

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели.— М.: Наука, 1973.
2. Fjortoft R. Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex // Geophys. Publ.— 1950.— V. 17, N 6.
3. Арнольд В. И. Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости // ДАН СССР.— 1965.— Т. 162, № 5.
4. Арнольд В. И. Вариационный принцип для трехмерных стационарных течений идеальной жидкости // ПММ.— 1965.— Т. 29, вып. 5.
5. Юдович В. И. Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости // ЖВМФ.— 1963.— Т. 3, № 6.
6. Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия.— М.: Мир, 1973.
7. Ламб Г. Гидродинамика.— М.; Л.: ОГИЗ, 1947.
8. Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.— Новосибирск: Наука, 1985.
9. Moffatt H. K., Moore D. W. The response of Hill's spherical vortex to a small axisymmetric disturbance // J. Fluid Mech.— 1978.— V. 87, N 4.
10. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости.— М.: ИЛ, 1958.
11. Taylor G. I. Motion of solids in fluids when the flow is not irrotational // Proc. Roy. Soc. Ser. A.— 1917.— V. 43.— P. 99.
12. Kelvin Lord. Vibrations of a columnar vortex // Phil. Mag.— 1880.— V. 10.— P. 155.
13. Владимиров В. А. Условия нелинейной устойчивости течений идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ.— 1986.— № 3.
14. Владимиров В. А. Аналоги теоремы Лагранжа в гидродинамике завихренной и стратифицированной жидкостей // ПММ.— 1986.— Т. 50, вып. 5.
15. Седенко В. И., Юдович В. И. Устойчивость стационарных течений идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей // ПММ.— 1978.— Т. 42, вып. 6.

Поступила 13/VI 1986 г.

УДК 533.6.011.6 : 541.124

К РАСЧЕТУ ДИФфуЗИОННОГО ГОРЕНИЯ ДОЗВУКОВОЙ СТРУИ В СПУТНОМ СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

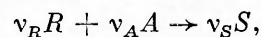
И. С. Белоцерковец, В. И. Тимошенко

(Днепропетровск)

Эффективный способ уменьшения донного сопротивления летательных аппаратов при сверхзвуковых режимах полета — организация горения в их кормовой части посредством дополнительного впрыска топлива через днище. Практическое использование такого способа управления донным сопротивлением делает актуальным вопрос об учете влияния горения на характеристики поля течения в окрестности тела. В [1] рассматривалось горение сверхзвуковой вдуваемой струи в кормовой области тела на основе уравнений Навье — Стокса. Влияние диффузионного горения на характеристики донных отрывных течений исследовалось в [2] в рамках модели Чепмена — Корста.

В данной работе предлагается приближенный метод расчета параметров дозвуковой вдуваемой струи в спутном сверхзвуковом потоке при наличии диффузионного горения. В основу метода положена модель сильного вязко-невязкого взаимодействия через давление сопряженных невязких потоков с течением в вязкой области.

1. Постановка задачи и метод решения. Рассматривается стационарное течение в двумерном следе за телом в постановке работы [3] с учетом диффузионного горения дозвуковой вдуваемой струи в сверхзвуковом спутном потоке. Относительно взаимодействующих потоков предполагается, что они в своем составе содержат по одному реагирующему компоненту (окислитель R для внешнего потока, горючее A для вдуваемой струи) и N нереагирующих в данных условиях компонентов. При перемешивании в областях смешения и ближнего следа окислитель и горючее вступают в химическое взаимодействие — горение, описываемое реакцией вида



где S — продукт реакции; ν_i — стехиометрический коэффициент i -го

компонента. В принятой модели горения реакция локализована в бесконечно узкой области — фронте пламени [4]. При математическом описании такой фронт соответствует поверхности разрыва тепловых потоков и диффузионных потоков реагирующих компонентов. Использование модели диффузионного горения существенно упрощает расчет, так как в этом случае не требуется вводить химическую кинетику и константы химического равновесия.

Особенность задачи — образование в кормовой области за телом двух (в общем случае несимметричных) фронтов пламени, направленных навстречу друг другу и исчезающих при встрече вследствие выгорания горючего в струе. Наличие двух фронтов пламени в вязкой области делит ее на три подобласти. В области течения между фронтами отсутствует компонент R , а вне ее — компонент A . Вязкое течение приближенно описывается уравнениями многокомпонентного ламинарного реагирующего пограничного слоя [5], дополненными уравнением состояния и зависимостями коэффициентов переноса от температуры и состава смеси. Сравнение решений в соответствующих подобластях вязкого и невязкого течения осуществляется при помощи условий вязко-невязкого взаимодействия [3]. Эти условия, обобщенные на случай химического взаимодействия и наличия замкнутых отрывных зон в вязкой области, имеют вид

$$(1.1) \quad dp_e/dx = (A + B + C)/D,$$

$$\frac{dy_k^*}{dx} = q_k, \quad \frac{dq_k}{dx} = \frac{1 + q_k^2}{\gamma_k M_k^2 p_e} \left(q_k \frac{A + B + C}{D} - \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=y_k^*} \right), \quad k = 1, 2,$$

где A , B , C и D определяются следующим образом:

$$(1.2) \quad A = p_e \left(u_k^2 y_k^{*j} \frac{dy_k^*}{dx} \Big|_{k=1}^{k=2} - 2 \int_{y_1}^{y_2} v \frac{\partial u}{\partial y} y^j dy \right),$$

$$B = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\gamma - 1}{\gamma} u \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(y^j \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + y^j \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dy - \int_{y_1}^{y_2} \frac{p_e}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^j \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy,$$

$$C = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\gamma - 1}{\gamma} u \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[y^j \sum_i \frac{\mu}{Pr} (Le_i - 1) h_i \frac{\partial c_i}{\partial y} \right] - \right.$$

$$\left. - \sum_i \left(h_i - \frac{\kappa}{\kappa_i} \frac{a^2}{\gamma - 1} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(y^j \frac{\mu}{Sm_i} \frac{\partial c_i}{\partial y} \right) \right\} dy,$$

$$D = \frac{1}{1 + j} \left[\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2 - a^2}{\gamma} \right) y^{1+j} dy - \frac{u_k^2 - a_k^2}{\gamma_k} y_k^{*1+j} \Big|_{k=1}^{k=2} \right].$$

Здесь c_i — массовая концентрация i -го компонента; κ_i , κ — молекулярные веса компонента и смеси; Sm , Le — числа Шмидта и Льюиса; a — скорость звука (остальные обозначения взяты из [3]).

Система (1.1) получена из закона сохранения массы в области вязкого течения, краевого характера граничных условий для поперечной составляющей скорости и граничных условий для сопряженных потоков. Системе (1.1) в широком диапазоне изменения начальных данных при совместном интегрировании с уравнениями Эйлера и пограничного слоя присуща особая точка типа «седло». Наличие особой точки, через которую проявляет себя механизм передачи возмущений вверх против потока, есть следствие слабой эллиптичности данной задачи в рамках модели вязко-невязкого взаимодействия как задачи с неизвестными границами. Физически реализуемому течению отвечает особая интегральная кривая системы (1.1). Таким образом, условия вязко-невязкого взаимодействия

позволяют найти распределение статического давления в вязкой области, построить границы сопряженных невязких потоков и срастить решения в соответствующих подобластях.

Расчет параметров в ближнем следе за телом заключается в совместном пошаговом интегрировании уравнений Эйлера, пограничного слоя и (1.1). Для расчета характеристик невязких эквивалентных потоков используется явная конечно-разностная схема [6], а решение уравнений вязко-невязкого взаимодействия (1.1) получено методом Рунге — Кутты. Некоторые трудности возникают при интегрировании уравнений ламинарного реагирующего пограничного слоя. С одной стороны, они связаны с асимптотическим характером граничных условий, необходимостью определения в процессе расчета границ вязкой области и существенной неравномерностью параметров поперек потока, с другой — с образованием в области вязкого течения диффузионных фронтов пламени. Интегрирование уравнений пограничного слоя проводится по неявной конечно-разностной схеме в нормированных переменных Мизеса [7]:

$$\xi = x, \eta = (\Psi - \Psi_1(x))/(\Psi_2(x) - \Psi_1(x)),$$

где Ψ — функция тока; $\partial\Psi/\partial y = y^j \rho u$; $\partial\Psi/\partial x = -y^j \rho v$; $\Psi_k(x)$ — значение функции тока на соответствующей границе вязкой области $y = y_k(x)$. Использование переменных Мизеса позволяет сократить число определяющих функций, избежать трудностей, связанных с удовлетворением граничных условий и осуществить автоматическое сгущение узлов расчетной сетки в физической плоскости в окрестности границ вязкой области. Последнее обстоятельство позволяет более точно учесть массу, вовлекаемую в вязкую область вследствие вязкого подтормаживания, и проводить расчет с умеренным числом сетки (~ 50). Неизвестные значения функций тока на условных границах вязкой области определяются из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\Psi_k}{dx} = -\frac{1}{w_2 - w_1} \lim_{\eta \rightarrow k-1} \frac{\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\mu \rho u y^{2j} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right]}{\frac{\partial u}{\partial \eta}} \quad \text{при } k = 1, 2.$$

Согласно выбранной модели диффузионного горения, на фронте пламени концентрации реагирующих компонентов равны нулю, а их диффузионные потоки находятся в стехиометрическом соотношении. Кроме того, на фронте пламени терпят разрыв тепловые потоки вследствие выделения (поглощения) тепла при протекании химической реакции [4]. Исключив концентрации реагирующих компонентов при помощи соотношения

$$c_{A,R} = 1 - c_S - \sum_{i=1}^N c_i, \text{ эти условия удобно записать в виде}$$

$$(1.3) \quad c_S + \sum_{i=1}^N c_i = 1;$$

$$(1.4) \quad \left[\frac{1}{\text{Sm}_A} \frac{\partial c_S}{\partial \eta} \right]_{\eta_{fk\pm}} + L \left[\frac{1}{\text{Sm}_R} \frac{\partial c_S}{\partial \eta} \right]_{\eta_{fk\mp}} = \left\{ \left[\frac{1}{\text{Sm}_A} \right]_{\eta_{fk\pm}} + \left[\frac{1}{\text{Sm}_R} \right]_{\eta_{fk\mp}} \right\} \sum_{i=1}^N \frac{\partial c_i}{\partial \eta};$$

$$(1.5) \quad \left[\frac{\partial H}{\partial \eta} + (\text{Le}_S - 1) h_S \frac{\partial c_S}{\partial \eta} \right]_{\eta_{fk\pm}} = 0.$$

Здесь фронту пламени отвечает нормированная координата $\eta = \eta_{fk}(x)$; $L = v_A \kappa_A / v_R \kappa_R$.

Условия (1.3), (1.5) служат в качестве граничных для концентраций реагирующих компонентов и полной энтальпии на фронте пламени. Соотношение (1.4) используется для определения положения фронта пламени. Наличие в расчетной области поверхностей разрыва диффузионных и тепловых потоков существенно усложняет расчет характеристик вязкого течения. Одним из широко используемых методов расчета разрывов яв-

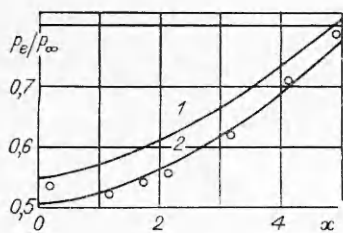
ляется метод их выделения. Применительно к рассматриваемой задаче он заключается в выделении в расчетной области фронтов пламени, что приводит к разбиению ее на три подобласти, в каждой из которых присутствует только один реагирующий компонент. В данной работе для интегрирования уравнений пограничного слоя поперек вязкой области при наличии фронта пламени используется метод «плавающего» разрыва, позволяющий провести расчет поля течения без существенного изменения логики «сквозного» алгоритма расчета [3] и в то же время следить за положением фронта пламени. Рассмотрим подробно организацию расчета в этом случае. На первом этапе расчета полагаем, что положение фронта пламени в сечении $x = x_n$ совпадает с m -м внутренним расчетным узлом. При решении уравнений диффузии для реагирующих компонентов методом скалярной прогонки прогоночные коэффициенты в m -м узле определяются из условия (1.3). Прогоночные коэффициенты для расчета полной энтальпии на фронте пламени найдутся из разностных аналогов соотношения (1.5) и уравнения энергии, записанного в $(m - 1)$ - и $(m + 1)$ -х узлах. В остальных узлах прогоночные коэффициенты определяются обычным образом. По найденным концентрациям реагирующих компонентов рассчитывается невязка $\Delta\Phi_m$ в соотношении между диффузионными потоками, полученном в результате конечно-разностной аппроксимации (1.4). Номер узла m подбирается из условия $\Delta\Phi_m \Delta\Phi_{m+1} < 0$, при этом положение фронта пламени оказывается найденным с погрешностью $O(\Delta\eta)$. На втором этапе расчета для уточнения положения фронта пламени вводится параметр $\Delta\eta_f = \eta_f - \eta_m$, значение которого находится из $\Delta\Phi_f = 0$. Соотношения (1.3), (1.5) по-прежнему служат для определения прогоночных коэффициентов в m -м узле. Например, используя линейную интерполяцию из (1.3), имеем

$$(1.6) \quad (1 + t_f)c_{S_m} - t_f c_{S_{m-1}} = 1 - \varphi_f,$$

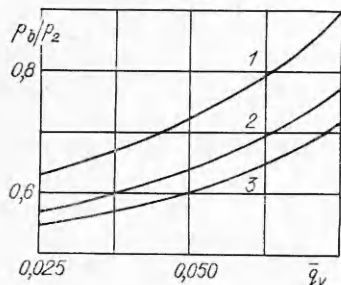
где $t_f = \Delta\eta_f/\Delta\eta$; $\varphi_m = \sum_{i=1}^N c_{i_m}$; $\varphi_f = (1 - t_f)\varphi_m + t_f\varphi_{m+1}$. Из (1.6) легко получить прогоночные коэффициенты в m -м узле для концентраций. Разностная аппроксимация соотношений (1.4), (1.5) при $y = y_m + \Delta y_f$ с применением линейной интерполяции типа (1.6) позволяет найти прогоночные коэффициенты для полной энтальпии в m -м узле и определить $\Delta\Phi_f$.

2. Некоторые результаты расчетов. В рамках модели вязко-невязкого взаимодействия оценено влияние химической неоднородности и диффузионного горения на характеристики ламинарного течения за пластиной в сверхзвуковом потоке при наличии дозвукового кормового вдува. В качестве внешнего потока рассматривался воздух, моделируемый в расчетах двухкомпонентной смесью газов, содержащей 23% O_2 и 77% N_2 . Первоначально исследовано влияние молекулярного веса вдуваемой струи на распределение статического давления в ближнем следе. Дозвуковая струя принималась однокомпонентной и задавалась интенсивностью равномерного вдува $\bar{q}_v = \rho_v u_v / \rho_\infty u_\infty$ в сечении кормового среза. В расчетах зависимости коэффициентов переноса чистых компонентов от температуры определялись по степенному закону [8], а для нахождения коэффициентов переноса смеси и обобщенных коэффициентов диффузии использовались приближенные зависимости, взятые из [8]. На рис. 1 представлены расчетные распределения статического давления в вязкой области при симметричном обтекании пластины внешним равномерным потоком с $M_\infty = 3,5$ и $\bar{q}_v = 0,02$. Расчетные кривые 1 и 2, соответствующие вдуву гелия и азота, удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными [9] (показаны точками).

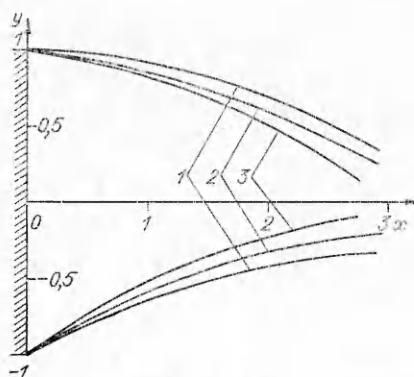
Исследовалось влияние диффузионного горения водорода на донное давление. Струя по составу принималась трехкомпонентной. В качестве реагирующего компонента был выбран молекулярный водород, а не реагирующих при данных условиях компонентов — молекулярный азот и пары



Р и с. 1



Р и с. 2



Р и с. 3

воды. Влияние \bar{q}_v на донное давление при несимметричном обтекании пластины показано на рис. 2. Расчеты проведены для холодной струи ($T_v^0 = T_1^0 = T_2^0$, $T_1 = T_2 = 300$ К) при числе Рейнольдса, вычисленном по параметрам невозмущенного потока и ширине пластины ($Re = 500$), числа Маха в нижнем и верхнем потоках ($M_1 = 2$, $M_2 = 4$) и при статическом давлении в невозмущенных невязких потоках $p_1 = p_2 = 3,039 \times 10^4 \text{ Н/м}^2$. Начальные и граничные значения концентраций компонентов в струе: $c_{N_2} = 0,5$, $c_{H_2O} = 1 - c_{N_2} - c_{H_2}$. Кривые 1—3 отвечают $c_{H_2} = 0,1$; 0,05; 0,01. Положения фронтов пламени в вязкой области для рассмотренного примера расчета представлены на рис. 3. Анализ результатов расчетов позволяет сделать следующие выводы. Увеличение концентрации водорода в струе существенно сказывается на донном давлении и приводит к его возрастанию в рассмотренном диапазоне изменения интенсивности вдува. С повышением концентрации водорода каждый из фронтов пламени перемещается поперек вязкой области в направлении к соответствующей границе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горение в сверхзвуковом потоке/Баев В. К., Головичев В. И., Третьяков П. К. и др.— Новосибирск: Наука, 1984.
2. Юренок К. Е. Донное давление и температура за осесимметричными телами при взаимодействии со сверхзвуковым потоком // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1974.— № 2.
3. Белоцерковец И. С., Тимошенко В. И. К расчету характеристик течения при равномерном вдуве однородного газа в кормовой области тела // ПМТФ.— 1984.— № 1.
4. Рускол В. А. Автомодельное решение уравнений ламинарного пограничного слоя при наличии фронта пламени // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1966.— № 2.
5. Дорренс У. Х. Гиперзвуковые течения вязкого газа.— М.: Мир, 1966.
6. MacCormack R. W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering.— N. Y., 1969.— (Paper/AIAA; N 69).
7. Патаваркар С., Сполдинг Д. Тепло- и массообмен в пограничных слоях.— М.: Энергия, 1971.
8. Бретшнайдер С. Свойства газов и ядерсечей.— М.: Химия, 1966.
9. Chapkis R. L., Fox J. et al. An experimental investigation of base mass injection on the laminar wake behind a 6-degree half-angle wedge at $M = 4,0$ // Fluid Physics of Hypersonic Wakes.— 1967.— V 1 — P 154.

Поступила 29/VII 1986 г.