,2}^{\{0\}} = -2m\eta_2; \tag{3.3}$$

$$\sqrt{\left(\bar{s}_{11}^{\{0\}}\right)^2 + m^2\eta_2^2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{S}}\, f\Big(\sqrt{\big[4 + \big(\bar{v}_{1,2}^{\{0\}}\big)^2\big]/2}\,\Big) \tag{3.4}$$

относительно $\bar{s}_{11}^{\{0\}}(\eta_1, \eta_2)$ и $\bar{v}_{1,2}^{\{0\}}(\eta_1, \eta_2)$. Из решения этой системы и интегрирования по η с условием четности находится компонента скорости $\bar{v}_1^{\{0\}}$. Последняя неизвестная функция — давление $\bar{p}^{\{0\}}$ — определяется из третьего уравнения (2.2) с точностью до произвольной функции $h(\eta_1)$:

$$\bar{p}^{\{0\}} = -\bar{s}_{11}^{\{0\}} + h(\eta_1). \tag{3.5}$$

Исследуем условия четности и нечетности по η_1 и η_2 полученных коэффициентов рядов (2.1) с индексами $\{-1\}$ и $\{0\}$. Давление $p(x_1, x_2)$, как и все его составляющие в (2.1), в частности $\bar{p}^{\{-1\}}(\eta_1, \eta_2)$, будем искать в классе четных по x_1 (по η_1) функций. Тогда из выражений (3.2) следует, что функция $m(\eta_1)$ является нечетной. Анализ второго соотношения (3.2) также показывает, что необходимо положить

$$\bar{p}_0^{\{-1\}} = \int\limits_0^1 m(\eta_1)\, d\eta_1, \tag{3.6}$$

для того чтобы при любом $\alpha > 0$ давление $p(x_1, x_2)$ в окрестности торцов $x_1 = \pm l$ было конечным:

$$\bar{p}^{\{-1\}}(\eta_1) = \int\limits_{\eta_1}^1 m(\xi)\, d\xi.$$

Положительность величины $\bar{p}^{\{-1\}}$ во всей области слоя означает, что $m > 0$ при $\eta_1 > 0$ ($m < 0$ при $\eta_1 < 0$).

Примем следующее распределение знаков производной $\bar{v}_{1,2}^{\{0\}}(\eta_1, \eta_2)$ в различных четвертях слоя: $\bar{v}_{1,2}^{\{0\}} > 0$, если $\eta_1\eta_2 < 0$; $\bar{v}_{1,2}^{\{0\}} < 0$, если $\eta_1\eta_2 > 0$. Это соответствует "выпуклости вне слоя" профиля скорости $\bar{v}_1^{\{0\}}$ (на фоне главного, не зависящего от параметра η_2, потока $\bar{v}_1^{\{-1\}}(\eta_1)$) в процессе сближения плит. В аналогичной задаче для плит, удаляющихся друг от друга, естественен выбор "выпуклости внутрь слоя".

С учетом изложенного из уравнения (3.3) следует, что всюду $\bar{s}_{11}^{\{0\}} \geqslant 0$.

4. Приближенное аналитическое решение в случае степенного упрочнения и $\mathrm{S} \gg 1$. Приведем приближенное аналитическое решение системы (3.3), (3.4) для степенного упрочнения (2.7) (см. также [8]). В этом случае уравнение (3.4) имеет вид

$$\sqrt{\left(\bar{s}_{11}^{\{0\}}\right)^2 + m^2\eta_2^2} = 1 + \frac{2^{(1-\gamma)/2}}{\mathrm{S}}\big[4 + \big(\bar{v}_{1,2}^{\{0\}}\big)^2\big]^{\gamma/2}. \tag{4.1}$$

Решая систему (3.3), (4.1) в виде регулярных разложений по $1/\mathrm{S}$ ($\mathrm{S} \gg 1$)

$$\bar{s}_{11}^{\{0\}} = \sqrt{1 - m^2\eta_2^2} + \frac{A(\eta_1, \eta_2)}{\mathrm{S}} + \ldots, \qquad \bar{v}_{1,2}^{\{0\}} = -\frac{2m\eta_2}{\sqrt{1 - m^2\eta_2^2}} + \frac{B(\eta_1, \eta_2)}{\mathrm{S}} + \ldots \tag{4.2}$$

вблизи прандтлевских значений, получаем следующие функции A и B:

$$A = \Big(\frac{2}{1 - m^2\eta_2^2}\Big)^{(1+\gamma)/2}, \qquad B = m\eta_2\Big(\frac{2}{1 - m^2\eta_2^2}\Big)^{(3+\gamma)/2}.$$

Таким образом, имеем

$$\bar{s}_{11}^{\{0\}} = \sqrt{1 - m^2\eta_2^2} + \frac{1}{\mathrm{S}}\Big(\frac{2}{1 - m^2\eta^2}\Big)^{(1+\gamma)/2} + \ldots; \tag{4.3}$$

$$\bar{v}_1^{\{0\}} = \frac{2}{m}\Big[\sqrt{1 - m^2\eta_2^2} + \frac{1}{\mathrm{S}(1+\gamma)}\Big(\frac{2}{1 - m^2\eta^2}\Big)^{(1+\gamma)/2} + \ldots\Big] + g(\eta_1) \tag{4.4}$$

($g(\eta_1)$ — функция интегрирования).

Если предположить, что асимптотические разложения справедливы во всей области (1.1) и сходятся к решению задачи (1.4)–(1.8), то функция $m(\eta_1)$, являясь нечетной, при $\eta_1 = 0$ должна обращаться в нуль. Предельный переход $m(0) \to 0$ выдерживают все полученные функции, за исключением $\bar{v}_1^{\{0\}}$ (4.4). При $m(0) \to 0$ ряд (2.1) для $v_1(x_1, x_2)$ перестает быть асимптотическим в смысле Пуанкаре в окрестности сечения $\eta_1 = 0$. Следовательно, все разложения (2.1) несправедливы вблизи этого сечения. Выражения (4.3), (4.4) свидетельствуют также о том, что регулярные разложения по $1/\mathrm{S}$ (4.2) справедливы вне окрестностей точек, в которых $m^2\eta^2 \geqslant 1$. Данные точки могут присутствовать в области Ω_t, если существуют такие значения η_1, при которых $m^2(\eta_1) \geqslant 1$. В этом случае необходимы разложения в приближении пограничного слоя [3] вблизи поверхностей жестких плит. Если $m^2(\eta_1) < 1$ при любом значении η_1, то решения (4.3), (4.4) применимы всюду в области Ω_t, за исключением области вблизи срединного сечения $\eta_1 = 0$.

Запишем условие несжимаемости (1.7) и граничные условия (1.8) в следующем после используемого в (2.5), (2.6) приближении по α:

$$\bar{v}_{1,1}^{\{0\}} + \bar{v}_{2,2}^{\{1\}} = 0, \qquad \bar{v}_2^{\{1\}}\big|_{\eta_2 = \mp 1} = 0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial}{\partial \eta_1}\int\limits_{-1}^{1} \bar{v}_1^{\{0\}}(\eta_1, \eta_2)\, d\eta_2 = 0. \tag{4.5}$$

Если $m^2 < 1$, то интегральное условие (4.5) позволяет связать входящие в (4.4) функции $m(\eta_1)$ и $g(\eta_1)$:

$$g = -\frac{1}{m}\int\limits_{-1}^{1}\Big[\sqrt{1 - m^2\eta_2^2} + \frac{1}{\mathrm{S}(1+\gamma)}\Big(\frac{2}{1 - m^2\eta^2}\Big)^{(1+\gamma)/2} + \ldots\Big]\, d\eta_2.$$

5. Задание функции m и ее физический смысл. В п. **3** приведена принципиальная схема нахождения семи коэффициентов с верхними индексами $\{-1\}$ и $\{0\}$ в разложениях (2.1). Вместе с тем осталась свобода выбора функции $m(\eta_1)$, впервые возникающей в (3.2) при интегрировании уравнений (2.2). Известно, что в силу симметрии задачи относительно оси $\eta_1 = 0$ эта функция является нечетной и положительной при $\eta_1 > 0$.

Как отмечено выше, в классической задаче Прандтля, моделирующей идеально жесткопластическое течение, функция $m(\eta_1)$ имеет следующий физический смысл: ее модуль равен коэффициенту шероховатости плит — величине, характеризующей покрытие самих плит. Выражения (3.2) справедливы и в этой задаче, поэтому данный коэффициент шероховатости определяется как модуль касательного напряжения $\bar{s}_{12}^{\{0\}}$ на поверхностях плит (при $\eta_2 = \pm 1$). Так как в силу условия пластичности Мизеса — Генки $\left|\bar{s}_{12}^{\{0\}}\right| \leqslant 1$, то $-1 \leqslant m \leqslant 1$ и $1/m = O(1)$.

Подобная интерпретация имеет место в случае вязкопластического течения, рассматриваемого в настоящей работе. При $\mathrm{S} < \infty$ скалярное определяющее соотношение (2.4) допускает неравенство $\bar{s}_{12}^{\{0\}} > 1$, т. е. согласно (3.2) значение $|m(\eta_1)|$ может быть больше единицы. Величину $|m|$ уже нельзя назвать коэффициентом шероховатости, особенно если считать, что максимальному сцеплению соответствует максимальное значение $|m| = 1$. Однако определение функции m как касательного напряжения на поверхностях плит сохраняется. Эта характеристика сцепления плит с материалом слоя должна задаваться как граничное условие (наряду с кинематическим требованием (1.8)):

$$s_{12}\big|_{x_2=-h} = m\tau_s, \qquad s_{12}\big|_{x_2=h} = -m\tau_s.$$

Следовательно, для коэффициентов $\bar{s}_{12}^{\{n\}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ в (2.1) граничные условия имеют вид

$$\bar{s}_{12}^{\{0\}}\big|_{\eta_2=\mp 1} = \pm m(\eta_1), \qquad \bar{s}_{12}^{\{1\}}\big|_{\eta_2=\mp 1} = \bar{s}_{12}^{\{2\}}\big|_{\eta_2=\mp 1} = \ldots = 0. \tag{5.1}$$

С учетом однородных условий (5.1) для $\bar{s}_{12}^{\{1\}}$ и очередного после используемого в (2.2) приближения по α первого уравнения равновесия (1.4)

$$-\bar{p}_{,1}^{\{0\}} + \bar{s}_{11,1}^{\{0\}} + \bar{s}_{12,2}^{\{1\}} = 0$$

нетрудно найти неизвестную в (3.5) функцию h. Имеем

$$h(\eta_1) = \int\limits_{-1}^{1} \bar{s}_{11}^{\{0\}}(\eta_1, \eta_2)\, d\eta_2 + \bar{p}_0^{\{0\}},$$

где $\bar{p}_0^{\{0\}}$ — гидростатическая постоянная следующего после используемого в (3.6) порядка приближения по малому параметру α.

Область определения функции $m(\eta_1)$ обусловлена выбранной в (3.4) нелинейновязкопластической моделью, т. е. функцией f. Функция $m(\eta_1)$ должна быть такой, чтобы при любом $\eta_2 \in [-1; 1]$ из (3.4) определялась компонента $\bar{s}_{11}^{\{0\}}$. Так, в случае линейного упрочнения, когда в (2.7) надо положить $\gamma = 1$, $f(\bar{v}_u) = 2\bar{v}_u$, из системы (3.3), (3.4) следует алгебраическое уравнение относительно $\bar{s}_{11}^{\{0\}}$:

$$\sqrt{\left(\bar{s}_{11}^{\{0\}}\right)^2 + m^2\eta_2^2} = \frac{\bar{s}_{11}^{\{0\}}}{\bar{s}_{11}^{\{0\}} - 2/\mathrm{S}}. \tag{5.2}$$

Нетрудно показать, что при конечных числах Сен-Венана уравнение (5.2) имеет единственный положительный корень $\bar{s}_{11}^{\{0\}} > 2/\mathrm{S}$ при любом выборе параметра $m^2\eta_2^2$. Следовательно, диапазон задания функции $|m(\eta_1)|$ для двухконстантного тела Бингама не ограничен сверху. Заметим также, что с помощью функции $m(\eta_1)$ можно управлять процессом сжатия и растекания слоя, т. е. варьировать такие гидродинамические характеристики течения, как давление, или суммарная сила, прилагаемая к плитам, и расход.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Воларович М. П., Гуткин А. М.** Сжатие вязкопластичной дисперсной системы, имеющей форму полосы прямоугольного сечения // Коллоид. журн. 1960. Т. 22, № 5. С. 543–545.
2. **Гасанов Г. Т., Гасанзаде Н. А., Мирзаджанзаде А. Х.** Сдавливание вязкопластичного слоя круглыми пластинками // ПМТФ. 1961. № 5. С. 88–90.
3. **Мясников В. П.** О сдавливании вязкопластического слоя жесткими плитами // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1963. № 4. С. 92–96.
4. **Гноевой А. В., Климов Д. М., Петров А. Г., Чесноков В. Н.** Течение вязкопластичной среды между круглыми параллельными пластинами при их сближении и удалении // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1996. № 1. С. 9–17.
5. **Петров А. Г.** Плоская задача о выдавливании вязкопластичной среды параллельными пластинами // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 4. С. 608–617.
6. **Петров А. Г.** Развитие течения вязкой и вязкопластической среды между двумя параллельными пластинами // Прикл. математика и механика. 2000. Т. 64, вып. 1. С. 127–136.
7. **Wilson S. D. R.** Squeezing flow of a Bingham material // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1993. V. 47, N 1–3. P. 211–219.
8. **Sherwood J. D., Durban D.** Squeeze flow of a power-law viscoplastic fluid // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1996. V. 62, N 1. P. 35–54.
9. **Zwick K. J., Ayyaswamy P. S., Cohen I. M.** Variational analysis of the squeezing flow of a yield stress fluid // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1996. V. 63, N 2/3. P. 179–199.
10. **Smyrnaios D. N., Tsamopoulos J. A.** Squeeze flow of Bingham plastics // J. Non-Newton. Fluid Mech. 2001. V. 100, N 1–3. P. 165–189.
11. **Matsoukas A., Mitsoulis E.** Geometry effects in squeeze flow of Bingham plastics // J. Non-Newton. Fluid Mech. 2003. V. 109, N 2/3. P. 231–240.
12. **Roussel N., Lanos C., Toutou Z.** Identification of Bingham fluid flow parameters using a simple squeeze test // J. Non-Newton. Fluid Mech. 2006. V. 135, N 1. P. 1–7.
13. **Георгиевский Д. В.** Некоторые неодномерные задачи вязкопластичности: жесткие зоны и устойчивость // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. № 1. С. 61–78.
14. **Bunoiu R., Kesavan S.** Asymptotic behavior of a Bingham fluid in thin layers // J. Math. Anal. Appl. 2004. V. 293, N 2. P. 405–418.
15. **Георгиевский Д. В.** Асимптотические разложения и возможности отказа от гипотез в задаче Прандтля // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. № 1. С. 83–93.
16. **Георгиевский Д. В.** Асимптотический анализ пластического течения вдоль образующей в тонком цилиндрическом слое // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 5. С. 111–119.
17. **Ильюшин А. А.** Об испытаниях металлов при больших скоростях // Инж. сб. 1941. № 1. С. 13–26.
18. **Гольденвейзер А. Л.** Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 4. С. 593–608.
19. **Simonov I. V.** Theory of dynamic bending of thin elastic high nonhomogeneous plates // Intern. J. Solids Struct. 1992. V. 29, N 21. P. 2597–2611.
20. **Назаров С. А.** Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Т. 1. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Науч. кн., 2002.

Поступила в редакцию 25/IV 2011 г.